Terminale STMG

O. Lader

Table des matières

Remarques.

1. 1h30 de cours + 30min de TD
2. Toutes les fonctions sont définies sur un intervalle.
3. Il faut une petite maitrise des tableurs...

Progression

- Du 2/09 au 28/09 : Chapitre 1 Information chiffrée (4 semaines)
- Du 30/09 au 11/10 : Chapitre 2 Dérivée (2 semaines)
- Du 14/10 au 18/11 : Chapitre 3 Statistiques à deux variables (3 semaines)
- Du 20/11 au 10/01 : Chapitre 4 Les suites (4 semaines)
- Semaine Bac blanc
- Du 13/01 au 14/02 : Chapitre 5 Probabilité conditionnelle (5 semaines)
- Du 03/03 au 21/03 : Chapitre 6 Application de la dérivation (3 semaines)
- Du 24/03 au 2/05 : Chapitre 7 : Loi normale (3 semaines)
- Du 6/05 au 26/05 : Chapitre 9 : Intervalle de fluctuation. Prise de décision (2 semaines)

1 Information chiffrée (4s)

Définition 1.1. Soit A une partie d'une population E. La **proportion des éléments de A par rapport à E** est

$$p = \frac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } E}$$

Une proportion s'exprime souvent sous forme de pourcentage.
Un pourcentage est une façon d'exprimer un nombre comme une fraction de cent :

$$a\% = a\,\frac{1}{100} \quad \text{où } 0 \leq a \leq 100$$

Exemple. Dans une population de référence constitué de 400 personnes, on suppose que 56 personnes ont une particularité P. La proportion de personnes ayant la particularité P est $\frac{56}{400}$.
Pour exprimer cette **proportion** en un **pourcentage**, on peut procéder comme suit :

$$\frac{56}{400} = \frac{56 \times 100}{400 \times 100} = \frac{56}{4}\,\frac{1}{100} = 14\%$$

On peut retrouver le pourcentage, en complétant le tableau de proportionnalité suivant :

400	100	
56	$100 \times \frac{56}{400} = 14$	$\times \frac{56}{400}$

Le nombre 14 représente le nombre de personnes ayant la particularité P parmi 100 personnes.

Propriété 1.2. *Le pourcentage x d'une population ayant un caractère P donné est égale à la proportion de la population ayant ce caractère multiplié par 100 :*

$$x = \textit{proportion} \times 100 = \frac{\textit{Nombre de personnes ayant le caractère } P}{\textit{taille de la population considérée}} \times 100$$

Exercice 1 (Exercice 60 page 21)**.** On considère l'algorithme suivant :

Variables	n et n' sont des nombres réels
Entrée	Saisir n, n'
Traitement	t prend la valeur $\frac{n'}{n} - 1$
Sortie	Afficher t

Voici les codes pour les calculatrices :

Casio	Texas Instrument
"N":?→N↲ "N' ":?→M↲ M/N-1→T↲ T◢	Prompt N Prompt M M/N-1→T Disp T

L'algorithme calcul le taux d'évolution t de n à n'.

Exercice 2 (Exercice 81 page 23)**.** On considère les taux t_1, t_2 et t_3 et l'algorithme suivant :

t_1, t_2, t_3 sont des nombres entiers

Saisir t_1, t_2 et t_3

t prend la valeur $(1 + t_1) \times (1 + t_2) \times (1 + t_3) - 1$

Si $t > 0$ alors afficher "augmentation"

sinon afficher "diminution"

Fin si

Voici les codes pour les calculatrices :

Casio	Texas Instrument
"A":?→A↲ "B":?→B↲ "C":?→C↲ (1+A)*(1+B)*(1+C)-1→T↲ If T > 0↲ Then "Augmentation"↲ Else "Diminution"↲ IfEnd↲	Prompt A Prompt B Prompt C (1+A)*(1+B)*(1+C)-1→T If T > 0 Disp "Augmentation" Else Disp "Diminution" End

Par commodité, on a renommé t_1, t_2 et t_3 en A, B et C.

1.1 Taux d'évolution

Définition 1.3. Une grandeur évolue d'une valeur initiale y_1 à une valeur finale y_2. Le nombre $t = \frac{y_2 - y_1}{y_1}$ est le **taux d'évolution** de y_1 à y_2.

— Si $t > 0$, on pose $p = t \times 100$, alors $t = p\%$ et on a une augmentation de $p\%$ de y_1 à y_2.

— Si $t < 0$, on pose $p = -t \times 100$, alors $t = -p\%$ et on a une diminution de $p\%$ de y_1 à y_2.

Exemple. La température en un lieu passe de $15^{\circ}C$ à $21^{\circ}C$ pendant la matinée. Le taux d'évolution de la température est $t = 0,4$ et la température augmente de 40%.

Propriété 1.4. *Faire évoluer une quantité d'un taux t revient à la multiplier par $1 + t$.*

Exemple. Le prix d'un produit, égal à 12€, augmente de 3%.
Le taux d'augmentation est égal à 0.03 et le coefficient multiplicateur est égal à $1 + 0,03$. Le prix après augmentation est alors 12×1.03€.

1.2 indices

La notion d'indice permet de manipuler plus facilement les taux d'évolution.

Définition 1.5. Soient y_1 et y_2 deux valeurs d'une même grandeur.
L'**indice base 100** de y_1 à y_2 est

$$\text{Indice} = \frac{y_2}{y_1} \times 100$$

Propriété 1.6. *On a*

$$\frac{\textit{indice base 100}}{100} = \frac{y_2}{y_1}$$

C'est-à-dire, 100 *et l'indice base 100 sont respectivement proportionnelles à y_1 et y_2 :*

y_1	y_2
100	*Indice base 100*

Exemple. Le taux de natalité en France pour 1000 habitants était de 18.70 en 1960 et de 12.83 en 2010. L'indice en base 10 du taux de natalité en 2010 est $100 \times \frac{12.83}{18.70} \sim 68.6$.

Propriété 1.7. *Les quantités y_1, y_2 et 100, I_2 (l'indice base 100) ont le même taux d'évolution. De plus,*

$$\textit{indice} = (\textit{taux d'évolution} + 1) \times 100$$

et

$$\textit{taux d'évolution} = \frac{\textit{indice}}{100} - 1$$

1.3 Racine n -ème d'un réel positif

Rappelons que la racine carrée d'un nombre réel positif a est l'unique nombre réel positif a tel que $x^2 = a$ et on le note $\sqrt{a}$. Nous allons généraliser l'équation $x^2 = a$ à des exposants quelconques.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à deux et a un réel positif. Tracer la courbe représentative la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^n$. Tracer la droite d'équation $y = a$. Que peut-on constater ?

Définition 1.8. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à deux et a un réel positif. La **racine n-ème** du réel a est le réel positif x tel que $x^n = a$. On note ce réel $a^{\frac{1}{n}}$ ou $\sqrt[n]{a}$.

Exemples.
- $4^{\frac{1}{2}} = 2 = \sqrt{2}$ car $2^2 = 4$.
- $64^{\frac{1}{3}} = 4$ car $4^3 = 64$.
- $35^{1/5} \simeq 2,036$ (calculatrice...)

1.4 Taux d'évolution global et moyen

On considère des nombres réels strictement positifs y_0, y_1, y_2, ..., y_n et les n évolutions faisant passer successivement de y_0 à y_1, de y_1 à y_2, ..., de y_{n-1} à y_n. On désigne par t_1, t_2, ..., t_n les taux d'évolutions respectifs de ces n évolutions successives.

Définition 1.9. On appelle **taux d'évolution global** ou (**taux global**) des n évolutions successives, le taux d'évolution T de y_0 à y_n :

$$\begin{tikzcd} \boxed{y_0} \arrow[r, bend right, "\times(1+t_1)"'] \arrow[rrrrr, bend left, "\times(1+T)"] & \boxed{y_1} \arrow[r, bend right, "\times(1+t_2)"'] & \boxed{y_2} & \cdots & \boxed{y_{n-1}} \arrow[r, bend right, "\times(1+t_n)"'] & \boxed{y_n} \end{tikzcd}$$

Ainsi, le coefficient multiplicateur de y_0 à y_n est $1 + T = (1 + t_1) \times (1 + t_2) \times \ldots \times (1 + t_n)$.

