Terminale ST2S

O. Lader

Table des matières

Remarques.

1. 2h30 de cours + 30min de TD
2. Toutes les fonctions sont définies sur un intervalle.
3. Il faut une petite maitrise des tableurs...
4. Dans les sujets de Bac (durée 2h, 3 exercices), les problèmes mathématiques sont toujours en lien avec un problème de la vie courante.
5. B.O. :
   Les travaux individuels en temps libre sont l'occasion de développer les capacités de mise au point d'un raisonnement et d'expression écrite. Ils doivent être réguliers, suffisamment fréquents mais de longueur modeste.
   Les devoirs de contrôle, peu nombreux, combinent des exercices d'application directe du cours et des problèmes plus synthétiques.
   Ces devoirs doivent être suffisamment courts pour permettre à la grande majorité des élèves d'étudier l'ensemble des questions posées et de rédiger posément une solution.
6. `http://www.normalesup.org/~dconduche/TermST2S/`
7. `http://sarmate.free.fr/ressources/A4/classeTST2S/classeTST2S.php`

Progression

- Chapitre 1 Information chiffrée du 2/09 au 21/09 (3 semaines)
- Chapitre 2 Les suites du 23/09 au 12/10 (3 semaines)
- Chapitre 3 Statistiques à deux variables du 14/10 au 15/11 (3 semaines)
- Chapitre 4 Fonction dérivée du 18/11 au 10/01 (5 semaines)
- Chapitre 5 Probabilité conditionnelle et indépendance du 13/01 au 07/03 (6 semaines)
- Chapitre 6 Exponentielles et logarithme décimal, application aux inéquations du 10/03 au 12/04 (5 semaines)

1 Pourcentage et taux d'évolution (3 semaines)

Définition 1.1. Soit A une partie d'une population E. La **proportion des éléments de A par rapport à E** est

$$p = \frac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } E}$$

Un pourcentage est une façon d'exprimer un nombre comme une fraction de cent :

$$a\% = a\,\frac{1}{100}$$

Exemple. Dans une population de référence constitué de 400 personnes, on suppose que 56 personnes ont une particularité P. La proportion de personnes ayant la particularité P est $\frac{56}{400}$.
Pour exprimer cette **proportion** en un **pourcentage**, on peut procéder comme suit :

$$\frac{56}{400} = \frac{56 \times 100}{400 \times 100} = \frac{56}{4}\frac{1}{100} = 14\%$$

On peut retrouver le pourcentage, en complétant le tableau de proportionnalité suivant :

400	100	
56	$100 \times \frac{56}{400} = 14$	$\times \frac{56}{400}$

Le nombre 14 représente le nombre de personnes ayant la particularité P parmi 100 personnes.

Propriété 1.2. *Le pourcentage x d'une population ayant un caractère P donné est égale à la proportion de la population ayant ce caractère multiplié par 100 :*

$$x = \textit{proportion} \times 100 = \frac{\textit{Nombre de personnes ayant le caractère } P}{\textit{taille de la population considérée}} \times 100$$

Définition 1.3. Soit x un nombre représentant par exemple un prix où une quantité, soit p un pourcentage.

— Le nombre $\frac{p}{100} \times x$ représente les $p\%$ de x.

— **Augmenter** x de $p\%$ revient à lui ajouter $p\%$ de lui-même. Le résultat peut être écrit de la manière suivante :

$$x + \frac{p}{100} \times x = (1 + \frac{p}{100}) \times x$$

— **Diminuer** x de $p\%$ revient à lui retrancher $p\%$ de lui-même. Le résultat peut être écrit de la manière suivante :

$$x - \frac{p}{100} \times x = (1 - \frac{p}{100}) \times x$$

Le nombre $1 \pm \frac{p}{100}$ par lequel on multiplie x dans les deux cas précédent est appellé **coefficient multiplicatif**.

On vient de voir qu'une augmentation de $p\%$ se traduit par une multiplication par $1 + \frac{p}{100}$ et qu'une diminution de $p\%$ se traduit par une multiplication par $1 - \frac{p}{100}$.

Définition 1.4. Le **taux d'évolution** permet de quantifier l'évolution d'une grandeur numérique entre deux dates. Si cette grandeur passe d'une valeur de départ V_0 à une valeur d'arrivée V_1, le taux d'évolution est donné par la formule :

$$t = \frac{V_1 - V_0}{V_0}$$

Propriété 1.5.

— *Soit t_1 le taux d'évolution de V_0 à V_1, alors V_1 est égale V_0 augmenté de t_1, c'est-à-dire :*

$$V_1 = (1 + t_1)V_0$$

On appelle $1 + t_1$ le coefficient multiplicatif de V_0 à V_1.

— *Soit de plus t_2 le taux d'évolution de V_1 à V_2, alors*

$$V_2 = (1 + t)V_0 = (1 + t_2)(1 + t_1)V_0$$

Le coefficient multiplicatif de V_0 à V_2 est égale à produit des coefficients multiplicatifs successifs. C'est-à-dire

$$t = (1 + t_1) \times (1 + t_2) - 1$$

$$\begin{tikzcd}
\boxed{V_0} \arrow[r, bend right, "\times(1+t_1)"'] \arrow[rr, bend left, "\times(1+t)"] & \boxed{V_1} \arrow[r, bend right, "\times(1+t_2)"'] & \boxed{V_2}
\end{tikzcd}$$

Propriété 1.6. *Soit t le taux d'évolution de V_0 à V_1, on a*

$$V_0 = \frac{V_1}{1 + t}$$

Pour passer de V_0 à V_1, on multiplie par $1 + t$ ainsi pour aller dans l'autre sens, donc revenir en arrière de V_1 à V_0 on **divise**[1] par $1 + t$.

1. On préfèrera l'approche du retour en arrière par la division à "dans l'équation $V_1 = (1 + t)V_0$, on fait passer $1 + t$ de l'autre côté ..."

2 Suites arithmétiques et géométriques (3s)

— Rappels sur la notion de suite

— Donner u_n en fonction de n.

— Sens de variations

— Notion de seuil. Pour le calcul, utiliser une table

— Rappeler la notion de taux d'évolution, de pourcentage d'évolution, pourcentage d'augmentation.

— Relation entre suite géométrique et application successive d'un "taux d'évolution".

— Somme des premiers termes.
"Les formules ne sont pas exigibles et devront être rappelées dans tout exercice d'évaluation."

Définition 2.1. Une **suite de nombres réels** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou (u_n)) est la donnée pour tout entier naturel n d'un nombre réel noté u_n. Un dit que u_n est le n-ème terme de la suite (u_n).

Exemples. — $(u_n) = (0, 1, 2, 3, 4, \ldots)$, c'est-à-dire pour tout n : $u_n = n$.

— $(u_n) = (0, 2, 4, 6, 8, \ldots)$, c'est-à-dire pour tout n : $u_n = 2n$.

— $(u_n) = (0, 1, 4, 9, 25, 36, \ldots)$, c'est-à-dire pour tout n : $u_n = n^2$.

— $(u_n) = (1, 5, 25, 125, \ldots)$, c'est-à-dire pour tout n : $u_n = 5^n$.

2.1 Rappels

On peut aussi définir une suite par récurrence, par exemple :

— une suite arithmétique : $\begin{cases} u_0 & = 0 \\ u_{n+1} & = u_n + 2 \end{cases}$

— une suite géométrique : $\begin{cases} u_0 & = 1 \\ u_{n+1} & = 5u_n \end{cases}$

Définition 2.2. Une **suite arithmétique** de terme initial u_0 et de raison r est la suite définie de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$$

Propriété 2.3. *Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de terme initiale u_0, alors son n-ème terme est $u_n = r\,n + u_0$.*

Exemple. Soit (u_n) la suite arithmétique de raison -1.3 et de terme initial $u_0 = 2$. Alors

— $u_1 = u_0 - 1.3 = 0.7$,

— $u_{10} = -1.3 \times 10 + 2 = -11$,

— $u_n = -1.3n + 2$.

Définition 2.4. Une **suite géométrique** de terme initial u_0 et de raison q est la suite définie de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = qu_n \end{cases}$$

Propriété 2.5. *Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de terme initiale u_0, alors son n-ème terme est $u_n = q^n u_0$.*

Exemple. Soit (u_n) la suite géométrique de raison 4 et de terme initial $u_0 = 5$. Alors

— $u_1 = 4u_0 = 20$,

— $u_6 = 4^6 \times 5 = 20480$,

— $u_n = 4^n \times 5$.

Exercice 1. Exercices 13, 24, 25 pages 20-21 (intervention des suites arithmétiques et géométriques dans des situations concrètes).
plus représentation graphique dans chacun des cas.

2.2 Sens de variation

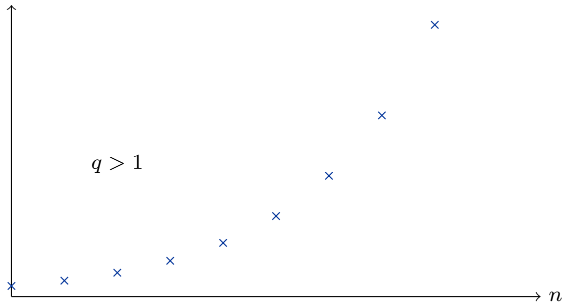
Propriété 2.6. *Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de terme initial u_0. Notons que pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n$ est égale à la raison r.*

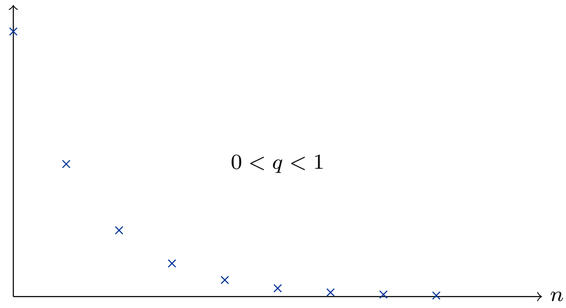
1. *Si $r > 0$, alors pour tout n : $u_n < u_{n+1}$ et la suite est strictement croissante.*
2. *Si $r = 0$, alors pour tout n : $u_n = u_{n+1} = u_{n+2} = \dots$ et la suite est constante.*
3. *Si $r < 0$, alors pour tout n : $u_n > u_{n+1}$ et la suite est strictement décroissante.*

Si une suite (u_n) est croissante alors pour tout $n < p$, on a $u_n \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \dots \leq u_{p-1} \leq u_p$. De même, si une suite (u_n) est décroissante alors pour tout $n < p$, on a $u_n \geq u_p$.

