Notes de cours de Mathématiques en terminale ES

O. Lader

Table des matières

1 Suites numériques (1S)

1.1 Rappels

Définition 1.1. On appelle **suite numérique** toute application de l'ensemble des nombres entiers supérieurs ou égaux à un certain entier naturel n_0 dans l'ensemble des nombres réels :

$$(u_n)_{n\geq n_0} : \quad \begin{aligned} \{n\in\mathbb{N};\ n\geq n_0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u_n \end{aligned}$$

Le terme de rang n est noté u_n.

Définition 1.2. Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite

— **croissante** si pour tout entier $n \geq n_0$, on a $u_n \leq u_{n+1}$.

— **décroissante** si pour tout entier $n \geq n_0$, on a $u_n \geq u_{n+1}$.

— **constante** si pour tout entier $n \geq n_0$, on a $u_n = u_{n+1}$.

Une suite est dite **monotone** si elle est soit croissante, soit décroissante, soit constante.

Propriété 1.3. Soit (u_n) une suite.

— Si (u_n) est **croissante**, alors pour tous entiers m, n supérieurs ou égaux à n_0, on a

$$m \leq n \quad \text{implique} \quad u_n \leq u_m.$$

— Si (u_n) est **décroissante**, alors pour tous entiers m, n supérieurs ou égaux à n_0, on a

$$m \leq n \quad \text{implique} \quad u_n \geq u_m.$$

Comme pour les fonctions, lorsqu'une suite est croissante (respectivement décroissante) elle conserve (respectivement renverse) l'ordre.

1.2 Suite arithmétique

Définition 1.4. La suite (u_n) est une **suite arithmétique** de terme initial u_0 et de raison r, si elle est définie ainsi :

$$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$$

(Pour passer au terme suivant de la suite, on **ajoute** *un nombre fixé r)*

Dans ce cas, le terme de rang n est $u_n = r\,n + u_0$.

Propriété 1.5. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de terme initial u_0. Notons que pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n$ est égale à la raison r.

1. Si $r > 0$, alors pour tout n : $u_n < u_{n+1}$ et la suite est strictement croissante.
2. Si $r = 0$, alors pour tout n : $u_n = u_{n+1} = u_{n+2} = \dots$ et la suite est constante.
3. Si $r < 0$, alors pour tout n : $u_n > u_{n+1}$ et la suite est strictement décroissante.

1.3 Suites géométriques

Définition 1.6. Une suite (u_n) est une **suite géométrique** de terme initial u_0 et de raison q :

$$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = q\, u_n \end{cases}$$

(Pour passer au terme suivant de la suite, on **multiplie** *par un nombre fixé q, la raison)*

Propriété 1.7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q, alors quel que soit l'entier naturel n, on a :

- $u_n = u_0 \times q^n$;
- $u_n = u_1 \times q^{n-1}$, si $n \geq 1$;
- $u_n = u_p \times q^{n-p}$, si $n \geq p$ et p est un entier quelconque.

Propriété 1.8. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de terme initial u_0 positif. Notons que pour tout entier n, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est égale à la raison q.

1. Si $q > 1$, alors pour tout n : $u_n < u_{n+1}$ et la suite est strictement croissante.
2. Si $q = 1$, alors pour tout n : $u_n = u_{n+1} = u_{n+2} = \dots$ et la suite est constante.
3. Si $q < 1$, alors pour tout n : $u_n > u_{n+1}$ et la suite est strictement décroissante.

Propriété 1.9. Soit $q \neq 1$ un nombre réel, alors

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Exemple. $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{10} = \frac{1-2^{10+1}}{1-2} = 2^{11} - 1 = 2\,047$.