Définition 1.10. On appelle **taux d'évolution moyen** (ou **taux moyen**) des n évolutions successives, le nombre t_M tel que n évolutions successives de même taux t_M, partant de y_0, aboutissent au même nombre y_n que les n évolutions précédentes :

$$\begin{tikzcd}
\boxed{y_0} \arrow[r, bend right, "\times(1+t_M)"'] \arrow[rrrr, bend left, "\times(1+T)"] & \boxed{y_1} \arrow[r, bend right, "\times(1+t_M)"'] & \boxed{y_2} & \cdots & \boxed{y_{n-1}} \arrow[r, bend right, "\times(1+t_M)"'] & \boxed{y_n}
\end{tikzcd}$$

Ainsi, $(1+t_M)^n = 1+T$, d'où

Propriété 1.11. *Le taux moyen de n évolutions successives de taux global T, est le nombre t_M tel que $1+t_M$ est la racine n-ème de $1+T$, d'où :*

$$t_M = (1+T)^{\frac{1}{n}} - 1$$

Remarque. Le nombre $1+t_M$ est la moyenne géométrique des nombres $1+t_1, \ldots, 1+t_n$.

Exemple. L'effectif d'un lycée a augmenté de 25% en 7 ans.
Son taux d' évolution annuel moyen t_M durant cette période est donc tel que $1+t_M$ est la racine septième de $1+25\%$, c'est-à-dire :

$$1+t_M = (1+0.25)^{1/7}$$

La calculatrice nous donne :

$$t_M \sim 0,0324$$

(à 10^{-4} près). Le taux d'évolution annuel moyen de l'effectif du lycée durant ces sept ans est environ $3,24\%$ (l'effectif a augmenté en moyenne d'environ 3,24% par an).

2 Dérivation (2s)

Propriété 2.1.

f est dérivable sur :	$f(x) =$	$f'(x) =$
$\mathbb{R}$	*c (constante)*	*0*
	x	*1*
	x^2	$2x$
	x^3	$3x^2$
Soit n un entier relatif $\mathbb{R}$ *ou* $]-\infty;0[$ *ou* $]0;+\infty[$	x^n	nx^{n-1}

Propriété 2.2.

u et v des fonctions définies et dérivables sur I.	*Si $f(x)$ s'écrit*	*alors f est dérivable sur I et $f'(x)$ est égal à*
Somme $u+v$	$f(x) = u(x) + v(x)$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
Différence $u-v$	$f(x) = u(x) - v(x)$	$f'(x) = u'(x) - v'(x)$
Produit de u par un une constante c $c\,u$	$f(x) = c\,u(x)$	$f'(x) = c\,u'(x)$

En d'autres termes, la dérivée de la somme (ou de la différence) de deux deux fonctions dérivables est tout simplement égale la somme (resp. la différence) des dérivées. De même, la dérivée d'une fonction multipliée par une constante c est égale à la constante fois la dérivée de la fonction fois la constante. Formellement, on a

$$\begin{aligned}(u+v)' &= u'+v' \\ (u-v)' &= u'-v' \\ (c\,u)' &= c\,u'\end{aligned}$$

Propriété 2.3. *La fonction inverse f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ a pour dérivée :*

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$$

Attention, l'inverse du nombre zéro n'existe pas. D'où, le domaine de définition de la fonction inverse est $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

Propriété 2.4. *Soient u, v deux fonctions, le quotient $\frac{u}{v}$ définie par $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ a pour dérivée :*

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Plus formellement, on a

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

3 Statistiques à deux variables (3s)

3.1 Statistiques à une variables (rappels)

Définition 3.1. Soit (x_i, n_i) une série statistique. On définit les **effectifs cumulés** (et les fréquences cumulées) de la manière suivante :

X	x_1	x_2	x_3	...	x_k	Total
Effectifs	n_1	n_2	n_3	...	n_k	N = Effectif total
Effectifs cumulés	n_1	$n_1 + n_2$	$n_1 + n_2 + n_3$	...	$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = N$	
Fréquences	f_1	f_2	f_3	...	f_k	1
Fréquences cumulés	f_1	$f_1 + f_2$	$f_1 + f_2 + f_3$	...	$f_1 + f_2 + \ldots + f_k = 1$	

Définition 3.2. Soit (x_i, n_i) une série statistique.

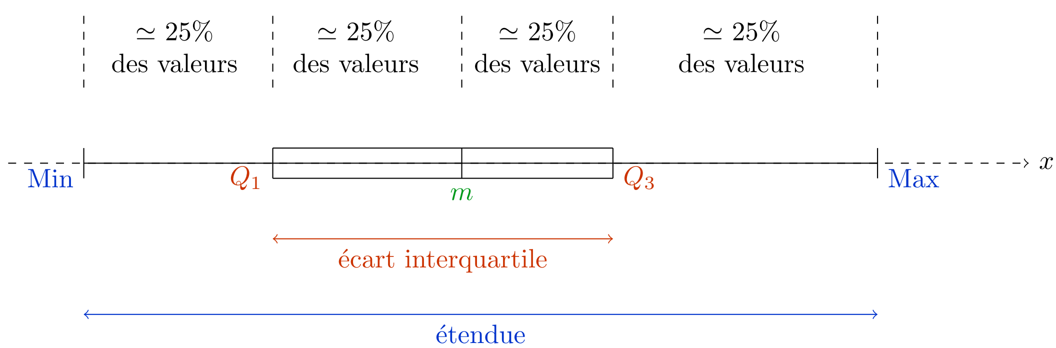
— La **médiane** m est un nombre qui permet de couper l'ensemble des valeurs en deux parties égales : mettant d'un côté une moitié de l'effectif où les valeurs prisent sont inférieurs ou égales à m et de l'autre côté l'autre moitié de l'effectif où les valeurs prisent sont supérieurs ou égales à m.
(La médiane n'est pas unique, pour résoudre le problème lorsque n est impair, on prend le milieu).

— On note Q_1 le **premier quartile**, la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 25% des valeurs lui soient inférieures ou égales.
On note Q_3 le **troisième quartile**, la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 75% des valeurs lui soient inférieures ou égales.

— Le différence entre le troisième quartile et le premier quartile $Q_3 - Q_1$ est appelée **écart interquartile**. C'est un critère de dispersion de la série.

— La différence entre le maximum et le minimum Max - Min est appelée **l'étendue** de la série statistique.

Diagramme en boîte :



Définition 3.3. On note $\bar{x}$ la **moyenne** de la série statistique :

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{N}(n_1x_1 + \ldots + n_mx_m) \\ &= f_1\,x_1 + \ldots + f_m\,x_m\end{aligned}$$

Définition 3.4. L'**écart type** de la série statistique est obtenu à l'aide de la calculatrice.

3.2 Statistiques à deux variables

Définition 3.5. L'ensemble des N couples $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, ..., $(x_N; y_N)$, où x_1 et y_1, x_2 et y_2, ..., x_N et y_N sont les valeurs observées de x et de y, est appelé **série statistique à deux variables** x et y (ou **série statistique double**).

Définition 3.6. Le nuage de points de cette série statistique double est l'ensemble des N points du plan, de coordonnées $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $\ldots (x_N, y_N)$.

La forme du nuage de points peut suggérer le tracé d'une courbe usuelle simple ajustant au plus près tous les points de ce nuage. Cette courbe approchant le nuage de point suggère une relation de la forme $y = f(x)$ entre les abscisses et les ordonnées des points.

Définition 3.7. Lorsque les points du nuage de la série statistique à deux variables sont approximativement alignés, la courbe d'ajustement est une **droite d'ajustement**, dont l'équation est de la forme $y = ax + b$.
La fonction affine f définie par $f(x) = ax + b$, est l'**ajustement affine** de la série statistique.

Pour trouver dans ce cas, la droite affine d'ajustement, on la devine ou on utilise la calculatrice.