Propriété 2.7. *Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de terme initial u_0. Notons que pour tout entier n, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est égale à la raison q.*

1. *Si $q > 1$, alors pour tout n : $u_n < u_{n+1}$ et la suite est strictement croissante.*
2. *Si $q = 1$, alors pour tout n : $u_n = u_{n+1} = u_{n+2} = \dots$ et la suite est constante.*
3. *Si $q < 1$, alors pour tout n : $u_n > u_{n+1}$ et la suite est strictement décroissante.*





Exercice 2. Quelques un parmi 1 à 37 pages 20-22.

2.3 Somme de termes consécutifs

Propriété 2.8. *Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de terme initial u_0. Rappelons que pour tout entier n, $u_n = r\,n + u_0$. Alors*

1. *Soit S la somme $u_k + u_{k+1} + \ldots + u_p$ des termes consécutifs de la suite (u_n) de u_k à u_p, alors :*

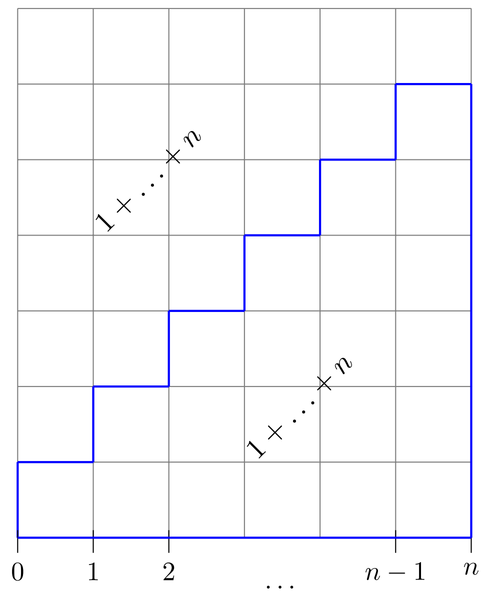
$$\begin{aligned} S &= u_k + u_{k+1} + \ldots + u_p \\ &= (\textit{nombre de termes de } S)\,\frac{(\textit{premier terme de } S) + (\textit{dernier terme de } S)}{2} \\ &= (p-k+1)\frac{u_k+u_p}{2} \end{aligned}$$

2. *En particulier,*

$$\underbrace{u_1 + \ldots + u_n}_{n \textit{ termes}} = n\frac{u_1+u_n}{2}$$

Démonstration. 1. AG3 page 29

2. Un petit dessin :



Le rectangle est de hauteur $n+1$ et de largeur n.

□

Exemple. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n$. Cette suite est arithmétique de raison 1 et d'après la propriété précédente, on a

$$1 + 2 + \ldots + n = u_0 + \ldots + u_n = \frac{(n+1)n}{2}$$

Propriété 2.9. *Soit (u_n) une suite géométrique de raison r et de terme initial u_0. Rappelons que pour tout entier n, $u_n = q^n\, u_0$. Alors*

1. *Soit S la somme $u_k + u_{k+1} + \ldots + u_p$ des termes consécutifs de la suite (u_n) de u_k à u_p, alors :*

$$\begin{aligned} S &= u_k + u_{k+1} + \ldots + u_p \\ &= (\textit{premier terme de } S) \times \frac{q^{\textit{nombre de termes de } S} - 1}{q-1} \\ &= u_k \times \frac{q^{p-k+1} - 1}{q-1} \end{aligned}$$

2. *En particulier,*

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q-1}$$

Démonstration. ... □

exercice 71 page 34.

Propriété 2.10.
1. *Si une quantité* **augmente** *régulièrement de $a\%$ (par exemple tous les ans ou tous les mois). Si on note u_n la quantité après la n-ème évolution. Alors (u_n) est une suite géométrique de raison $1 + \frac{a}{100}$.*
2. *Si une quantité* **diminue** *régulièrement de $a\%$ et on note u_n la quantité après la n-ème évolution. Alors (u_n) est une suite géométrique de raison $1 - \frac{a}{100}$.*

3 Séries statistique à deux variables (4s)

- Tableaux d'effectifs, nuage de points associés.
- Point moyen.
- Représenter graphiquement un nuage de points et son point moyen. Exemples d'ajustements.
- Ajustement affine d'un nuage de points.
  Dans les sujets de bac, la droite est donnée.
- Après ajustement, estimation des valeurs suivantes.
- Est-ce que le point moyen appartient à la droite d'ajustement ? Justifier.

Objectifs.

- Tri croisé. Étude fréquentielle.
- Notion de fréquence de A sachant B. Calculer dans des situations simples une fréquence de A sachant B à partir du tableau de données.

Série statistique à une variable

Rappels.

- Diagramme tige et diagramme feuille.
- Comparer un même caractère sur deux populations grâce aux **tableaux des fréquences**.
- Histogrammes à pas non constants.
- Moyenne, médiane.
- indicateurs de dispersion : Quantiles, déciles, intervalle interquartile, intervalle interdécile
- Diagramme en boîte
- Écart type. La formule générale n'est pas exigible. Un apprentissage de son application est à faire afin de comprendre l'intérêt de cet indicateur.

Définition 3.1. Dans une population, on considère un caractère A qui prend différents états aux quels on associe des nombres $x_1, \dots, x_m$. On représente ainsi la série statistique obtenue :

	x_1	...	x_m	Total
Effectifs	n_1	...	n_m	N = Effectif total
Fréquences	f_1	...	f_m	1

- La fréquence f_i des individus dans A_i est égale à l'effectif n_i des individus dans A_i divisé par l'effectif total N :
$$f_i = \frac{n_i}{N}$$
En déplaçant l'entier N de l'autre côté de l'équation, on note que $n_i = f_i N$.

- On note $\bar{x}$ la **moyenne** de la série statistique :
$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{N}(n_1 x_1 + \dots + n_m x_m) \\ &= f_1\,x_1 + \dots + f_m\,x_m\end{aligned}$$

— L'**écart type** de la série statistique :

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\frac{1}{N}\left(n_1(x_1-\bar{x})^2+\ldots+n_m(x_m-\bar{x})^2\right)}\\ &= \sqrt{\frac{1}{N}\left(n_1x_1^2+\ldots+n_mx_m^2\right)-\bar{x}^2}\end{aligned}$$

— La **médiane** m est un nombre qui permet de couper l'ensemble des valeurs en deux parties égales : mettant d'un côté une moitié de l'effectif où les valeurs prisent sont inférieurs ou égales à m et de l'autre côté l'autre moitié de l'effectif où les valeurs prisent sont supérieurs ou égales à m.

— On note Q_1 le **premier quartile**, ce nombre sépare les 25% inférieurs des données.
On note Q_3 le **troisième quartile**, ce nombre sépare les 25% supérieurs des données.

— Le différence entre le troisième quartile et le premier quartile $Q_3 - Q_1$ est appelée **écart interquartile**. C'est un critère de dispersion de la série.

3.1 Tableau croisé

Un tableau croisé permet de visualiser un tri sur les effectifs répartis suivant deux caractères.

Exercice 3. activité 1 page 40

Définition 3.2. Un **tableau croisé** (ou tableau à double entrée) est un moyen pratique pour visualiser un tri sur les effectifs en vue d'étudier simultanément les deux caractères A et B sur cette population.

caractère B / caractère A	B_1	...	B_m	Total
A_1	Effectif de "A_1 et B_1"	...	Effectif de "A_1 et B_m"	Effectif de A_1
...	...	...	...	...
A_n	Effectif de "A_n et B_1"	...	Effectif de "A_n et B_m"	Effectif de A_n
Total	Effectif de B_1	...	Effetcif de B_m	Effectif total

3.2 Fréquences conditionnelles

Une fréquence conditionnelle se calcule par rapport à une population de référence plus réduite : celle d'une modalité d'un des caractères étudiés.
Elle exprime la dépendance de l'autre caractère relativement à cette modalité.

Définition 3.3. À partir du tableau précédent, on pose

— Le nombre $f_{B_1}(A_n)$ est la **fréquence conditionnelle de A_n par rapport à B_1** (ou fréquence de A_n sachant B_1) :

$$f_{B_1}(A_n) = \frac{\text{effectif de "}A_n \text{ et } B_1\text{"}}{\text{effectif de } B_1}$$

En fait, on calcul la proportion d'individus ayant le caractère A_n parmi les individus ayant au moins le caractère B_1.

— Le nombre $f_{A_1}(B_n)$ est la **fréquence conditionnelle de B_m par rapport à A_1** (ou fréquence de B_m sachant A_1) :

$$f_{A_1}(B_m) = \frac{\text{effectif de "}A_1 \text{ et } B_m\text{"}}{\text{effectif de } A_1}$$

3.3 Séries statistiques à deux variables

Définition 3.4. L'ensemble des N couples $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, ..., $(x_N; y_N)$, où x_1 et y_1, x_2 et y_2, ..., x_N et y_N sont les valeurs observées de x et de y, est appelé **série statistique à deux variables** x et y (ou **série statistique double**).

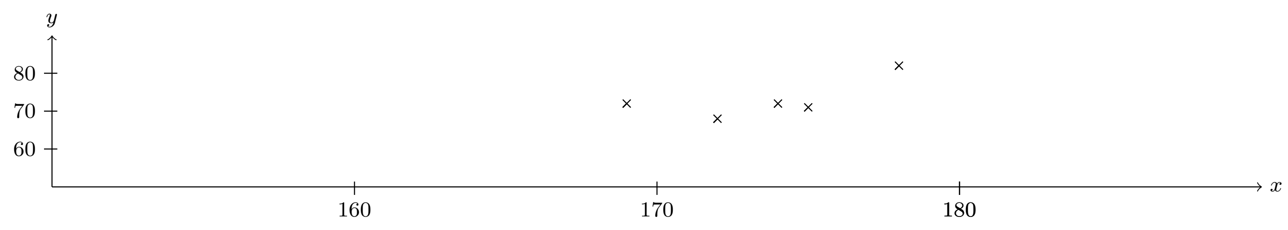
Le plan est rapporté à un repère. On considère une série statistique $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, ... (x_N, y_N) à deux variables x et y.