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$, on a rappelé que $u_n = u_0\, q^n$ pour tout entier n. Ainsi :

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n &= u_0 + u_0\, q + u_0\, q^2 + \dots + u_0\, q^n \\ &= u_0 \left(1 + q + q^2 + \dots + q^n\right) && \text{(on a factorisé par } u_0\text{)} \\ &= u_0\, \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \end{aligned}$$

En résumé,

Propriété 1.10. Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$, alors pour tout entier naturel n, on a

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \, \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

On peut faire le même chose avec la formule $u_n = u_1 q^{n-1}$:

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n &= u_1 + u_1\, q + u_1\, q^2 + \ldots + u_1\, q^{n-1} \\ &= u_1 \left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}\right) && \text{(on a factorisé par } u_1\text{)} \\ &= u_1 \, \frac{1-q^{n-1+1}}{1-q} \\ &= u_1 \, \frac{1-q^n}{1-q} \end{aligned}$$

Propriété 1.11. Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$, alors pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_1 \, \frac{1-q^n}{1-q}$$

Voici une généralisation :

Propriété 1.12. Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$, $n \geq p$ deux entiers naturels.
On note

$$\mathcal{S} = \underbrace{u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n}_{n-p+1 \text{ termes}}$$

la **somme de termes consécutifs de la suite géométrique**, alors

$$\mathcal{S} = 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$$

Exemple. Soit (u_n) la suite géométrique de raison $q = 1.2$ et de terme initial $u_0 = 1000$. Posons $\mathcal{S} = u_3 + u_4 + \ldots + u_10$.
Le terme initial de la somme est $u_3 = u_0\, q^3 = 1000 \times 1.2^3 = 1728$.
La somme $\mathcal{S}$ comporte $10 - 3 + 1 = 8$ termes.
D'où

$$\mathcal{S} = 1728 \times \frac{1-1.2^8}{1-1.2} \simeq 28\,510.42$$

1.4 Seuil et limite d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 0$ et de terme initial strictement positif.
À l'aide de la calculatrice ou d'un tableur, il est possible de déterminer :

- si $q > 1$, un rang N à partir du quel $u_n \geq M$ pour tout entier $n \geq N$. C'est-à-dire, à dire un rang à partir du quel les termes de la suite dépassent un certain seuil M fixé.
- si $0 < q < 1$, un rang N à partir du quel $0 < u_n \leq M$ pour tout entier $n \geq N$. C'est-à-dire, à dire un rang à partir du quel les termes de la suite passent en dessous d'un certain seuil M fixé.

Passons maintenant à la notion de limite. En observant le tableau sur l'évolution de q^n lorsque n est de plus en plus grand page 8, on note que :

- si $0 < q < 1$, alors q^n d'autant qu'on veut de 0 quitte à choisir n très grand.
  Lorsque n tend vers l'infini, q^n tend vers 0. Notation : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

- si $q > 1$, alors q^n tend à être infiniment grand plus n est grand. Quel que soit le seuil M (grand éventuellement), il va exister à partir du quel q^n sera supérieur au seuil M.
  Lorsque n tend vers l'infini, q^n tend vers l'infini. Notation : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

Propriété 1.13 (admise)**.** Soit q un nombre réel strictement positif, alors :

- si $0 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$;
- si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 1^n = 1$;
- si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

Définition 1.14. Une suite est dire **convergente** si elle admet une **limite finie** lorsque $n \to +\infty$.
Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Remarque. Le suite (u_n) définie $u_n = (-1)^n$ pour tout entier n alterne entre les valeurs 1 et -1. Plus précisément, $u_n = 1$ si n est pair et -1 sinon. Comme, il n'y a pas de raison de privilégier 1 à -1, cette suite, dite « alternée », n'admet aucune limite lorsque $n \to +\infty$. Elle est donc divergente.

Propriété 1.15. Soit u_0 et q deux nombres réels.

- si $0 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_0 q^n = 0$;
- si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_0\, q^n = u_0$;
- si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_0\, q^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } u_0 > 0 \\ -\infty & \text{si } u_0 < 0 \end{cases}$.