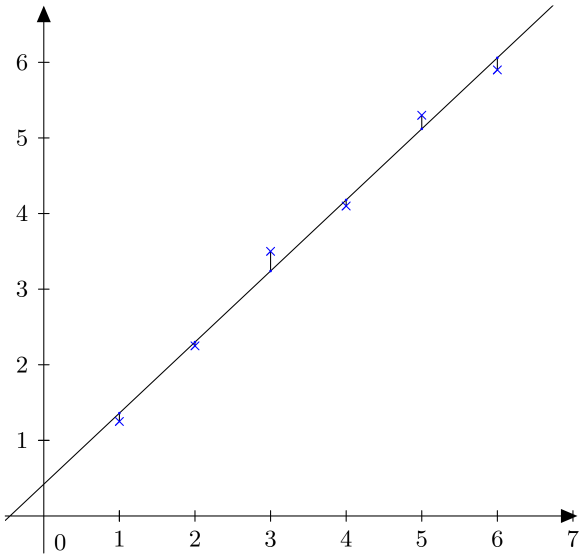
Propriété 3.8. *La calculatrice (ou le tableur) pour un ajustement affine utilise la méthode des moindres carrés. Cette méthode consiste à déterminer la droite d'ajustement Δ tel que la somme $l_1^2 + \ldots + l_N^2$ des carrés de toutes les longueurs représentées en rouge sur la figure soit minimale.*

Exemple. Considérons le série statistique double :

x	1	2	3	4	5	6
y	1,25	2,25	3,5	4,1	5,3	5,9

Avec la calculatrice, on obtient la droite d'ajustement d'équation

$$y = 0,94x + 0,42$$



4 Suites arithmétiques et géométriques (4s)

- Rappels sur la notion de suite
- Donner u_n en fonction de n.
- Sens de variations
- Notion de seuil. Pour le calcul, utiliser une table
- Rappeler la notion de taux d'évolution, de pourcentage d'évolution, pourcentage d'augmentation.
- Relation entre suite géométrique et application successive d'un "taux d'évolution".
- Somme des premiers termes.
  Calculer avec une calculatrice ou le tableur la somme de n termes consécutifs (ou des n premiers termes) d'une suite arithmétique ou géométrique.
- Comparaison de suites.

Définition 4.1. Une **suite de nombres réels** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou (u_n)) est la donnée pour tout entier naturel n d'un nombre réel noté u_n. Un dit que u_n est le n-ème terme de la suite (u_n).

Exemples.
- $(u_n) = (0, 1, 2, 3, 4, \ldots)$, c'est-à-dire pour tout n : $u_n = n$.
- $(u_n) = (0, 2, 4, 6, 8, \ldots)$, c'est-à-dire pour tout n : $u_n = 2n$.
- $(u_n) = (0, 1, 4, 9, 25, 36, \ldots)$, c'est-à-dire pour tout n : $u_n = n^2$.
- $(u_n) = (1, 5, 25, 125, \ldots)$, c'est-à-dire pour tout n : $u_n = 5^n$.

4.1 Rappels

On peut aussi définir une suite par récurrence, par exemple :

- une suite arithmétique : $\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= u_n + 2 \end{cases}$
- une suite géométrique : $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= 5u_n \end{cases}$

Définition 4.2. Une **suite arithmétique** de terme initial u_0 et de raison r est la suite définie de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$$

Propriété 4.3. *Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de terme initiale u_0, alors son n-ème terme est $u_n = r\,n + u_0$.*

Exemple. Soit (u_n) la suite arithmétique de raison -1.3 et de terme initial $u_0 = 2$. Alors
- $u_1 = u_0 - 1.3 = 0.7$,
- $u_{10} = -1.3 \times 10 + 2 = -11$,

— $u_n = -1.3n + 2$.

Définition 4.4. Une **suite géométrique** de terme initial u_0 et de raison q est la suite définie de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = qu_n \end{cases}$$

Propriété 4.5. *Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de terme initiale u_0, alors son n-ème terme est $u_n = q^n u_0$.*

Exemple. Soit (u_n) la suite géométrique de raison 4 et de terme initial $u_0 = 5$. Alors

— $u_1 = 4u_0 = 20$,

— $u_6 = 4^6 \times 5 = 20480$,

— $u_n = 4^n \times 5$.

4.2 Sens de variation

Propriété 4.6. *Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de terme initial u_0. Notons que pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n$ est égale à la raison r.*

1. *Si $r > 0$, alors pour tout n : $u_n < u_{n+1}$ et la suite est strictement croissante.*
2. *Si $r = 0$, alors pour tout n : $u_n = u_{n+1} = u_{n+2} = \dots$ et la suite est constante.*
3. *Si $r < 0$, alors pour tout n : $u_n > u_{n+1}$ et la suite est strictement décroissante.*

Si une suite (u_n) est croissante alors pour tout $n < p$, on a $u_n \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \dots \leq u_{p-1} \leq u_p$. De même, si une suite (u_n) est décroissante alors pour tout $n < p$, on a $u_n \geq u_p$.

Propriété 4.7. *Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de terme initial u_0. Notons que pour tout entier n, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est égale à la raison q.*

1. *Si $q > 1$, alors pour tout n : $u_n < u_{n+1}$ et la suite est strictement croissante.*
2. *Si $q = 1$, alors pour tout n : $u_n = u_{n+1} = u_{n+2} = \dots$ et la suite est constante.*
3. *Si $q < 1$, alors pour tout n : $u_n > u_{n+1}$ et la suite est strictement décroissante.*

Exercice 3. Quelques un parmi 1 à 37 pages 20-22.

4.3 Somme de termes consécutifs

Propriété 4.8. *Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de terme initial u_0. Rappelons que pour tout entier n, $u_n = r\,n + u_0$. Alors*

1. *Soit S la somme $u_k + u_{k+1} + \ldots + u_p$ des termes consécutifs de la suite (u_n) de u_k à u_p, alors :*

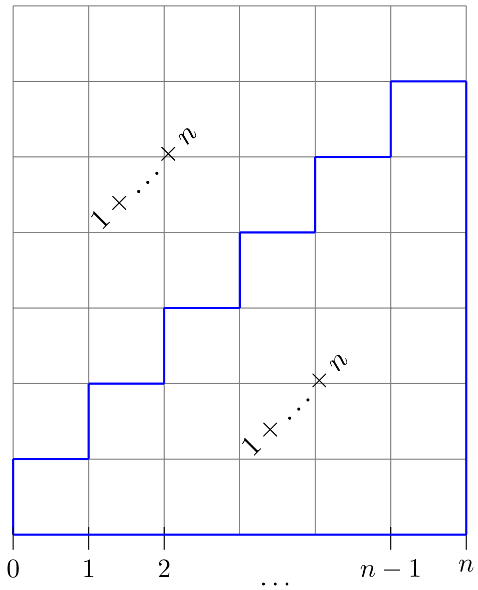
$$\begin{aligned} S &= u_k + u_{k+1} + \ldots + u_p \\ &= (\textit{nombre de termes de } S)\,\frac{(\textit{premier terme de } S) + (\textit{dernier terme de } S)}{2} \\ &= (p-k+1)\frac{u_k+u_p}{2} \end{aligned}$$

2. *En particulier,*

$$\underbrace{u_1 + \ldots + u_n}_{n \textit{ termes}} = n\frac{u_1+u_n}{2}$$

Démonstration. 1. AG3 page 29

2. Un petit dessin :



Le rectangle est de hauteur $n+1$ et de largeur n.

□

Exemple. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n$. Cette suite est arithmétique de raison 1 et d'après la propriété précédente, on a

$$1 + 2 + \ldots + n = u_0 + \ldots + u_n = \frac{(n+1)n}{2}$$

Propriété 4.9. *Soit (u_n) une suite géométrique de raison r et de terme initial u_0. Rappelons que pour tout entier n, $u_n = q^n\,u_0$. Alors*

1. *Soit S la somme $u_k + u_{k+1} + \ldots + u_p$ des termes consécutifs de la suite (u_n) de u_k à u_p, alors :*

$$\begin{aligned} S &= u_k + u_{k+1} + \ldots + u_p \\ &= (\textit{premier terme de } S) \times \frac{q^{\textit{nombre de termes de } S} - 1}{q-1} \\ &= u_k \times \frac{q^{p-k+1}-1}{q-1} \end{aligned}$$

2. *En particulier,*

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

Démonstration. ... □

exercice 71 page 34.

Propriété 4.10.