Définition 3.5. Le **nuage de points** de cette série statistique double est l'ensemble des N points du plan, de coordonnées $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, ... (x_N, y_N).

Exemple. Considérons la série statistique suivante :

x	174	178	175	169	172
y	72	82	71	72	68

Le nuage de points assosié :



Définition 3.6. On note $\bar{x}$ la moyenne des N nombres x_i et $\bar{y}$ la moyenne des N nombres y_i :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N} \qquad \text{et} \qquad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_N}{N}$$

Le **point moyen du nuage** est le point G du plan de coordonnées $(\bar{x}; \bar{y})$.

(complétion de l'exemple précédent).

3.4 Ajustement d'un nuage de points par une droite

La forme du nuage de points peut suggérer le tracé d'une courbe usuelle simple ajustant au plus près tous les points de ce nuage. Cette courbe approchant le nuage de point suggère une relation de la forme $y = f(x)$ entre les abscisses et les ordonnées des points.

Définition 3.7. Lorsque les points du nuage de la série statistique à deux variables sont approximativement alignés, la courbe d'ajustement est une **droite d'ajustement**, dont l'équation est de la forme $y = ax + b$.
La fonction affine f définie par $f(x) = ax + b$, est l'**ajustement affine** de la série statistique.

Pour trouver dans ce cas, la droite affine d'ajustement, on la devine ou on utilise la calculatrice.

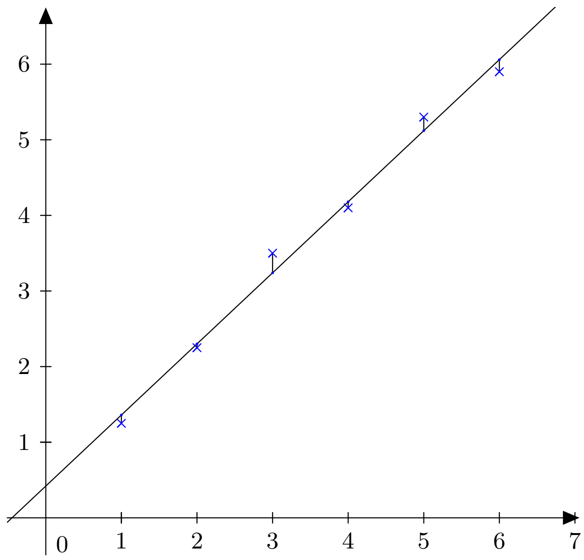
Propriété 3.8. *La calculatrice (ou le tableur) pour un ajustement affine utilise la méthode des moindres carrés. Cette méthode consiste à déterminer la droite d'ajustement Δ tel que la somme $l_1^2 + \ldots + l_N^2$ des carrés de toutes les longueurs représentées en rouge sur la figure soit minimale.*

Exemple. Considérons le série statistique double :

x	1	2	3	4	5	6
y	1,25	2,25	3,5	4,1	5,3	5,9

Avec la calculatrice, on obtient la droite d'ajustement d'équation

$$y = 0,94x + 0,42$$



3.5 Rappels : Équations de droites

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Propriété 3.9. *Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = ax + b$. Un point $A(x_A; y_A)$ est sur la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de la droite $\mathcal{D}$, c'est-à-dire :*

$$y_A = a\,x_A + b$$

Propriété 3.10. *Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points dans un plan muni d'un repère orthonormé. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation*

$$y = ax + b$$

passant par A et B. Alors,

1. *Le coefficient directeur de la droite $\mathcal{D}$ est*

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

2. *L'ordonnée à l'origine de $\mathcal{D}$ est*

$$b = y_A - a\,x_A = y_B - a\,x_B$$

Exercice 4.

1. Trouver le nombre a qui vérifie l'équation suivante : $\frac{2}{13} = \frac{3}{2}a + \frac{15}{13}$.
2. Soit $\mathcal{D}$ d'équation $y = 0,3x - 5$. Parmi les points suivants :

$$A(0; -5); \quad B(1; 2); \quad C(10; -2); \quad M(12; 1000)$$

   lesquels appartiennent à la droite D ?
3. Soient $A(1; 2)$ et $B(10; 11)$. Déterminer l'équation de la droite passant par les pointes A et B.
4. Soient $\mathcal{D}$ la droite de coefficient directeur $0,3$ et passant par le point $G(3,4; 2,5)$. Déterminer l'équation de la droite $\mathcal{D}$.

4 Fonction dérivée (5s)

— Étant donnée une fonction de référence (polynôme) savoir calculer l'image d'un nombre.
— Calculer la préimage.
— Calculer la dérivée des fonctions de références.
— Développer (ou factoriser) une expression. Par exemple $(t-6)(3t-6)$.
— Position de la courbe par rapport à une tangente.

4.1 La fonction dérivée

En première a été vu la notion de dérivée. La figure 1 donne une illustration du nombre dérivée.

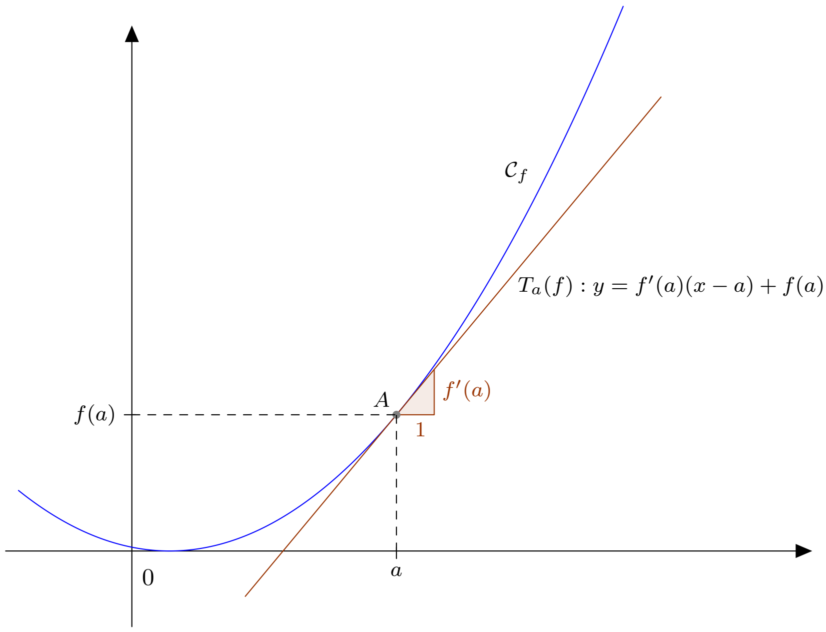


FIGURE 1 – Tangente et nombre dérivé

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en un point a de I, alors l'équation de la tangente, notée $T_a(f)$, est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Exemple. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$. On rappelle que, pour tout point A de $\mathcal{C}_f$, d'abscisse a, le nombre dérivé de f en a est $f'(a) = 3a^2$.
Considérons l'abscisse $a = 2$, on note que $f(2) = 8$ et $f'(2) = 12$, ainsi on a

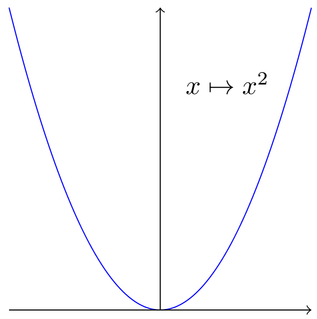
$$T_2(f) : \; y = 12(x-2) + 8 = 12x - 16$$

Exercice 5. Activité 1 page 94.

Définition 4.1. Soir f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que la fonction f est dérivable si en tout point x de I la fonction f admet un nombre dérivé.
Dans ce cas, on appelle **fonction dérivée de** f (on **dérivée de** f) la fonction, noté f', qui, à tout x de I, associe le nombre dérivé $f'(x)$ de f en w.

4.2 Dérivée des fonctions de référence

La fonction carré



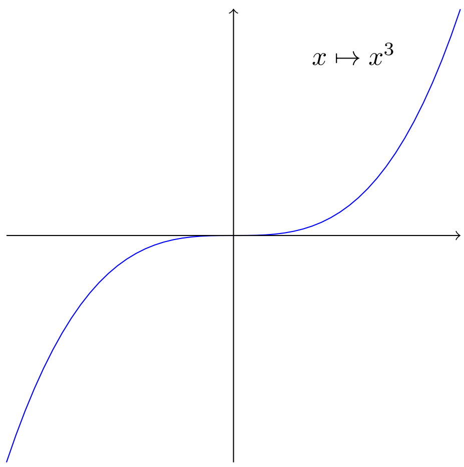
Propriété 4.2.

- *La fonction carré $f(x) = x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$.*
- *Quel que soit le nombre x, $x^2 \geq 0$.*
- *Quels que soient les nombres a, b, on a*

$$\begin{array}{rcl} (a\,b)^2 & = & a^2\,b^2 \\ (a+b)^2 & = & a^2+2ab+b^2 \\ (a-b)^2 & = & a^2-2ab+b^2 \\ a^2-b^2 & = & (a+b)(a-b) \end{array}$$

- *Le fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ et est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.*
- *La fonction carré est dérivable sur $\mathbb{R}$.*
- *La dérivée de la fonction carré $f(x) = x^2$ est $f'(x) = 2x$.*

La fonction cube

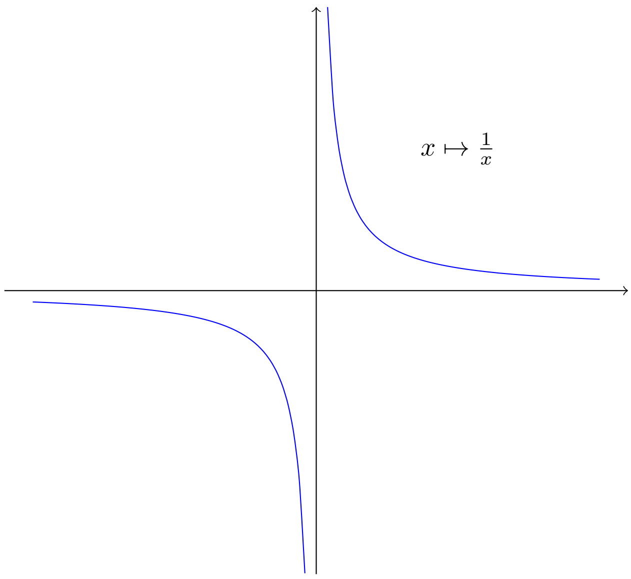


Propriété 4.3.