Propriété 1.16. Soit (u_n) une suite numérique et a, b deux nombres réels. Supposons que la suite (u_n) converge vers un nombre l (c'est-à-dire, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$), alors la suite (v_n), définie par $v_n = a\, u_n + b$ pour tout entier n, converge vers $al + b$.
Formellement :

$$\lim_{n\to+\infty} a\, u_n + b = a\, l + b$$

Rappelons que si (u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 1$, alors

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Propriété 1.17. Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$, alors

- Si $0 < q < 1$, alors
$$\lim_{n\to+\infty} (u_0 + u_1 + \ldots + u_n) = \frac{u_0}{1 - q}$$

TABLE 1 – Évolution de q^n lorsque n est de plus en plus grand

q	**0,1**	**0,2**	**0,5**	**0,8**	**0,9**	**1**	**1,1**	**1,2**	**1,5**	**2**
n	$q^n = 0,1^n$	$q^n = 0,2^n$	$q^n = 0,5^n$	$q^n = 0,8^n$	$q^n = 0,9^n$	$q^n = 1^n$	$q^n = 1,1^n$	$q^n = 1,2^n$	$q^n = 1,5^n$	$q^n = 2^n$
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0,1	0,2	0,5	0,8	0,9	1	1,10	1,20	1,50	2
2	0,01	0,04	0,25	0,64	0,81	1	1,21	1,44	2,25	4
3	0,001	0,008	0,125	0,512	0,729	1	1,33	1,73	3,38	8
4	0,0001	0,0016	0,0625	0,410	0,656	1	1,46	2,07	5,06	16
5	0,00001	0,00032	0,03125	0,328	0,590	1	1,61	2,49	7,59	32
6	,000001	0,00006	0,0156	0,262	0,531	1	1,77	2,99	11,39	64
7	0,0000001	0,0000128	0,0078	0,210	0,478	1	1,95	3,58	17,09	128
8	0,00000001	0,00000256	0,0039	0,168	0,430	1	2,14	4,30	25,63	256
9	0,000000001	0,000000512	0,0020	0,134	0,387	1	2,36	5,16	38,44	512
10	1E-010	1,024E-007	0,0010	0,107	0,349	1	2,59	6,19	57,67	1024
11	1E-011	2,048E-008	0,0005	0,086	0,314	1	2,85	7,43	86,50	2048
12	1E-012	4,096E-009	0,0002	0,069	0,282	1	3,14	8,92	129,75	4096
13	1E-013	8,19E-010	0,0001	0,055	0,254	1	3,45	10,70	194,62	8192
14	1E-014	1,63E-010	6,10E-005	0,044	0,229	1	3,80	12,84	291,93	16384
15	1E-015	3,28E-011	3,05E-005	0,035	0,206	1	4,18	15,41	437,89	32768
20	1E-020	1,05E-014	9,54E-007	0,012	0,122	1	6,73	38,34	3 325,26	1048576
50	1E-050	1,13E-035	8,88E-016	1,43E-05	0,005	1	117,39	9 100,44	637621500,21405	1,13E+015
100	1E-100	1E-070	9E-031	2E-010	3E-05	1	13781	82 817 975	4E+07	1E+030
200	1E-200	2E-140	6E-061	4E-020	7E-10	1	189 905 276	7E+015	2E+035	2E+060

- Si $1 < q$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} (u_0 + u_1 + \ldots + u_n) = \begin{cases} +\infty & \text{si } u_0 > 0 \\ -\infty & \text{si } u_0 < 0 \end{cases}$$

(paradoxe de Zénon).

2 Suites arithmético-géométriques (1S)

Définition 2.1. Une suite (u_n) définie par un terme initial et une relation de récurrence de la forme :

$$u_{n+1} = au_n + b$$

où a et b sont des nombres réels, est appelée **suite arithmético-géométrique**.

Remarque. Quelques cas particuliers :

- si $a = 0$, alors la relation de récurrence est de la forme $u_{n+1} = b$ et la suite est constante égale à b.
- si $a = 1$, alors la relation de récurrence est de la forme $u_{n+1} = u_n + b$. La suite (u_n) est alors, en particulier, une suite arithmétique de raison $r = b$.
- si $b = 0$, alors la relation de récurrence est de la forme $u_{n+1} = au_n$. La suite (u_n) est alors, en particulier, une suite géométrique de raison $q = a$.