1. *Si une quantité* **augmente** *régulièrement de a% (par exemple tous les ans ou tous les mois). Si on note u_n la quantité après la n-ème évolution. Alors (u_n) est une suite géométrique de raison $1 + \frac{a}{100}$.*
2. *Si une quantité* **diminue** *régulièrement de a% et on note u_n la quantité après la n-ème évolution. Alors (u_n) est une suite géométrique de raison $1 - \frac{a}{100}$.*

4.4 Somme des termes à l'aide de la calculatrice

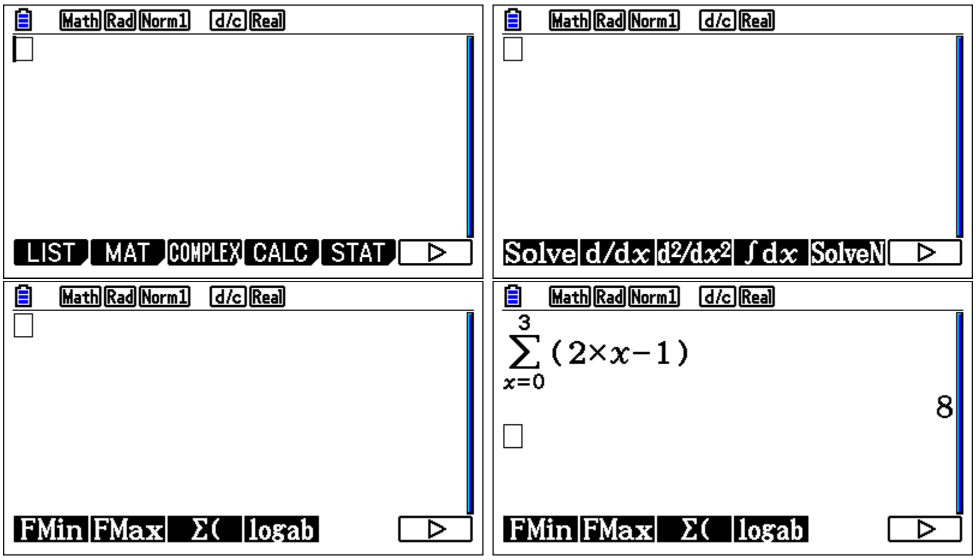
Exercice 4. Soit (u_n) la suite arithmétique de raison 3 et de terme initial $u_0 = -1$.

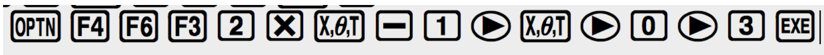
1. Justifier que $u_n = 2n - 1$.
2. Calculer $S = u_0 + u_1 + u_2 + u_3$.
3. Avec votre calculatrice tapez la formule suivante :

   a) Avec Casio, dans l'application **RUN-MAT**, tapez :

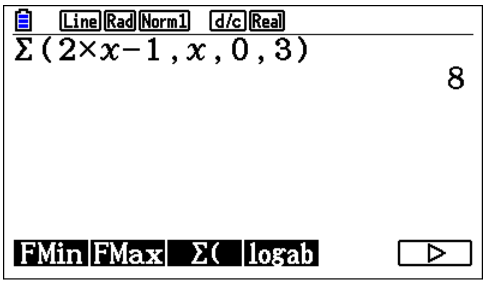
$$\sum_{X=0}^{3} 2 \times X - 1$$

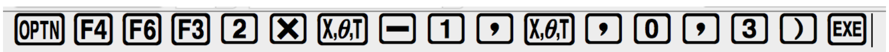
pour trouver le commande $\sum$, il faut taper sur la touche option : (optn), puis sur [CALC] puis chercher [$\sum$(], plus précisément voici quelques captures d'écran :





Remarque : Sur les modèles plus ancien, il faut taper la formule suivante :

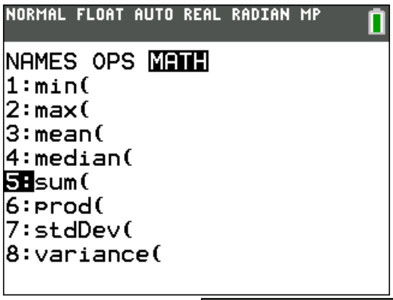


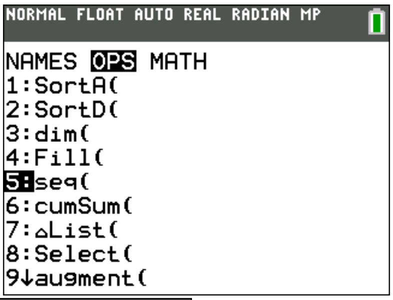


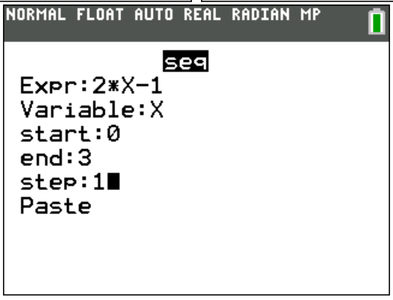
   b) Avec TI, tapez la formule suivante :

sum(seq(2*X-1,X,0,3,1)) ou somme(suite(2*X-1,X,0,3,1))

Pour se faire, tapez (2ND) + (LIST) pour obtenir les écrans suivants :







Après avoir rempli le formulaire comme sur la troisième capture d'écran, allez sur "Paste" et tapez (entrer).
Il peut être intéressant de retenir qu'avec une calculatrice TI, le terme **"séquence"** correspond au terme "suite" et que les premiers éléments, qu'on compte additionner, il est raisonnable de les mettre sous forme de **liste**.

Exercice 5 (Compléter un algorithme).

Variables U, R et S sont des nombres réels
Entrée Saisir U et R
Initialisation S prend la valeur 0
Traitement
  Pour I allant de 0 à 5
    S prend la valeur S + U
    U prend la valeur U + R
  Fin Pour
Sortie Afficher S

1. Programmer cet algorithme sur une calculatrice ou un logiciel.

Exercice 6 (Compléter un algorithme).

Variables U, Q et S sont des nombres réels
Entrée Saisir U et Q
Initialisation S prend la valeur 0
Traitement
  Pour I allant de 0 à 5
    S prend la valeur ...
    U prend la valeur ...
  Fin Pour
Sortie Afficher S

1. On considère une suite géométrique (u_n) dont le premier terme u_0 est saisi dans la variable U et

dont la raison est saisie dans la variable Q. Compléter l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche la somme $u_0 + \ldots + u_5$.

2. Programmer cet algorithme sur une calculatrice ou un logiciel.

Solutions :

1. ...

2.

Casio	Texas Instrument
"U":?→U↲ "R":?→R↲ 0→S↲ For 0→I to 10↲ S+U→S↲ U+R→U↲ Next S◢	Prompt U Prompt R 0→S For(I,0,10) S+U→S U+R→U End Disp S

3.

Casio	Texas Instrument
"U":?→U↲ "Q":?→Q↲ 0→S↲ For 0→I to 5↲ S+U→S↲ U×Q→U↲ Next S◢	Prompt U Prompt Q 0→S For(I,0,5) S+U→S U×Q→U End Disp S

5 Probabilité conditionnelle (5s)

— Conditionnement par un événement de probabilité non nulle. Notation $\mathbb{P}_A(B)$.

— Construire un arbre pondéré en lien avec une situation donnée.

— Calculer la probabilité d'un événement connaissant ses probabilités conditionnelles relatives à une partition de l'univers : formule des probabilités totales.
Le vocabulaire lié à la formule des probabilités totales n'est pas un attendu du programme, mais la mise en oeuvre de cette formule doit être maitrisée.

5.1 Rappels :

Définition 5.1. Une **expérience aléatoire** est une expérience vérifiant les deux conditions suivantes :

— elle comporte plusieurs issues envisageables.

— on ne peut prévoir l'issue lorsqu'on réalise l'expérience.

On se restreindra aux expériences comportant un nombre fini d'issues.
L'**univers** (noté Ω) de l'expérience aléatoire est l'ensemble des issues de cette expérience.
Un **événement** est un ensemble d'issues de l'expérience aléatoire.
Les **événements élémentaires** sont les événements réduits à une unique issue de l'expérience.

Exemple. Le jet d'un dé, tirage d'un carte dans un jeu de carte, tirage d'une boule dans une urne.

Définition 5.2. On appelle **événement contraire** d'un événement A, l'événement noté $\bar{A}$ qui contient l'ensemble des issues n'appartenant pas A.