- *La fonction cube $f(x) = x^3$ est définie sur $\mathbb{R}$.*
- *Quel que soit le nombre x, x^3 est de même signe que x (car $x^3 = \underbrace{x^2}_{\geq 0}\,x$).*

- *Le fonction cube est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.
- *La fonction cube est dérivable sur* $\mathbb{R}$.
- *La dérivée de la fonction cube* $f(x) = x^3$ *est* $f'(x) = 3x^2$.

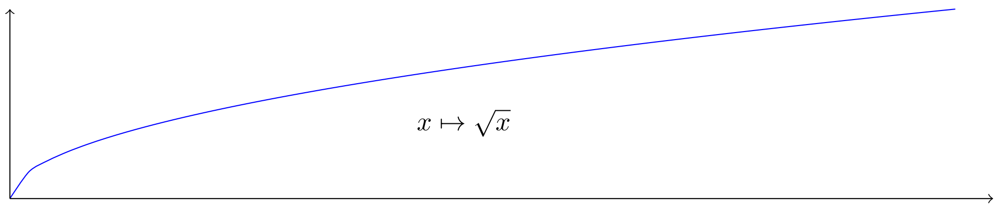
Fonction inverse



Propriété 4.4.

- *La fonction inverse* $f(x) = \frac{1}{x}$ *est définie sur* $]-\infty; 0[$ *et sur* $]0; +\infty[$.
- *Le fonction inverse est strictement décroissante sur* $]-\infty; 0[$ *et est strictement décroissante sur* $]0; +\infty[$.
- *La fonction inverse est dérivable sur* $]-\infty; 0[$ *et sur* $]0; +\infty$.
- *La dérivée de la fonction inverse* $f(x) = \frac{1}{x}$ *est* $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$.

La racine carrée



Propriété 4.5.

- *La fonction racine carrée* $x \mapsto \sqrt{x}$ *est définie sur l'intervalle* $]0; +\infty[$.
- *Pour tout* $x \leq 0$ *:* $\sqrt{x}$ *est le nombre tel que si on l'élève au carré on obtient* x *:*

$$x = (\sqrt{x})^2$$

— *Pour tout* $x_1 \geq 0$ *et* $x_2 \geq 0$*, on a*

$$\sqrt{x_1 \, x_2} = \sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$$

— *La fonction racine carré est strictement croissante sur* $]0;+\infty[$.

— *La fonction racine carré est dérivable sur* $]0;+\infty[$.

— *La dérivée de la fonction racine carrée* $f(x) = \sqrt{x}$ *est* $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Résumé

Propriété 4.6.

f *est dérivable sur :*	$f(x) =$	$f'(x) =$
$\mathbb{R}$	c *(nombre)*	*0*
	x	*1*
	x^2	$2x$
	x^3	$3x^2$
Soit n *un entier naturel* $\mathbb{R}$	x^n	nx^{n-1}
$]-\infty;0[$ *ou* $]0;+\infty[$	$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$
$]-\infty;0[$ *ou* $]0;+\infty[$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{-2}{x^3}$
Soit n *un entier naturel* $]-\infty;0[$ *ou* $]0;+\infty[$	$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$
f *est définie sur* $[0;+\infty[$ f *est dérivable sur* $]0;+\infty[$	$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Exercice 6.

— Activité 2 page 96.

— Exercices 1,2, 4, 7 page 101 (Manipulation de la tangente et de son équation).

— Exercice 9 page 102 (Critère pour déterminer si des droites sont parallèles).

— Activité guidé 91 page 110 (Retrouver une fonction à partir de quelques tangentes).

— Activité guidé 92 page 110 (utilisation du tableur, position relative par rapport à une tangente).

4.3 Opérations sur les fonctions dérivables

Propriété 4.7.

u et v des fonctions définies et dérivables sur I.	*Si $f(x)$ s'écrit*	*alors f est dérivable sur I et $f'(x)$ est égal à*
Somme $u+v$	$f(x)=u(x)+v(x)$	$f'(x)=u'(x)+v'(x)$
Différence $u-v$	$f(x)=u(x)-v(x)$	$f'(x)=u'(x)-v'(x)$
Produit de u par un une constante c $c\,u$	$f(x)=c\,u(x)$	$f'(x)=c\,u'(x)$

En d'autres termes, la dérivée de la somme (ou de la différence) de deux deux fonctions dérivables est tout simplement égale à la somme (resp. la différence) des dérivées. De même, la dérivée d'une fonction multipliée par une constante c est égale à la constante fois la dérivée de la fonction. Formellement, on a

$$\begin{aligned}(u+v)' &= u'+v'\\(u-v)' &= u'-v'\\(c\,u)' &= c\,u'\end{aligned}$$

Exemples.

— $f(x)=x^2+2x+3$: $f'(x)=2x+2$.

— $f(x)=-4x^3+123x^2+678678x$: $f'(x)=-12x^2+246x+678678$.

— $f(x)=\frac{3}{x}+\sqrt{4x}$: On note au préalable que $\sqrt{4x}=\sqrt{4}\sqrt{x}=2\sqrt{x}$, d'où $f'(x)=\frac{-3}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Exercice 7. Exercices 16 à 19 page 102.

Par application successive des résultats précédents, on note que la dérivée d'une somme de plusieurs fonctions est égale à la somme des dérivées de ces dernières :

$$(f_1+f_2+\ldots+f_n)'=f_1'+f_2'+\ldots+f_n'$$

Exercice 8. Quelques exercices de la page 103.
et l'exercice 78 page 106 (position de la courbe par rapport à une tangente).

4.4 Sens de variations et extremums

— Notion de seuil : "durant quelle période le médicament était actif ?"

— Résolution graphique de $f'(t)=0$

— Étudier le signe de $f'(t)$.

— Construire un tableau de variation

— Recherche de min et max.

En revenant à la figure 1, on voit que si la tangente en un point A d'abscisse a est croissante (resp. décroissante), il en va de même pour f au voisinage de A. Or le coefficient directeur de la tangente $T_a(f)$ de $\mathcal{C}_f$ en A est le nombre dérivé $f'(a)$. Ainsi, la droite tangente est croissante (resp. décroissante) si et seulement si $f'(a)>0$ (resp. $f'(a)<0$). Plus concrètement, nous allons voir un exemple.

Exemple. Soit $f:[-3;3]\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x)=x^2+1$$

pour tout x dans l'intervalle $[-3;3]$. La fonction f est dérivable et on a

$$f'(x) = 2x$$

D'autre part, rappelons que l'équation de la tangente en un point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Nous allons déterminer l'équation de la tangente aux points d'abscisse -1 et 2 :

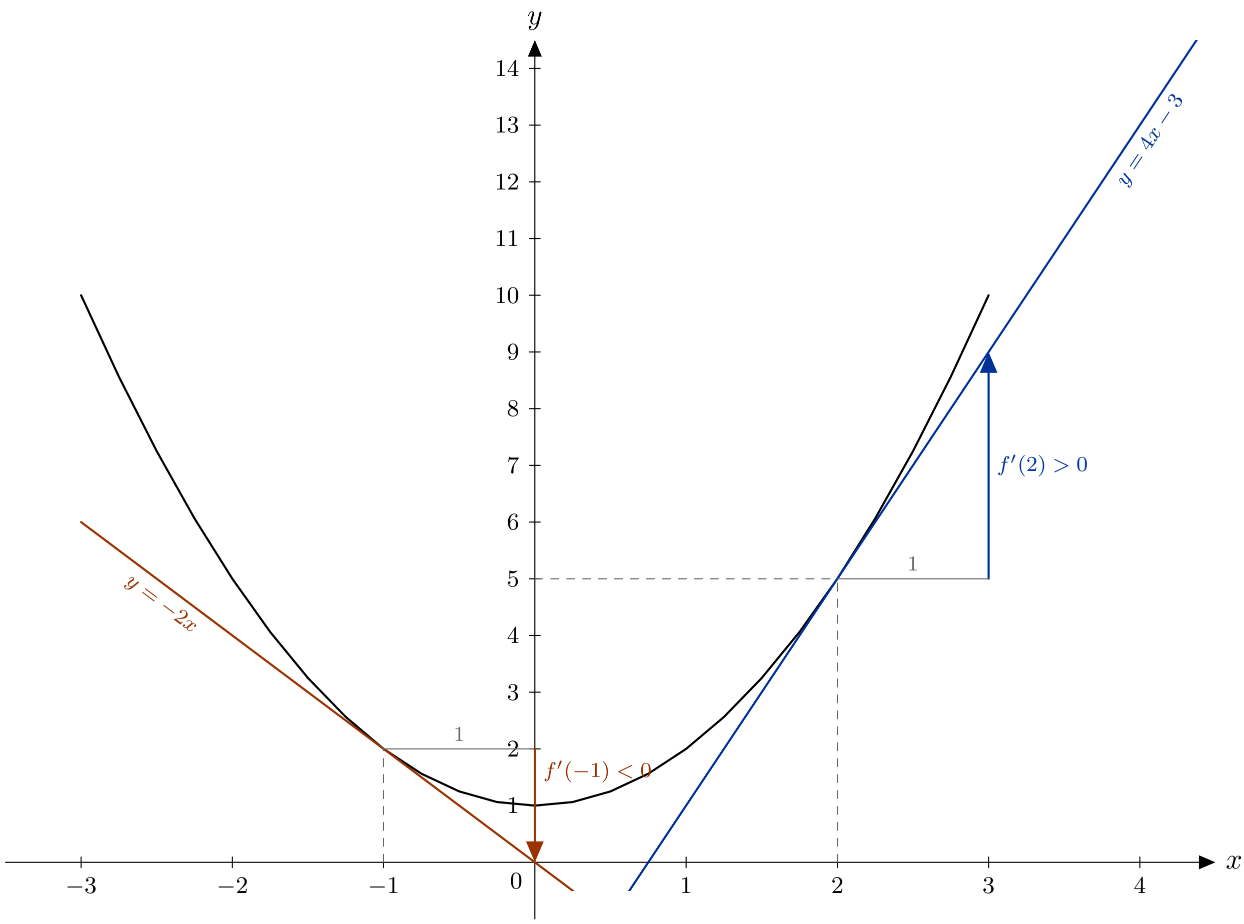
1. En $a = -1$, comme $f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$ et $f'(-1) = 2 \times (-1) = -2$, l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse -1 est

$$\begin{array}{rcl} y & = & -2\Big(x-(-1)\Big)+2 \\ y & = & -2(x+1)+2 \\ y & = & -2x \end{array}$$