Exemple. La suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1000 \\ u_{n+1} = 1.1u_n + 20 \end{cases}$$

est une suite arithmético-géométrique.
$u_1 = 1.1u_0 + 20 = 1.1 \times 1000 + 20 = 1120$;
$u_2 = 1.1u_1 + 20 = 1.1 \times 1120 + 20 = 1252$;
$u_3 = 1.1u_2 + 20 = 1.1 \times 1252 + 20 = 1397.2$.

Méthode :
Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique définie par la donnée de u_0 (ou d'un autre terme) et par la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$.
On suppose de plus que $a \neq 0$, $a \neq 1$ et $b \neq 0$.

- On définit une suite auxiliaire (v_n) par
$$v_n = u_n - \alpha$$
où α nous a été donné [1] de telle manière que la suite (v_n) soit géométrique.
- On démontre qu'effectivement la suite (v_n) est bien géométrique en prouvant que $v_{n+1} = q\,v_n$ pour tout entier naturel n.
- On exprime le terme v_n en fonction de n.
- On en déduit l'expression de u_n en fonction de n.

Si le premier terme de la suite (u_n) est u_0 et que la suite (v_n) est de raison q, alors $u_n = \alpha + v_0 q^n$ pour tout entier naturel n. L'intérêt d'une telle écriture est en premier de pouvoir calculer par exemple u_{10} sans avoir à calculer les termes précédents et une seconde application est l'étude de la limite de la suite (u_n).

Exemple. Soit (u_n) la suite arithmético-géométrique définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 1000 \\ u_{n+1} &= 1.1u_n + 20 \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

Posons $v_n = u_n + 200$ pour tout entier naturel n.

1. Pour les plus courageux, on peut retenir que α solution de l'équation $\alpha = a\alpha + b$ convient.

- Montrons que la suite (v_n) est géométrique. Soit n un entier naturel, alors

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 200 && \text{on applique la relation précédente avec } n+1. \\ &= 1.1u_n + 20 + 200 && \text{d'après le relation de récurrence sur } (u_n). \\ &= 1.1u_n + 220 \\ &= 1.1(u_n + \frac{220}{1.1}) \\ &= 1.1(u_n + 200) \\ &= 1.1v_n \end{aligned}$$

  Ainsi, on déduit que la (v_n) est géométrique de raison $q = 1.1$ et de terme initial $v_0 = u_0 + 200 = 1200$.
- D'après le cours, quel que soit l'entier naturel n, $v_n = 1200 \times 1.1^n$. D'où :

$$\begin{aligned} v_n &= u_n + 200 \\ 1200 \times 1.1^n &= u_n + 200 \\ u_n &= 1200 \times 1.1^n - 200 \end{aligned}$$

  pour tout entier naturel n.

3 Continuité d'une fonction et valeurs intermédiaires (2S)

- Exploiter le tableu de variation pour déterminer : le nombre de solutions d'une équation du type $f(x) = k$ ou le signe d'une fonction.
  On se limite à une approche intuitive et on admet que les fonctions usuelles sont continues par intervalle.
- La propriété des valeurs intermédiaires est présentée graphiquement ; on convient que les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

3.1 Rappels sur la dérivation

Définition 3.1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I contenant le nombre a.
Dire que f est **dérivable en** a, c'est dire que lorsque h tend vers 0, le taux de variation de