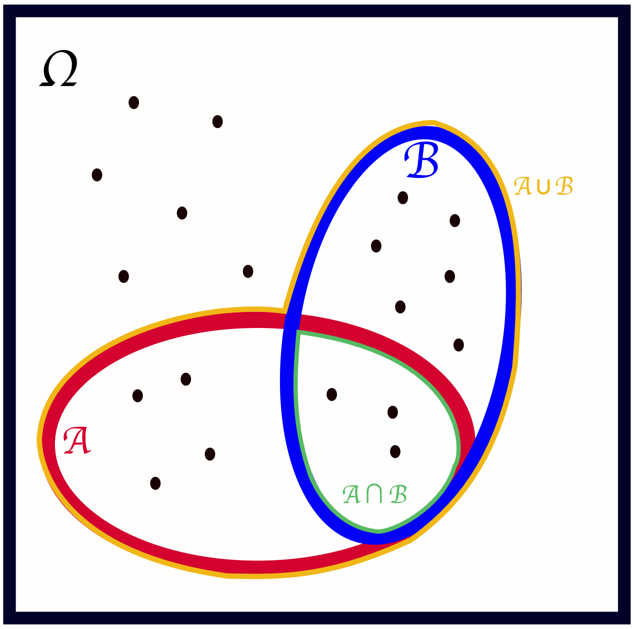
Définition 5.3. Soient A et B deux événements d'un expérience aléatoire donnée.

— L'intersection des deux événements A et B est l'événement constitué des issues qui sont dans A et dans B, noté $A \cap B$.

— L'union des deux événements A et B est l'événement constitué des issues de A ou de B (au sens large), noté $A \cup B$.

— On dit que A est inclus dans B, noté $A \subset B$ si toutes les issues de A sont aussi des issues de B.

L'événement $A \cap B$ se réalise lorsque les deux événements à la fois se réalisent.
L'événement $A \cup B$ se réalise lorsqu'au moins un des deux événements se réalise.



Définition 5.4. Dans une expérience aléatoire, deux événements E et E' sont dit **incompatibles** s'ils ne partagent pas d'issue commune (i.e : leur intersection est vide).

Définition 5.5. Une (théorie de) **probabilité** associée à une expérience aléatoire est une application qui à un événement E associe un nombre réel, noté $\mathbb{P}(E)$ telle que :

1. $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$,
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (il se passe certainement quelque chose),
3. Pour tous A et B deux événements incompatibles, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Étant donné un événement E, le nombre $\mathbb{P}(E)$ donne (mesure) les chances de réussite de E. Plus $\mathbb{P}(E)$ est proche de 1, plus l'événement E se réalisera.
La probabilité de l'événement vide $\emptyset$ est nul ($\mathbb{P}(\emptyset) = 0$). Moralement, lorsqu'on réalise une expérience aléatoire, il se passe toujours quelque chose.

Propriété 5.6 (loi des grands nombres)**.** *Lors d'une expérience répétée n fois, les fréquences obtenues d'un événement E de l'expérience se rapprochent de la variable théorique $\mathbb{P}(E)$, la probabilité de l'événement E.*

(illustration avec un tableur)

Propriété 5.7. *Dans une expérience aléatoire, supposons que l'univers Ω se décompose en n issues : $x_1, \ldots, x_n$ (formellement, $\Omega = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Posons $p_i = \mathbb{P}(x_i)$ la probabilité que l'issue x_i se réalise.*

Alors,

$$p_1 + \ldots + p_n = 1$$

La somme des probabilités des issues possibles d'une expérience aléatoire vaut toujours un. Ce fait, peut être utilisé comme un premier test de vraisemblance d'une théorie de probabilité proposé pour étudier une expérience aléatoire !

Définition 5.8. Lorsque, dans une expérience aléatoire, toutes les issues élémentaires ont la même probabilité de se réaliser, on dit que l'expérience est **équiprobable**.

Exemple. Lancé d'un dé équilibré, lancé d'une pièce équilibrée.

Soit A un événement d'une expérience aléatoire, le nombre d'issues que contient A est appelé le cardinal de A et il est noté $\text{card}(A)$.

Propriété 5.9. *Lors d'une expérience aléatoire ayant n issues équiprobables :*

— *La probabilité de chaque événement élémentaire est* $\frac{1}{n}$.

— *La probabilité d'un événement A est*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{n} = \frac{\textit{nombre d'issues favorables à } A}{\textit{nombre d'issues possibles}}$$

Propriété 5.10. *La probabilité de l'événement contraire d'un événement A est :*

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

Propriété 5.11. *Soient A et B deux événements. Si* $A \subset B$ *alors,* $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

Moralement, la propriété précédente nous dit que plus un événement contient d'issues plus il est probable.

Exemple. On considère l'expérience aléatoire du jet d'un dé. Soit A l'événement "le résultat est un multiple de trois" et B l'événement "le résultat est un nombre pair". On note que $A = \{3, 6\}$ et $B = \{2, 4, 6\}$, ainsi

— l'intersection de A et B est $A \cap B = \{6\}$.

— l'union de A et B est $A \cap B = \{2, 3, 4, 6\}$.

Théorème 5.12. *Si A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire alors :*

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

5.2 Probabilité conditionnelle

Dans l'univers Ω d'une épreuve aléatoire, on considère un événement A de probabilité non nulle ($\mathbb{P}(A) \neq 0$).

Définition 5.13. Pour tout événement B, on appelle **probabilité conditionnelle de B sachant A** le nombre

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Propriété 5.14.

1. *L'égalité précédente permet d'exprimer la probabilité de l'intersection*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}_A(B),$$

2. $0 \leq \mathbb{P}_A(B) \leq 1$,
3. $\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(\bar{B}) = 1$.

Propriété 5.15. *Dans une situation d'équiprobabilité, on a*

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\textit{nombre d'issues de } A \cap B}{\textit{nombre d'issues de } A}$$

Exemple.

Les élèves d'une classe sont répartis suivant le tableau ci-contre.

	Fille (F)	Garçon (G)	Total
Demi-pensionnaire (D)	12	10	22
Externe (E)	6	8	14
Total	18	18	36

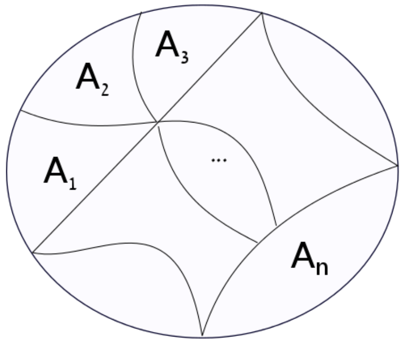
On choisit au hasard un de ces élèves.

La probabilité que l'élève choisi soit une fille est $\mathbb{P}(F) = \frac{18}{36} = 0.5$.

La probabilité que l'élève choisi soit une fille demi-pensionnaire est $\mathbb{P}(D \cap F) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

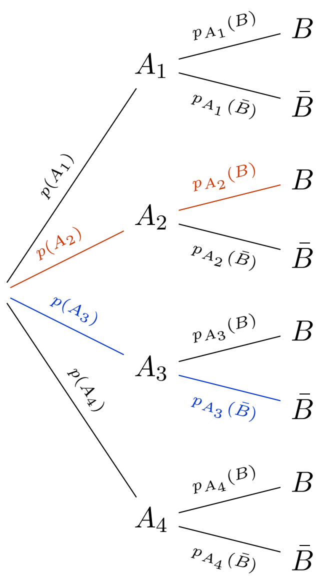
Sachant que l'élève choisi est une fille, la probabilité qu'elle soit demi-pensionnaire est $\mathbb{P}_F(D) = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$. On peut vérifier que l'on a bien $\mathbb{P}_F(D) = \frac{\mathbb{P}(D \cap F)}{\mathbb{P}(F)}$.

Dans l'univers Ω d'une épreuve aléatoire, on considère un événement B et n événements A_1, A_2, ..., A_n de probabilités non nulles, formant une **partition** de Ω. C'est-à-dire que les événements A_i sont deux à deux incompatibles et leur union est l'univers entier. Graphiquement :



En d'autres termes, une partition A_1, A_2, $\ldots$, A_n est une manière de classer les issues possibles de notre expériences en n catégories d'événements notées A_1 à A_n.

Sur un **arbre pondéré de probabilités** (réalisé ci-desous pour $n = 4$), une **branche** est représentée par un segment (portant une probabilité), un **noeud** est la jonction de deux ou plusieurs branches, et un **chemin** est une succession de branches allant du noeud initial de l'arbre à l'une de ses extrémités. Chaque chemin correspond à l'évènement intersection des événements figurant sur ce chemin (par exemple $A_2 \cap B$ pour le 3^e chemin).