2. En $a = 2$, de même, $f(2) = 2^2 + 1 = 5$ et $f'(2) = 2 \times 2 = 4$, l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 2 est

$$\begin{array}{rcl} y & = & 4\Big(x-2\Big)+5 \\ y & = & 4x-3 \end{array}$$

Voici, le graphe de la fonction avec les deux tangentes dont nous venons de déterminer les équations :



Propriété 4.8. *Soit $f : [a;\ b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle $[a;\ b]$,*

1. *f est constante sur I, si et seulement si, la dérivée f' est nulle sur I.*
2. *f est strictement croissante sur I, si et seulement si, la dérivée f' est strictement positive sur I (éventuellement nulle en des points isolés).*
3. *f est strictement décroissante sur I, si et seulement si, la dérivée f' est strictement négative sur I (éventuellement nulle en des points isolés).*

En terme de tableaux de variations les trois propriétés précédentes se présentent de la manière suivante :

1.

x	a	b
$f'(x)$	0	
$f(x)$	$f(a)$ $\longrightarrow$	$f(b)$

2.

x	a	b
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$f(a)$ $\nearrow$	$f(b)$

3.

x	a	b
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$f(a)$ $\searrow$	$f(b)$

Remarque. **Pour étudier les variations d'une fonction, il suffit d'étudier le signe de sa dérivée.**

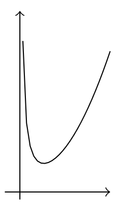
Exemple. Soit $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ définie sur $]0;+\infty[$. Alors $f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$, et

$$\begin{aligned} & f'(x) = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & 2x - \frac{1}{x^2} = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & 2x^3 - 1 = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & x^3 = \frac{1}{2} \\ \Longleftrightarrow \quad & x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{aligned}$$

Ainsi, on déduit le tableau de variation :

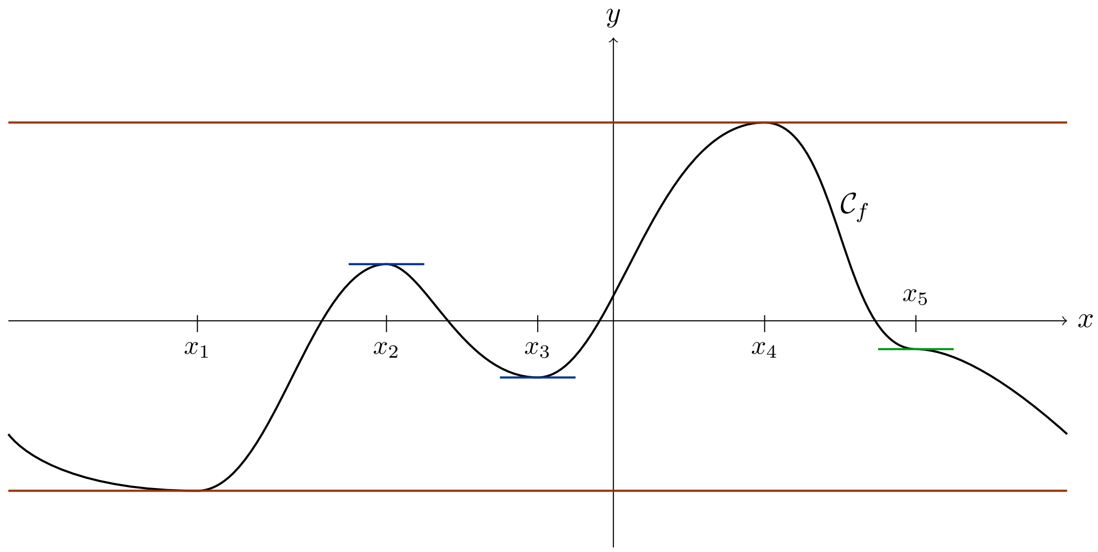
x	0		$1/\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Pour finir, voici le graphe de la fonction f :



4.5 Extremums

Considérons une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I tel que sont graphe soit de la forme suivante :



Définition 4.9. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I. On dit que :

1. le point x_2 est un maximum local si pour tout x proche de x_2, on a $f(x) \leq f(x_0)$.
2. le point x_3 est un minimum local si pour tout x proche de x_3, on a $f(x) \geq f(x_0)$.
3. le point x_4 est un maximum (global) si pour tout x de l'intervalle I, on a $f(x) \leq f(x_0)$.
4. le point x_1 est un minimum (global) si pour tout x de l'intervalle I, on a $f(x) \geq f(x_0)$.

Supposons que $I = [a; b]$. On en déduit du graphe précédent, le tableau de variation de notre fonction f :

$x \in I$	a		x_1		x_2		x_3		x_4		x_5		b
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	
$f(x)$	$f(a)$	$\searrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	$f(x_3)$	$\nearrow$	$f(x_4)$	$\searrow$	$f(x_5)$	$\searrow$	$f(b)$

On notera une relation entre les changements de signes de la dérivée f' et les extremums locaux. Plus précisément,

Propriété 4.10. *Soit x_0 un nombre dans I, distinct des extrémités de I.*

— *Si f a un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.*

— *Si $f'(x_0) = 0$ et f' change de signe en x_0, alors f a un extremum local en x_0.*

Remarque. Si l'on revient au point d'abscisse x_5 dans l'exemple précédent, on note que **la dérivée s'annule mais ne change pas de signe**. Dans ce cas, nous n'avons **pas d'extremum !**

5 Probabilité conditionnelle et indépendance (4s)

- En partant d'une statistique à deux variables, calculer la probabilité d'un événement associé.
- Faire le lien entre $A \cap B$, $A \cup B$, $\bar{A}$ et des phrases courantes.
- On se donne deux événements A et B dans une statistique à deux variables. On tire au hasard un élément de l'étude calculer la probabilité de A sachant B.
  La question peut être posé en toutes lettres ou formulation mathématique $P_B(A)$.
- Conditionnement par un événement de probabilité non nulle. Notation $\mathbb{P}_A(B)$.
- Construire un arbre pondéré en lien avec une situation donnée.
- Calculer la probabilité d'un événement connaissant ses probabilités conditionnelles relatives à une partition de l'univers : formule des probabilités totales.
  Le vocabulaire lié à la formule des probabilités totales n'est pas un attendu du programme, mais la mise en oeuvre de cette formule doit être maitrisée.

5.1 Rappels :

Définition 5.1. Une **expérience aléatoire** est une expérience vérifiant les deux conditions suivantes :

- elle comporte plusieurs issues envisageables.
- on ne peut prévoir l'issue lorsqu'on réalise l'expérience.

On se restreindra aux expériences comportant un nombre fini d'issues.
L'**univers** (noté Ω) de l'expérience aléatoire est l'ensemble des issues de cette expérience.
Un **événement** est un ensemble d'issues de l'expérience aléatoire.
Les **événements élémentaires** sont les événements réduits à une unique issue de l'expérience.

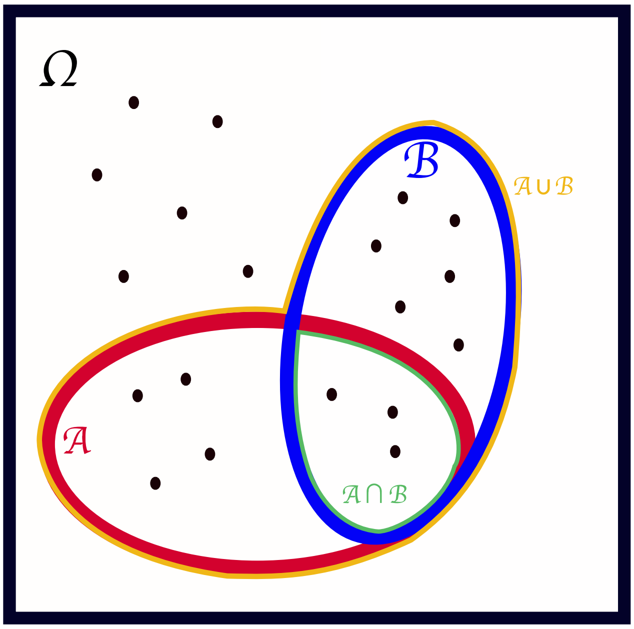
Exemple. Le jet d'un dé, tirage d'un carte dans un jeu de carte, tirage d'une boule dans une urne.

Définition 5.2. On appelle **événement contraire** d'un événement A, l'événement noté $\bar{A}$ qui contient l'ensemble des issues n'appartenant pas A.

Définition 5.3. Soient A et B deux événements d'un expérience aléatoire donnée.

- L'intersection des deux événements A et B est l'événement constitué des issues qui sont dans A et dans B, noté $A \cap B$.
- L'union des deux événements A et B est l'événement constitué des issues de A ou de B (au sens large), noté $A \cup B$.
- On dit que A est inclus dans B, noté $A \subset B$ si toutes les issues de A sont aussi des issues de B.

L'événement $A \cap B$ se réalise lorsque les deux événements à la fois se réalisent.
L'événement $A \cup B$ se réalise lorsqu'au moins un des deux événements se réalise.



Définition 5.4. Dans une expérience aléatoire, deux événements E et E' sont dit **incompatibles** s'ils ne partagent pas d'issue commune (i.e : leur intersection est vide).

Définition 5.5. Une (théorie de) **probabilité** associée à une expérience aléatoire est une application qui à un événement E associe un nombre réel, noté $\mathbb{P}(E)$ telle que :

1. $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$,
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (il se passe certainement quelque chose),
3. Pour tous A et B deux événements incompatibles, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Étant donné un événement E, le nombre $\mathbb{P}(E)$ donne (mesure) les chances de réussite de E. Plus $\mathbb{P}(E)$ est proche de 1, plus l'événement E se réalisera.
La probabilité de l'événement vide $\emptyset$ est nul ($\mathbb{P}(\emptyset) = 0$). Moralement, lorsqu'on réalise une expérience aléatoire, il se passe toujours quelque chose.