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

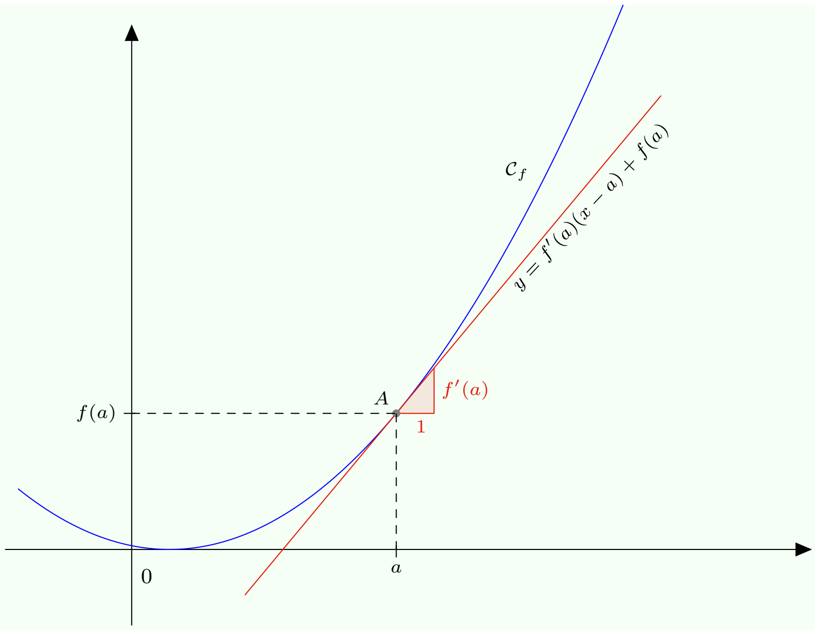
tend vers un réel l, ce qu'on note $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = l$.
Dans ce cas, le nombre l est appelé **le nombre dérivé** de f en a et on le note $f'(a)$.

Définition 3.2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en un point a de I, la **tangente à la courbe** $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a, notée $T_a(f)$, est la droite passant par le point A et dont le coefficient directeur est $f'(a)$.

Propriété 3.3. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en un point a de I, alors l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Graphiquement :



Définition 3.4. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I, on dit que f est **dérivable sur I** si elle est dérivable en tout réel a de I.

Propriété 3.5.

f est dérivable sur :	$f(x) =$	$f'(x) =$
$\mathbb{R}$	c (constante)	0
	x	1
	x^2	$2x$
	x^3	$3x^2$
Soit n un entier relatif $\mathbb{R}$ ou $]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$	x^n	nx^{n-1}
$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$	$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$
$]0;+\infty[$	$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

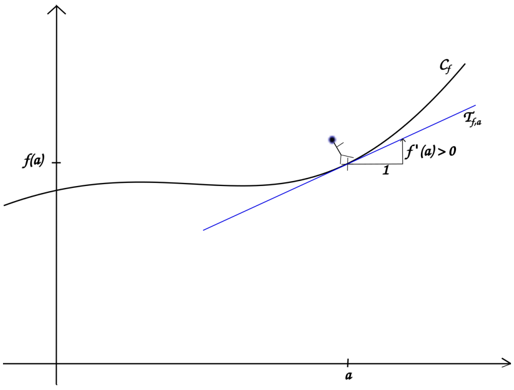
Propriété 3.6. Soit $u, v : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur un intervalle I et c un nombre réel, alors on a :

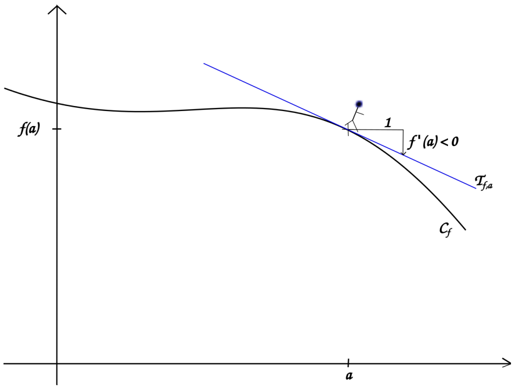
$$\begin{aligned} (u+v)' &= u'+v' \\ (u-v)' &= u'-v' \\ (cu)' &= cu' \\ (uv)' &= u'v+uv' \end{aligned}$$

Supposons de plus que v ne s'annule par sur l'intervalle I, alors

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Application à l'étude des variations d'une fonction En revenant à la définition de la tangente, on voit que si la tangente en un point A d'abscisse a est croissante (resp. décroissante), il en va de même pour f au voisinage de A.