Arbre	Événement	Probabilité
	$A_2 \cap B$	$\mathbb{P}(A_2 \cap B) = \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_2}(B)$
	$A_3 \cap \bar{B}$	$\mathbb{P}(A_3 \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(A_3) \times \mathbb{P}_{A_3}(\bar{B})$

Propriété 5.16. *À partir de là, pour les calculs, on utilise les règles suivantes :*

1. *La* **somme des probabilités** *portées sur les branches issues d'un même noeud est égale à 1.*
2. *La* **probabilité de l'événement correspondant à un chemin** *est le produit des probabilité portées sur ses branches.*
3. *Le* **probabilité d'un événement** *est la somme des probabilités des événements correspondant aux chemins qui y aboutissent.*

Dans l'exemple précédent, avec $n = 4$, la troisième propriété s'écrit ainsi :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(B) + \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_2}(B) + \mathbb{P}(A_3) \times \mathbb{P}_{A_3}(B) + \mathbb{P}(A_4) \times \mathbb{P}_{A_4}(B)$$

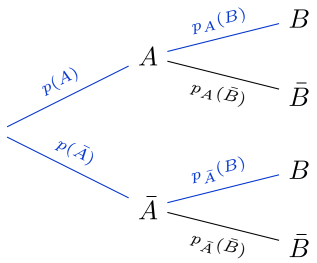
Propriété 5.17 (Formule des probabilités totales, cas $n = 2$)**.** *Soit A et B deux événements, avec A de probabilité non nulle ($\mathbb{P}(a) \neq 0$), alors*

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\bar{A}) \times \mathbb{P}_{\bar{A}}(B)$$

Une illustration avec un arbre pondéré de probabilité :



$A \cap B$ $\qquad$ $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$

$\bar{A} \cap B$ $\qquad$ $\mathbb{P}(\bar{A} \cap B) = \mathbb{P}(\bar{A}) \times \mathbb{P}_{\bar{A}}(B)$

$B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$ $\qquad$ $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$

6 Application de la dérivation (4s)

Proposition 6.1. *Soit $f : [a;\ b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle $[a;\ b]$,*

1. *f est constante sur I, si et seulement si, la dérivée f' est nulle sur I.*
2. *f est strictement croissante sur I, si et seulement si, la dérivée f' est strictement positive sur I (éventuellement nulle en des points isolés).*
3. *f est strictement décroissante sur I, si et seulement si, la dérivée f' est strictement négative sur I (éventuellement nulle en des points isolés).*

En terme de tableaux de variations les trois propriétés précédentes se présentent de la manière suivante :

1.

x	a		b
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$f(a)$	$\longrightarrow$	$f(b)$

2.

x	a		b
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$f(a)$	$\nearrow$	$f(b)$

3.

x	a		b
$f'(x)$		-	
$f(x)$	$f(a)$	$\searrow$	$f(b)$

Remarque. **Pour étudier les variations d'une fonction, il suffit d'étudier le signe de sa dérivée.**

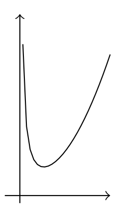
Exemple. Soit $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ définie sur $]0; +\infty[$. Alors $f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$, et

$$\begin{aligned} & f'(x) = 0 \\ \iff\quad & 2x - \frac{1}{x^2} = 0 \\ \iff\quad & 2x^3 - 1 = 0 \\ \iff\quad & x^3 = \frac{1}{2} \\ \iff\quad & x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{aligned}$$

Ainsi, on déduit le tableau de variation :

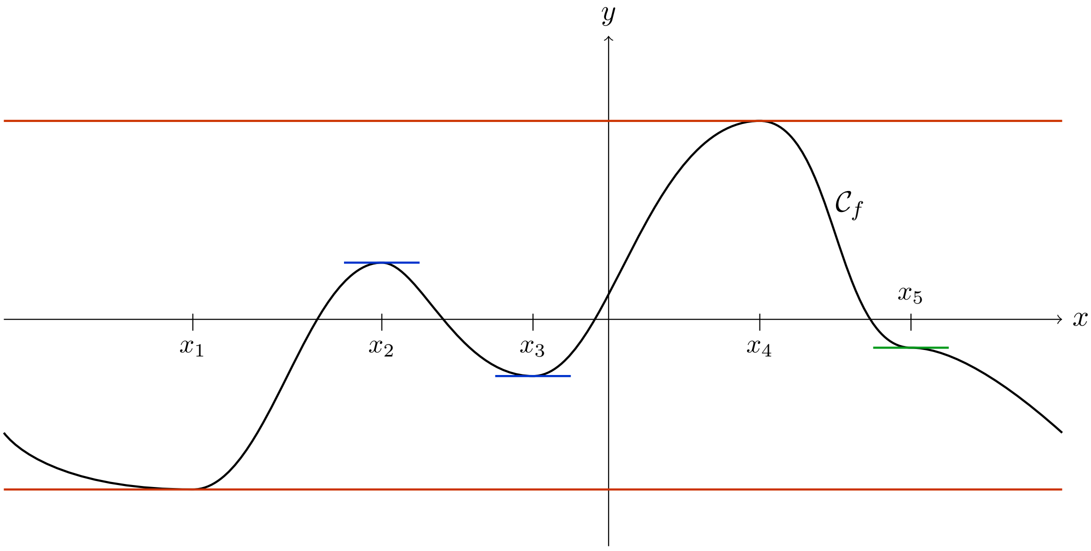
x	0		$1/\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Pour finir, voici le graphe de la fonction f :



6.1 Extremums

Considérons une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I tel que sont graphe soit de la forme suivante :



Définition 6.2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I. On dit que :

1. le point x_2 est un maximum local si pour tout x proche de x_2, on a $f(x) \leq f(x_0)$.
2. le point x_3 est un minimum local si pour tout x proche de x_3, on a $f(x) \geq f(x_0)$.
3. le point x_4 est un maximum (global) si pour tout x de l'intervalle I, on a $f(x) \leq f(x_0)$.
4. le point x_1 est un minimum (global) si pour tout x de l'intervalle I, on a $f(x) \geq f(x_0)$.

Supposons que $I = [a; b]$. On en déduit du graphe précédent, le tableau de variation de notre fonction f :

$x \in I$	a		x_1		x_2		x_3		x_4		x_5		b
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	
$f(x)$	$f(a)$	$\searrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	$f(x_3)$	$\nearrow$	$f(x_4)$	$\searrow$	$f(x_5)$	$\searrow$	$f(b)$

On notera une relation entre les changements de signes de la dérivée f' et les extremums locaux. Plus précisément,

Propriété 6.3. *Soit x_0 un nombre dans I, distinct des extrémités de I.*

— *Si f a un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.*

— *Si $f'(x_0) = 0$ et f' change de signe en x_0, alors f a un extremum local en x_0.*

Remarque. Si l'on revient au point d'abscisse x_5 dans l'exemple précédent, on note que **la dérivée s'annule mais ne change pas de signe**. Dans ce cas, nous n'avons **pas d'extremum !**

7 Loi normale (3s)

- Loi normale d'espérance μ et d'écart type σ (l'expression de la densité de la loi normale n'est pas un attendu du programme).
- Intervalle de fluctuation d'une variable aléatoire suivant une loi normale

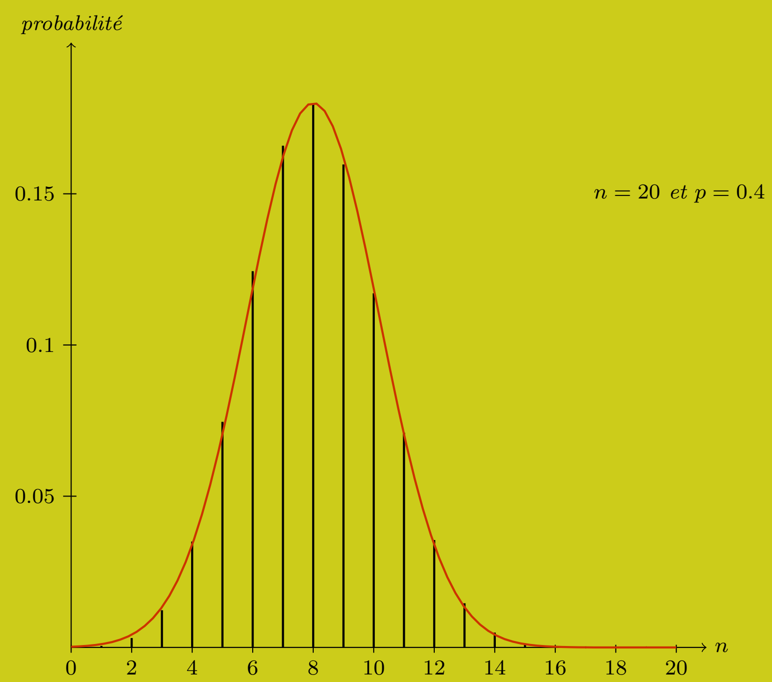
Définition 7.1. Considérons une expérience aléatoire de type "Pile ou Face" avec une probabilité p d'avoir un succès et donc $1-p$ d'avoir un échec. Si l'on répète n fois de manière indépendante la précédente expérience aléatoire, alors la variable aléatoire qui correspond au nombre de succès **suit une loi binomiale** de paramètres n et p.