Propriété 5.6 (loi des grands nombres)**.** *Lors d'une expérience répétée n fois, les fréquences obtenues d'un événement E de l'expérience se rapprochent de la variable théorique $\mathbb{P}(E)$, la probabilité de l'événement E.*

(illustration avec un tableur)

Propriété 5.7. *Dans une expérience aléatoire, supposons que l'univers Ω se décompose en n issues : $x_1, \ldots, x_n$ (formellement, $\Omega = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Posons $p_i = \mathbb{P}(x_i)$ la probabilité que l'issue x_i se réalise.*

Alors,

$$p_1 + \ldots + p_n = 1$$

La somme des probabilités des issues possibles d'une expérience aléatoire vaut toujours un. Ce fait, peut être utilisé comme un premier test de vraisemblance d'une théorie de probabilité proposé pour étudier une expérience aléatoire !

Définition 5.8. Lorsque, dans une expérience aléatoire, toutes les issues élémentaires ont la même probabilité de se réaliser, on dit que l'expérience est **équiprobable**.

Exemple. Lancé d'un dé équilibré, lancé d'une pièce équilibrée.

Soit A un événement d'une expérience aléatoire, le nombre d'issues que contient A est appelé le cardinal de A et il est noté card(A).

Propriété 5.9. *Lors d'une expérience aléatoire ayant n issues équiprobables :*

— *La probabilité de chaque événement élémentaire est $\frac{1}{n}$.*

— *La probabilité d'un événement A est*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{n} = \frac{\textit{nombre d'issues favorable à } A}{\textit{nombre d'issues possibles}}$$

Propriété 5.10. *La probabilité de l'événement contraire d'un événement A est :*

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

Propriété 5.11. *Soient A et B deux événements. Si $A \subset B$ alors, $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.*

Moralement, la propriété précédente nous dit que plus un événement contient d'issues plus il est probable.

Exemple. On considère l'expérience aléatoire du jet d'un dé. Soit A l'événement "le résultat est un multiple de trois" et B l'événement "le résultat est un nombre pair". On note que $A = \{3, 6\}$ et $B = \{2, 4, 6\}$, ainsi

— l'intersection de A et B est $A \cap B = \{6\}$.

— l'union de A et B est $A \cap B = \{2, 3, 4, 6\}$.

Théorème 5.12. *Si A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire alors :*

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

5.2 Probabilité conditionnelle

Dans l'univers Ω d'une épreuve aléatoire, on considère un événement A de probabilité non nulle ($\mathbb{P}(A) \neq 0$).

Définition 5.13. Pour tout événement B, on appelle **probabilité conditionnelle de B sachant** A le nombre

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Propriété 5.14.

1. *L'égalité précédente permet d'exprimer la probabilité de l'intersection*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}_A(B),$$

2. $0 \leq \mathbb{P}_A(B) \leq 1$,
3. $\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(\bar{B}) = 1$.

Propriété 5.15. *Dans une situation d'équiprobabilité, on a*

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\text{nombre d'issues de } A \cap B}{\text{nombre d'issues de } A}$$

Exemple.

Les élèves d'une classe sont répartis suivant le tableau ci-contre.

	Fille (F)	Garçon (G)	Total
Demi-pensionnaire (D)	12	10	22
Externe (E)	6	8	14
Total	18	18	36

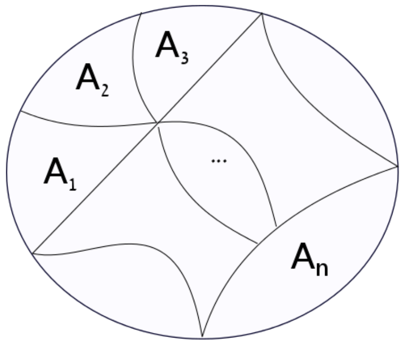
On choisit au hasard un de ces élèves.

La probabilité que l'élève choisi soit une fille est $\mathbb{P}(F) = \frac{18}{36} = 0.5$.

La probabilité que l'élève choisi soit une fille demi-pensionnaire est $\mathbb{P}(D \cap F) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

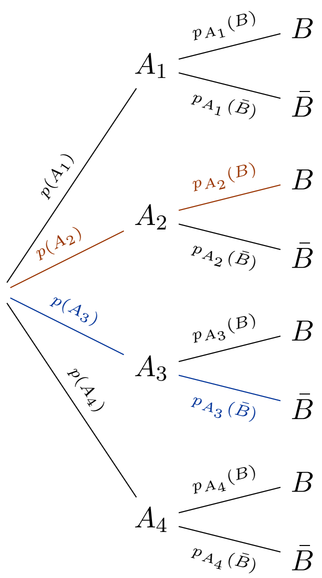
Sachant que l'élève choisi est une fille, la probabilité qu'elle soit demi-pensionnaire est $\mathbb{P}_F(D) = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$. On peut vérifier que l'on a bien $\mathbb{P}_F(D) = \frac{\mathbb{P}(D \cap F)}{\mathbb{P}(F)}$.

Dans l'univers Ω d'une épreuve aléatoire, on considère un événement B et n événements A_1, A_2, $\ldots$, A_n de probabilités non nulles, formant une **partition** de Ω. C'est-à-dire que les événements A_i sont deux à deux incompatibles et leur union est l'univers entier. Graphiquement :



En d'autres termes, une partition A_1, A_2, $\ldots$, A_n est une manière de classer les issues possibles de notre expériences en n catégories d'événements notées A_1 à A_n.

Sur un **arbre pondéré de probabilités** (réalisé ci-desous pour $n = 4$), une **branche** est représentée par un segment (portant une probabilité), un **noeud** est la jonction de deux ou plusieurs branches, et un **chemin** est une succession de branches allant du noeud initial de l'arbre à l'une de ses extrémités. Chaque chemin correspond à l'évènement intersection des événements figurant sur ce chemin (par exemple $A_2 \cap B$ pour le 3^e chemin).

Arbre	Événement	Probabilité
	$A_2 \cap B$	$\mathbb{P}(A_2 \cap B) = \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_2}(B)$
	$A_3 \cap \bar{B}$	$\mathbb{P}(A_3 \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(A_3) \times \mathbb{P}_{A_3}(\bar{B})$

Propriété 5.16. *À partir de là, pour les calculs, on utilise les règles suivantes :*

1. *La* **somme des probabilités** *portées sur les branches issues d'un même noeud est égale à 1.*
2. *La* **probabilité de l'événément correspondant à un chemin** *est le produit des probabilité portées sur ses branches.*
3. *Le* **probabilité d'un événement** *est la somme des probabilités des événements correspondant aux chemins qui y aboutissent.*

Dans l'exemple précédent, avec $n = 4$, la troisième propriété s'écrit ainsi :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(B) + \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_2}(B) + \mathbb{P}(A_3) \times \mathbb{P}_{A_3}(B) + \mathbb{P}(A_4) \times \mathbb{P}_{A_4}(B)$$

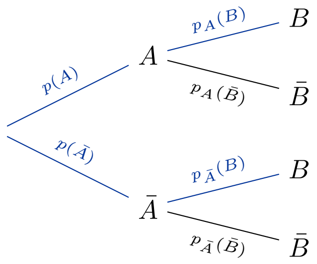
Propriété 5.17 (Formule des probabilités totales, cas $n = 2$)**.** *Soit A et B deux événements, avec A de probabilité non nulle ($\mathbb{P}(a) \neq 0$), alors*

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\bar{A}) \times \mathbb{P}_{\bar{A}}(B)$$

Une illustration avec un arbre pondéré de probabilité :



$A \cap B$ $\qquad$ $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$

$\bar{A} \cap B$ $\qquad$ $\mathbb{P}(\bar{A} \cap B) = \mathbb{P}(\bar{A}) \times \mathbb{P}_{\bar{A}}(B)$

$B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$ $\qquad$ $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$

5.3 Indépendance de deux événements

Exemple. Considérons une urne qui contient 5 boules rouges et 7 boules bleues. On tire une boule, ensuite on remet la boule et on retire encore une fois une boule. Considérons les événements :

— A : "Lors du premier tirage, on tire une boule rouge"

— B : "Lors du second tirage, on tire une boule bleue"

Comme, il y a remise, les deux tirages de boules sont indépendants (le résultat du premier tirage n'a aucune influence sur le second). Ainsi, les événements A et B sont en quelque sorte indépendants. Notons que l'événement $A \cap B$ est le suivant : "on tire en premier une boule rouge et en second une boule bleue". De plus, on a la relation :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{5 \times 7}{12 \times 12} = \frac{5}{12} \times \frac{7}{12} = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

Cette propriété suggère la définition suivante.

Définition 5.18. Dans l'univers Ω d'une expérience aléatoire, on considère des événements A et B. On dit que A et B sont des **événements indépendants** lorsque

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

On dit que deux événements sont dépendants lorqu'ils ne sont pas indépendants.

En supposant que $\mathbb{P}(B) \neq 0$, l'égalité dans la définition précédente équivaut $\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A)$, c'est-à-dire à $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$.

Propriété 5.19. *Lorsque l'événement B est de probabilité non nulle ($\mathbb{P}(B) \neq 0$), les événements A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$.*
En d'autres termes, A et B sont indépendants si et seulement si la probabilité de A sachant B dépend uniquement de l'événement A.

6 Exponentielles et logarithme décimal, application aux inéquations (5s)

— savoir calculer des images pour remplir une table.
— En fonction de a déterminer le sens de variation de $x \mapsto a^x$.
Utiliser le lien avec les suites géométriques.
— Établir le tableau de variation sur un intervalle fermé borné.
— Relation avec des problèmes de la vie courante.
— Notion de seuil.

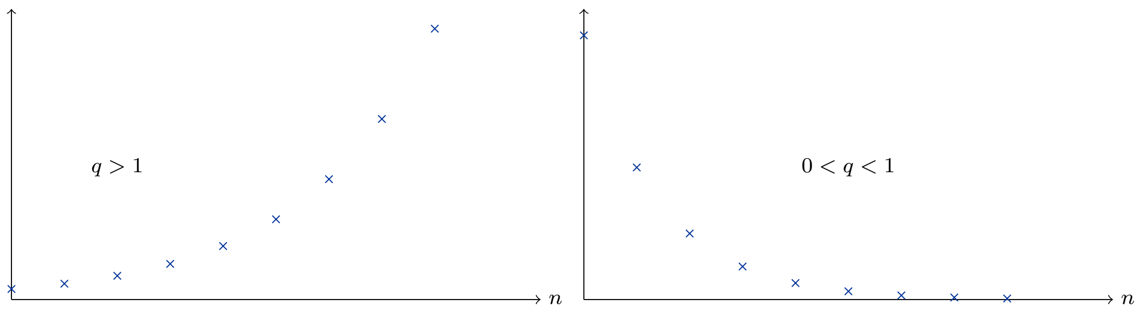
6.1 Fonctions exponentielles de base a

Soit a un nombre réel strictement positif. Soit n un entier naturel, on rappelle que

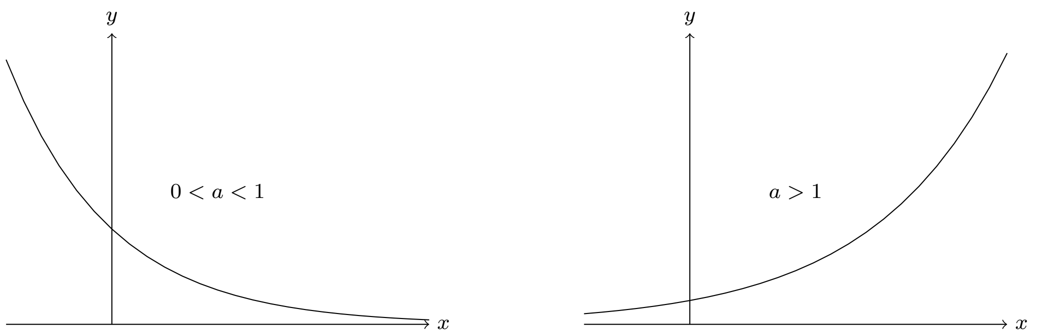
$$a^n = \underbrace{a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois}}$$

Définition 6.1. On admet que pour tout nombre réel x, il existe un nombre réel strictement positif a^x, qui se lit “a exposant x”. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à x, associe a^x, est appelée **exponentielle de base a**.

On rappelle que si (u_n) est une suite géométrique de raison $q > 0$, alors $u_n = u_0\, q^n$. On avait vu que la suite (u_n) est strictement décroissante lorsque $0 < q < 1$ et elle est strictement croissante lorsque $q > 1$.



Propriété 6.2. *On admet que la fonction $x \mapsto a^x$, définie sur $\mathbb{R}$, est :*
- *strictement décroissante lorsque $0 < a < 1$;*
- *strictement croissante lorsque $a > 1$.*



Exemple.

- La fonction $x \mapsto 0.9^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ car $0 < 0.9 < 1$;
- La fonction $x \mapsto 2.4^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car $1 < 2.4$.

Propriété 6.3. *Soit a, b, x et x' des nombres réels tels que a et b soient strictement positifs.*

1. $1^x = 1$;
2. $a^x \times a^{x'} = a^{x+x'}$;
3. $\frac{a^x}{a^{x'}} = a^{x-x'}$;
4. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$;
5. $a^x b^x = (a \times b)^x$;
6. $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$;
7. $(a^x)^{x'} = a^{x \times x'}$.

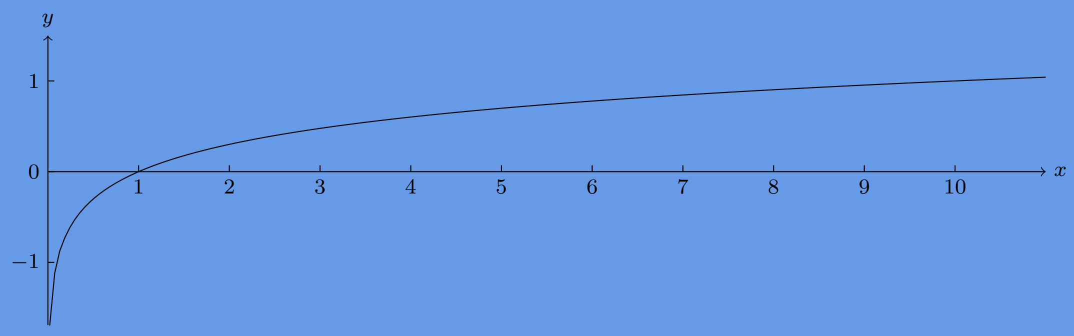
6.2 Fonction logarithme décimal

Définition 6.4. On admet qu'il existe une unique fonction appelée **logarithme décimal**, notée **log**, telle que :

- log est définie sur $]0;\ +\infty[$;
- pour tout nombre réel x, $\log(10^x) = x$.

En particulier, pour $x = 0$ et $x = 1$, on note que $\log(1) = 0$ et $\log(10) = 1$.

Propriété 6.5. *La fonction logarithme* log *est strictement croissante sur* $]0;+\infty[$.



Propriété 6.6. *Soit a et b deux nombres de l'intervalle* $]0;\ +\infty[$. *Alors,*

1. $\log(a) = \log(b)$ *si et seulement si* $a = b$;
2. $\log(a) < \log(b)$ *si et seulement si* $a < b$.

En particuler : $\log(a) = 0$ *équivaut à* $a = 1$

- $\log(a) = 0$ *équivaut à* $a = 1$
- $\log(a) < 0$ *équivaut à* $0 < a < 1$
- $\log(a) > 0$ *équivaut à* $a > 1$

Propriété 6.7. *On admet que pour tout* $a, b > 0$ *et* $x \in \mathbb{R}$, *on a*

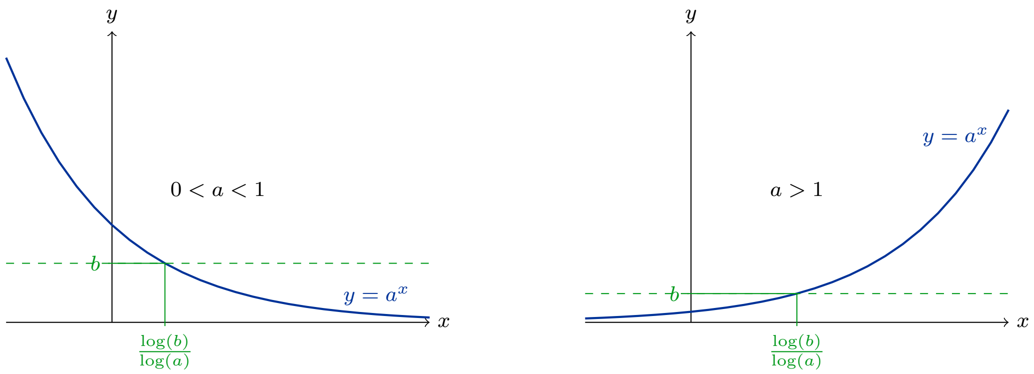
1. $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$; *(le logarithme transforme produit en somme)*
2. $\log(\frac{a}{b}) = \log(a) - \log(b)$; *(le logarithme transforme quotient en différence)*
3. $\log(a^x) = x \times \log(a)$.

En particulier, $\log(10^x) = x$.

6.3 Applications : équations et inéquations

Soit a et b des nombres réels strictement positifs tels que $a \neq 1$.

Propriété 6.8. *L'équation* $a^x = b$, *d'inconnue* x, *a une unique solution dans* $\mathbb{R}$: *le nombre* $\frac{\log(b)}{\log(a)}$.



Propriété 6.9. *L'ensemble des solutions de l'inéquation* $a^x < b$ *est :*

- *dans le cas* $0 < a < 1$, *l'intervalle* $]\frac{\log(b)}{\log(a)};\ +\infty[$;
- *dans le cas* $1 < a$, *l'intervalle* $]-\infty;\ \frac{\log(b)}{\log(a)}[$;

Propriété 6.10. *L'ensemble des solutions de l'inéquation* $a^x > b$ *est :*

- *dans le cas* $0 < a < 1$, *l'intervalle* $]-\infty;\ \frac{\log(b)}{\log(a)}[$;
- *dans le cas* $1 < a$, *l'intervalle* $]\frac{\log(b)}{\log(a)};\ +\infty[$;

7 Exercices

1 - Pourcentages, Proportionnalité

Exercice 1. Calculer les pourcentages suivants :

30% de 141	23% de 1540	2% de 1 000 000
50% de 121	25% de 728	20% de 1205
75% de 272	67 % de 77	500 % de 179

Exercice 2. Complétez le tableau suivant.

Notation en français	fraction	décimal	pour-cent
un millième	1/1000		0.1 %
un centième		0,01	
un dixième	1/10	0,1	
un cinquième	1/5		
un quart		0,25	
un tiers	1/3	0,33...	
une moitié		0,5	
deux tiers	2/3		
trois quarts		0,75	
	9/10		
99 centièmes	99/100		
999 millièmes		0,999	
le tout	1/1	1	
le double	2/1		

Exercice 3. Voici des salaires suivis d'une augmentation ou diminution. Trouver le nouveau salaire après augmentation.

Salaire : 1200 €	Augmentation : 2%	Salaire : 1500 €	Augmentation : 7.8%
Salaire : 5000 €	Diminution : 5.1%	Salaire : 2300 €	Diminution : 4.2%

Exercice 4 (Au départ ?).
Les prix suivants résultent d'une augmentation, ou d'une baisse que l'on donne. Trouver le prix initial.

50 € ; 10%	200 € ; 20%	1234 € ; 5%
73 € ; -12%	456 € ; 200%	10 200 € ; -8.2%

Exercice 5. On a mesuré la quantité de sucre par litre de sang de quatre personnes, une fois par heure, pendant trois heures. On note q_1 et q_2 les quantités correspondantes à chacune de ces semaines. Compléter le tableau suivant en calculant les taux d'évolution de ces quantités (on arrondira les résultats au centième).

	Individu A	Individu B	Individu C	Individu D
Heure 1	1,2	0,9	1,4	1,3
Heure 2	1,3	1,2	1,0	0,8
Taux d'évolution				
Taux d'évolution (en %)				

Exercice 6. Dans un magasin de jeans deux grandes marques, Lessiv et Gazol, sont à vendre dans trois coloris : bleu, noir ou beige. Il y a 80 jeans dans le magasin dont 25 de la marque Gazol.

— 15% de l'ensemble sont des Lessiv noirs.

— 20% des jeans Gazol sont bleus

1. Complétez le tableau suivant :

	bleu	noir	beige	Total toute couleur confondue
Lessiv	25			
Gazol			9	
Total toute marque confondue				80

2. Quelle est la proportion de jeans de la marque Lessiv parmi les jeans noirs ?
3. Quelle est la proportion de jeans bleus parmi les jeans de la marque Gazol ?