Définition 7.2 (Utilisation de la calculatrice)**.** Soit X une variable aléatoire qui suit une **loi binomiale** de paramètres n et p, alors

1. Avec une casio :
   - pour calculer $P(X=k)$, on utilise la commande : `Bpd(k,n,p)` ;
   - pour calculer $P(X \leq k)$, on utilise la commande : `Bcd(k,n,p)` ;
2. Avec une TI :
   - pour calculer $P(X=k)$, on utilise la commande : `Bpd(n,p,k)` ;
   - pour calculer $P(X \leq k)$, on utilise la commande : `Bcd(n,p,k)` ;

Remarque. On portera une attention particulière à l'ordre des paramètres suivant le modèle de calculatrice !

Propriété 7.3. • *Le diagramme en bâtons d'une loi binomiale de paramètres n et p, lorsque n est très grand et que p n'est pas voisin de 0 et de 1, peut être approché par une courbe "en cloche".*



- *Cette courbe est celle d'une fonction, appelée* **densité de probabilité**, *qui définie une nouvelle loi de probabilité, appelée* **loi normale**.

Remarque. Avec la calculatrice :

- Avec la casio, dans le programme **TABLE**, taper la commande `Y1 = BinomialPD(X,10,0.25)`. Puis faire une table pour X allant de 0 à 10 avec un pas de 1. (Pour trouver, la commande `BinomialPD`, il faut faire (OPTN) [STAT] [DIST] [BINM]).
- Avec la TI, il faut taper `seq(binompdf(10,0.25,X),X,0,10,1)`$\rightarrow L_2$.

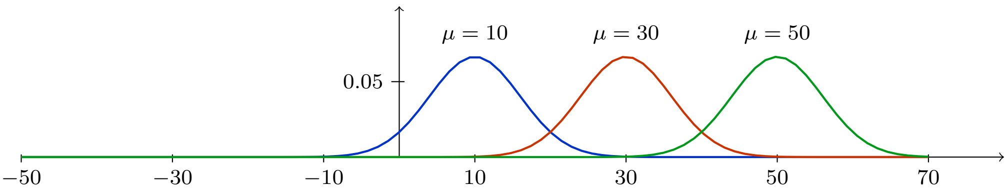
Propriété 7.4. *Deux paramètres caractérisent une loi normale :*

- *son* **espérance** μ *;*
- *son* **écart type** σ.

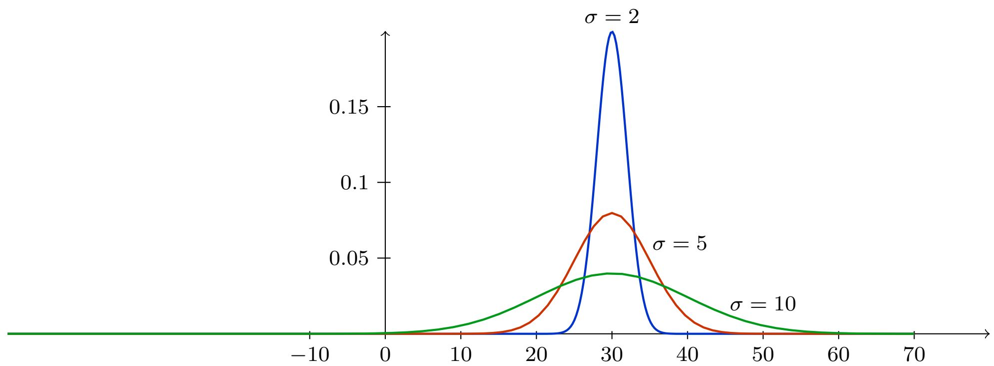
Remarque. Lorsqu'on considère la loi binomiale avec p fixé et n très grand, les paramètres de la loi normale qui approxime le diagramme en bâtons sont :
$\mu = n \times p$,
$\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

Quelques exemples :

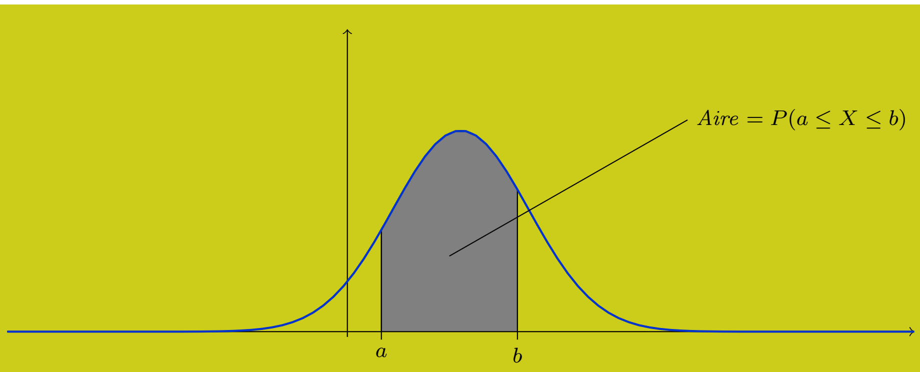
- On fixe l'écart type $\sigma = 6$:



- On fixe l'espérance $\mu = 30$:

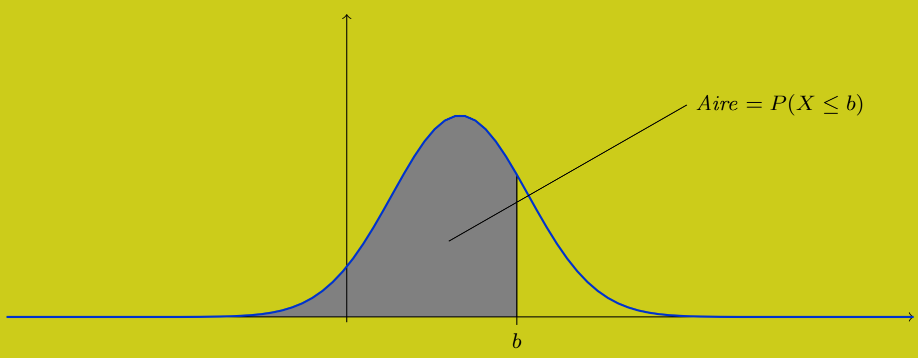


Propriété 7.5. *Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance μ et d'écart type σ. Soit $a < b$ deux nombres réels.*
La probabilité $P(a \leq X \leq b)$ que la variable aléatoire X prenne une valeur comprise entre a et b est égale à l'aire du domaine compris entre la courbe de la loi normale, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$:

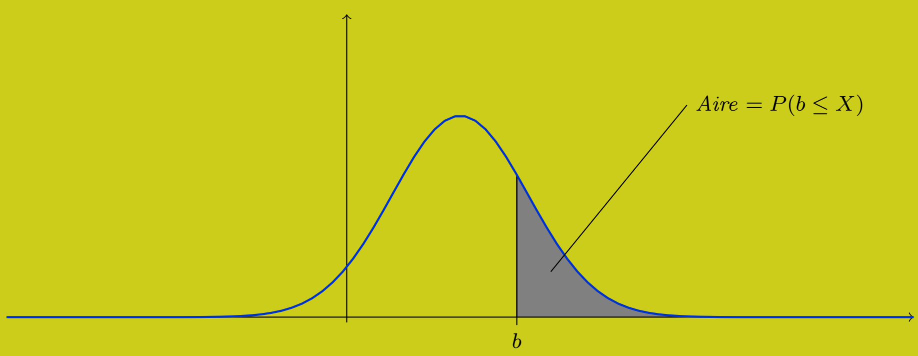


En particulier,

- *$P(X \leq b)$ est l'aire de la partie grisée à gauche de b :*



- *$P(b \leq X)$ est l'aire de la partie grisée à droite de b :*



Remarque. Soit X une variable aléatoire, la fonction $x \mapsto P(X \leq x)$ est appelée *fonction de répartition* (en Anglais, *distribution function*).