Exercice 7 (Comparaison gastronomique)**.**
Un institut de sondage a interrogé un échantillon de personnes en leur demandant quel était leur plat préféré entre les brocolis vapeur et la pizza tartiflette. Le tableau suivant résume les réponses à ce sondage. Il manque cependant la valeur de quelques cases.

	Femmes	Hommes	Totaux
Pizza tartiflette	38		62
Brocolis vapeur	12	43	
Totaux	50	67	

1. Compléter les cases de ce tableaux.
2. Quelle est la proportion d'hommes préférant les brocolis vapeurs ?
3. Quelle est la proportion de femmes préférant les brocolis vapeurs ?
4. Quelle est la proportion de personnes préférant la Pizza tartiflette ?
5. Parmi les femmes, quelle est la proportion de celle préférant la Pizza tartiflette ?

Exercice 8 (Augmentations, diminutions identiques)**.**

1. Un article ménager valait 237 €. Son prix augmente de 2%. Calculer le nouveau prix. Celui-ci augmente à nouveau de 2%. L'augmentation total est-elle de 4% ?
2. Un article a son prix qui baisse de 5%, puis qui augmente de 5%. Est-on revenu au prix initial ?

Exercice 9 (La valse des étiquettes)**.** Le coût d'un objet augmente de 10% le 1er février. Il augmente encore, le 1er octobre, de 20% par rapport à son prix de précédent ; il est alors égal à 792€.

1. Combien coûtait-il avant les deux augmentations ?
2. Quel est le pourcentage de l'augmentation unique ayant le même effet sur le prix de l'objet que les deux augmentations successives précédentes ?
3. Répondre par oui ou non à l'affirmation suivante : "deux augmentations successives de 10% et de 20% peuvent être remplacées par une augmentation unique de 30%."

Exercice 10 (Taux d'évolution entre y_1 et y_2)**.** Dans chacun des cas suivants, calculer l'un des trois nombres y_1, y_2 ou t (le taux d'évolution) connaissant les deux autres. Arrondir éventuellement à 10^{-2}. Indiquer, à chaque fois, s'il s'agit d'une hausse ou d'une baisse.

1. $y_1 = 1,70$, $y_2 = 1,90$;
2. $y_1 = 1,90$, $y_2 = 1,70$;
3. $y_1 = 2,89$, $t = -0,75$;
4. $y_1 = 125$, $t = 0,25$;
5. $y_2 = 202$, $t = 0,15$;
6. $y_2 = 1250$, $t = 0,30$;
7. $y_1 = 2$, $y_2 = 10$;
8. $y_1 = 219$, $y_2 = 20$.

Exercice 11. Dans une classe de Terminale, il y a 87,5% de filles et 23,8% des filles ont 18 ans. Calculer la proportion de la sous-population des filles de 18 ans dans cette classe :

— sous la forme d'un nombre décimal ;

— sous la forme d'un pourcentage.

Exercice 12 (Calculs de taux d'évolutions)**.** Un laboratoire pharmaceutique fabrique un médicament. Le test de contrôle de qualité de ce médicament porte sur deux points : sa masse et sa teneur en potassium.
On s'intéresse à la quantité de médicaments rejetés, c'est-à-dire ceux dont la masse ou la teneur en potassium n'est pas correcte, sur le premier semestre de l'année. Les résultats figurent dans le tableau ci-dessous.

Mois	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin
Quantité de médicaments rejetés	875	870				876
Taux d'évolution mensuel, en pourcentage			+1.2%	-1.1%		+1.9%

Dans tout ce qui suit, on arrondira les taux d'évolution au millième avant de les exprimer en poucentage, et les quantités de médicaments à l'unité.

1. Calculer le taux d'évolution de janvier à février.
2. Déterminer la quantité de médicaments rejetés en mars.
3. Déterminer la quantité de médicaments rejetés en mai.

Exercice 13 (Le laboratoire perd du terrain)**.** Le chiffre d'affaires annuel d'un laboratoire pharmaceutique était en 2010 de 31 680 000 euros et, en 2011, de 28 874 000 euros.

1. Calculer le pourcentage de la baisse du chiffre d'affaires entre 2010 et 2011. Arrondir à 0,01% près.
2. Calculer le pourcentage de la hausse qui ramènerait, en 2012, le chiffre d'affaires au niveau de 2011. Arrondir les coefficients multiplicatifs à 10^{-4}.

Exercice 14 (Sécurité routière)**.** Le tableau suivant donne l'évolution du nombre de tués sur les routes.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Année	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
2	Nombre de tués	7 242	5 731	5 232	5 318	4 709	4 620	4 275	4 273	3 992	3 963
3	Pourcentage d'évolution entre les années consécutives										

1. Dans ce qui suit les coefficients multiplicatifs utilisés seront arrondis à 10^{-4} près. Recopier et compléter les phrases suivantes :
   (a) En neuf ans, de 2002 à 2011 le nombre de tués sur les routes a baissé de ... %
   (b) En 2003, par rapport à 2002, on a observé une chute de ... % du nombre de tués sur les routes.
   (c) En 2009, la diminution du nombre de tués par rapport à 2008 n'a été que de ... %.
   (d) Malgré tout, 3 963 morts cela reste trop important : cela veut dire qu'en moyenne, chaque jour ... personnes décèdent sur la route.
2. Calculer pour chaque année le taux d'évolution depuis l'année précédente.
3. Calculer le taux d'évolution de l'année 2002 à l'année 2011. Exprimer le en terme des taux d'évolutions considérés dans la question précédente.
4. Calculer le taux d'évolution moyen sur les neuf ans.
5. Dans le tableau les cellules C3 à K3 sont en pourcentages. La formule à saisir dans la cellule C3 qui recopiée vers la droite, permet d'afficher le pourcentage d'évolution du nombre de tués entre deux années consécutives est :

a. =($C2 - $B2)/$B2 **b.** =C2 / B2

c. =C2-B2/B2 **d.** =(C2 - B2)/B2

Exercice 15 (Pourcentages et systèmes de deux équations à deux inconnues)**.** Un assuré reçoit un remboursement total de 156,58€accompagné d'un décompte sur lequel deux nombres manquent ; ils ont été remplacés par x et y dans le tableau ci-dessous :

Nature des prestations	Taux Sécurité Sociale	Remboursement Sécurité Sociale	Taux mutuelle	Remboursement mutuelle
Consultation d'un spécialiste	70%	98	25 %	35
Pharmacie	65 %	x	25 %	y

1. Écrire une première équation comportant x et y pour exprimer que le remboursement total est de $156,58$€.
2. (a) Le taux de remboursement des frais de pharmacie par la mutuelle étant de 25%, exprimer en fonction de y le montant total payé à la pharmacie.
   (b) En déduire l'expression de x en fonction de y exprimant que, pour les frais de pharmacie, le taux de remboursement de la Sécurité sociale est de 65%.
3. En résolvant le système constitué de deux équations obtenues au 1. et au 2., déterminer les deux nombres manquants sur le décompte.

2 - Etude simultanée de deux caractères

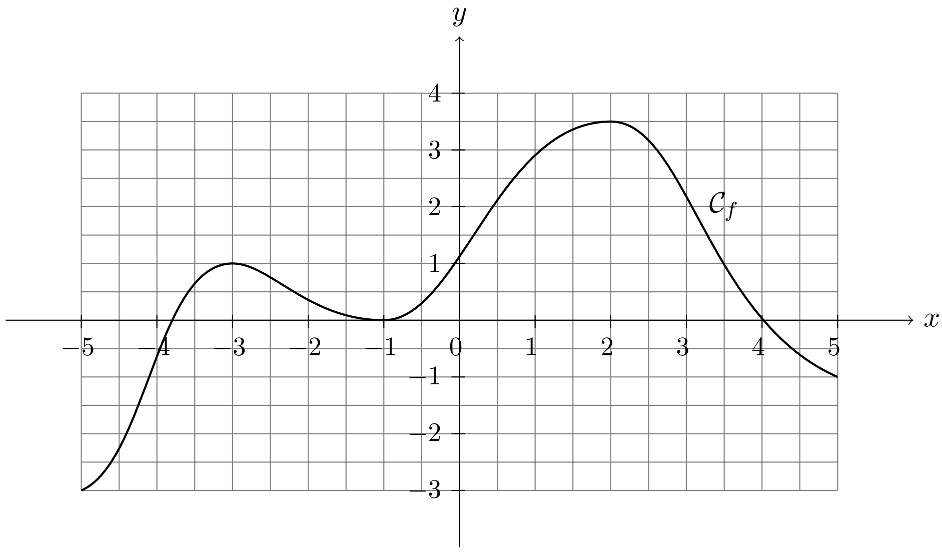
Exercice 1. Suite à une enquête, on a relevé le nombre de légumes différents connus dans une population de 150 personnes.

Nombre de légumes connus	3	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Effectifs	1	3	2	10	7	15	16								
Fréquences	$\frac{1}{150}$							$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{17}{150}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{150}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{75}$

1. Compléter le tableau précédent.
2. Calculer le nombre moyen $\bar{x}$ de légumes connus dans cette population, puis l'écart type σ de la série statistique (les résultats seront arrondis au dixième le plus proche).
3. Calculer les effectifs cumulés croissants puis déterminer le premier quartile Q_1, la médiane M_e et le troisième quartile Q_3 de la série.
4. Construire la courbe cumulative de la série.
5. Construire le diagramme en boîte de la série.

3 - Fonctions

Exercice 1. Voici une représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-5, 5]$:



1. Déterminez graphiquement les valeurs de $f(1)$, $f(-1)$, $f(2)$ et $f(-3)$.
2. Déterminez graphiquement l'image de 1, l'image de 2 et l'image de 5.
3. Résoudre les équations suivantes :
   (a) $f(x) = 2$
   (b) $f(x) = 1.5$
   (c) $f(x) > 0$
   (d) $f(x) < 1$
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
5. Suivant la valeur de x dans $[-5, 5]$, comparer $f(x)$ et $f(-1)$.
6. Suivant la valeur de x dans $[-5, 5]$, comparer $f(x)$ et $f(2)$.
7. Trouver x_1 où f est maximal, c'est-à-dire tel que quel que soit x dans l'intervalle $[-5, 5]$, $f(x) \leq f(x_1)$.