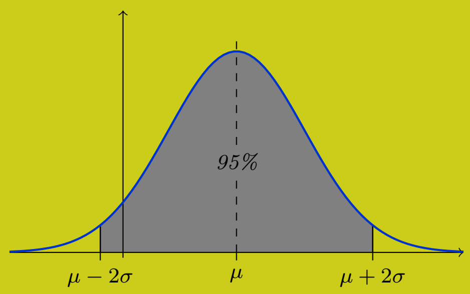
Le fait que les inégalités soient strictes ou pas n'a pas d'importance, plus précisément, on a $P(X \leq a) = P(X < a)$.

Définition 7.6 (Utilisation de la calculatrice)**.** Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance μ et d'écart type σ alors

1. Avec une casio : pour calculer $P(a \leq X \leq b)$, on utilise la commande : `Ncd(a,b,σ,μ)`.
2. Avec une TI : pour calculer $P(a \leq X \leq b)$, on utilise la commande : `normalcdf(a,b,μ,σ)`.

Propriété 7.7.
1. *La courbe d'une loi normale d'espérance μ est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = \mu$.*
2. *L'aire sous la courbe d'une loi normale est égale à 1.*
3. $P(X \leq \mu) = \frac{1}{2} = P(\mu \leq X)$.
4. $P(X > a) = 1 - P(X \leq a)$.
5. $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X < a)$.

Propriété 7.8 (Intervalle de fluctuation de la loi normale)**.** *Une valeur approchée de la probabilité de l'événement X appartient à l'intervalle $[\mu - 2\sigma;\ \mu + 2\sigma]$ est* 0.95.



*L'intervalle $[\mu - 2\sigma;\ \mu + 2\sigma]$ est appelée l'***intervalle de fluctuation** *de la loi normale d'espérance μ et d'écart type σ.*

8 Programme calculatrice pour le calcul de $P(a \leq X \leq b)$

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale. Le programme suivant permet de calcul avec une précision d'environ 10^{-3} près de $P(a \leq X \leq b)$, la probabilité que X soit compris entre a et b. D'après une propriété (admise), on a

$$P(a \leq X \leq b) = P(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq N \leq \frac{b-\mu}{\sigma}) = P(N \leq \frac{b-\mu}{\sigma}) - P(N \leq \frac{a-\mu}{\sigma})$$

où N suit une loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1.

Avec une Casio :

```
"A":?→A
"B":?→B
"MOYENNE":?→M
"ECART TYPE":?→S
0→P
If A < B And S ≠ 0
Then
(A - M)/S → A
(B - M)/S → B
Abs(A) → X
Abs(B) → Y
1 + 0.196854 × X + 0.115194 × X^2 +
0.000344 × X^3 + 0.019527 × X^4 →
X
1 - 1 / ( 2 × X^4 ) → X
1 + 0.196854 × Y + 0.115194 × Y^2 +
0.000344 × Y^3 + 0.019527 × Y^4 →
Y
1 - 1 / ( 2 × Y^4 ) → Y
If A<0
Then 1-X→X
IfEnd
If B<0
Then 1-Y→Y
IfEnd
Y - X → P
IfEnd
"P(A<X<B) = ":P ▲
```

Avec une TI :

```
Prompt A
Prompt B
Prompt M
Prompt S
0→P
If A < B and S ≠ 0
(A - M)/S → A
(B - M)/S → B
Abs(A) → X
Abs(B) → Y
1 + 0.196854 × X + 0.115194 × X^2 +
0.000344 × X^3 + 0.019527 × X^4 →
X
1 - 1 / ( 2 × X^4 ) → X
1 + 0.196854 × Y + 0.115194 × Y^2 +
0.000344 × Y^3 + 0.019527 × Y^4 →
Y
1 - 1 / ( 2 × Y^4 ) → Y
If A<0
1-X→X
End
If B<0
1-Y→Y
End
Y - X → P
End
Disp P
```

Remarque :

- Les parties du code en bleue et en vert sont à écrire sur "une ligne".

9 Intervalle de fluctuation. Prise de décision (2s)

- Intervalle de fluctuation d'une fréquence
- Prise de décision
- Intervalle de confiance d'une proportion :
  Connaître un intervalle de fluctuation à au moins 95% d'une fréquence d'un échantillon de taille n : $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}},\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

Échantillonnage On considère une population de n individus où chacun à une probabilité p d'avoir un certain caractère. La variable aléatoire qui correspond au nombre d'individus ayant le caractère est une variable aléatoire suivant la **loi binomial de paramètres** n **et** p.
Posons $F = \frac{X}{n}$, alors F est la fréquence d'apparition du caractère dans la population. Il a été vu en classe de première que la fréquence F se trouve dans l'intervalle $[p - \frac{1}{\sqrt{n}};\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ avec une probabilité de 95%.

Définition 9.1. Soit p la proportion d'individus ayant un certain caractère dans une population. L'intervalle $[p - \frac{1}{\sqrt{n}};\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ est un **intervalle de fluctuation** à au moins 95% de la fréquence de ce caractère dans un échantillon aléatoire de taille n issu de la population.

Remarque. Pour que l'intervalle puisse être exploité dans une prise de décision, il faut vérifier les conditions suivantes :

- $n \geq 30$;
- $np \geq 5$;
- $n(1 - p) \geq 5$.

Propriété 9.2. *On considère une population dans laquelle on* **suppose** *que la proportion d'un caractère est p.*
On **observe** *f la fréquence de ce caractère dans un échantillon (une portion de la population) de taille n.*
Soit l'hypothèse : "la proportion de ce caractère dans la population est p".
*Soit $I = [p - \frac{1}{\sqrt{n}};\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ l'intervalle de fluctuation de la fréquence à 95% dans les échantillons de taille n, alors l'***algorithme de décision** *est le suivant :*

- *Si la fréquence f de l'échantillon est l'intervalle I alors on accepte l'hypothèse que p soit fréquence de ce caractère dans la population entière.*
- *Si la fréquence f de l'échantillon n'est pas l'intervalle I alors on rejette l'hypothèse, p n'est pas la fréquence de ce caractère dans la population entière.*

Remarque.

- La longueur de l'intervalle de fluctuation est $\frac{2}{\sqrt{n}}$. Ainsi, plus n est grand plus la longueur de l'intervalle I est petit et donc plus les conditions du test sont strictes.

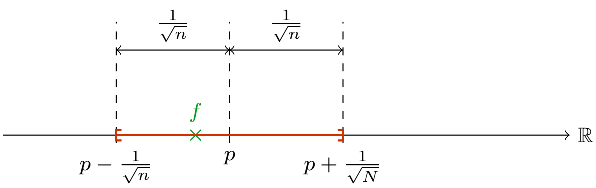
Taille de l'échantillon : n	5	10	50	100	1000	10 000
Longueur de l'intervalle : $\frac{2}{\sqrt{n}}$ (arrondi au millième)	0.894	0.632	0.283	0.2	0.063	0.02

- Rappelons que théoriquement, la probabilité que la fréquence f pour un échantillon de taille n soit en dehors de l'intervalle de fluctuation I est de $5\% = 0.05$ "seulement". Cette évènement étant très rare, lorsqu'il se réalise avec l'échantillon choisi, on décide que c'est l'hypothèse sur p qui est fausse et non pas le hasard qui a voulu que la fréquence soit en dehors de I. La probabilité de se tromper avec un tel jugement n'est que de 0.05, ce qui d'usage est considérée comme acceptable !

Notons que dire que la fréquence f appartient à l'intervalle de fluctuation I (formellement $f \in I$) signifie que

$$p - \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \leq \quad f \quad \leq \quad p + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Graphiquement,



En d'autres termes, la *distance entre f et p* doit être inférieur à $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Une application est l'estimation de la proportion p à partir de la fréquence dite empirique f.

Estimation d'une proportion

Définition 9.3. Soit f la fréquence observée d'un caractère dans un échantillon de taille n extrait d'une population dans laquelle la proportion de ce caractère est p. Alors l'intervalle $[f - \frac{1}{\sqrt{n}};\ f + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ est un **intervalle de confiance de la proportion p au seuil de confiance 95%**.

Lorsque n est assez grand, on peut utiliser cet intervalle.

Propriété 9.4. *Au moins 95% des intervalles de la forme $[f - \frac{1}{\sqrt{n}};\ f + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ contiennent la proportion p.*