Or le coefficient directeur de la tangente $T_a(f)$ de $\mathcal{C}_f$ en A est le nombre dérivé $f'(a)$. Ainsi, la droite tangente est croissante (resp. décroissante) si et seulement si $f'(a) > 0$ (resp. $f'(a) < 0$).

Propriété 3.7. Soit $f : [a;\ b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle $[a;\ b]$,

1. f est constante sur I, si et seulement si, la dérivée f' est nulle sur I.
2. f est strictement croissante sur I, si et seulement si, la dérivée f' est strictement positive sur I (éventuellement nulle en des points isolés).
3. f est strictement décroissante sur I, si et seulement si, la dérivée f' est strictement négative sur I (éventuellement nulle en des points isolés).

En terme de tableaux de variations les trois propriétés précédentes se présentent de la manière suivante :

1.

x	a	b
$f'(x)$	0	
$f(x)$	$f(a)$ ⟶	$f(b)$

2.

x	a	b
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$f(a)$ ↗	$f(b)$

3.

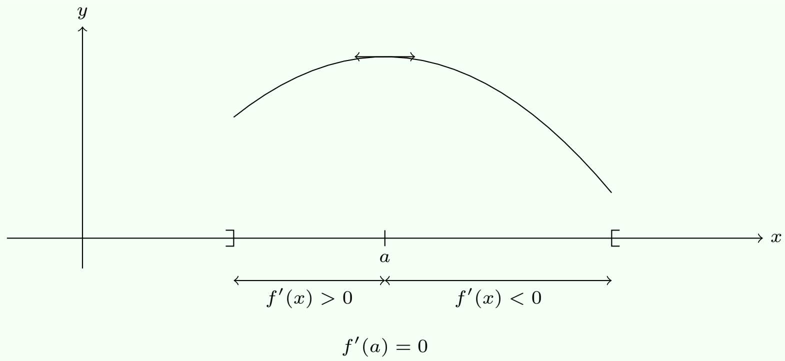
x	a	b
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$f(a)$ ↘	$f(b)$

Remarque. **Pour étudier les variations d'une fonction, il suffit d'étudier le signe de sa dérivée.**

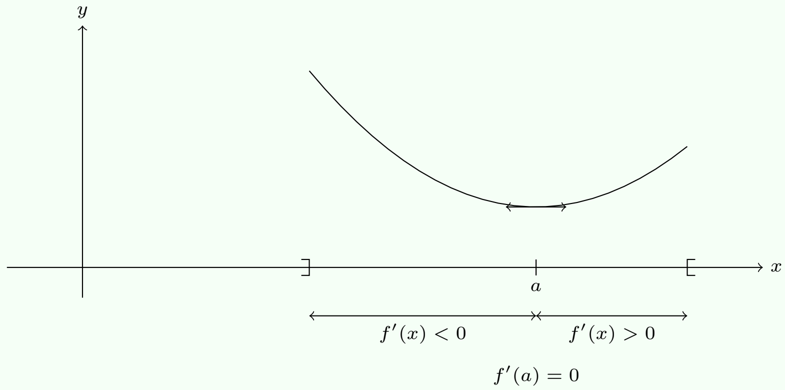
3.2 Extremum d'une fonction

Théorème 3.8. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a un nombre réel appartenant à I.
Si la dérivée f' s'annule en changeant de signe en a, alors f admet un extremum en a. Plus précisément,

1. si $f'(x) > 0$ pour tout $x < a$ de I, $f'(a) = 0$ et $f'(x) < 0$ pour tout $x > a$ de I, alors la fonction f admet un **maximum** en a sur I :



2. si $f'(x) < 0$ pour tout $x < a$ de I, $f'(a) = 0$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x > a$ de I, alors la fonction f admet un **minimum** en a sur I :

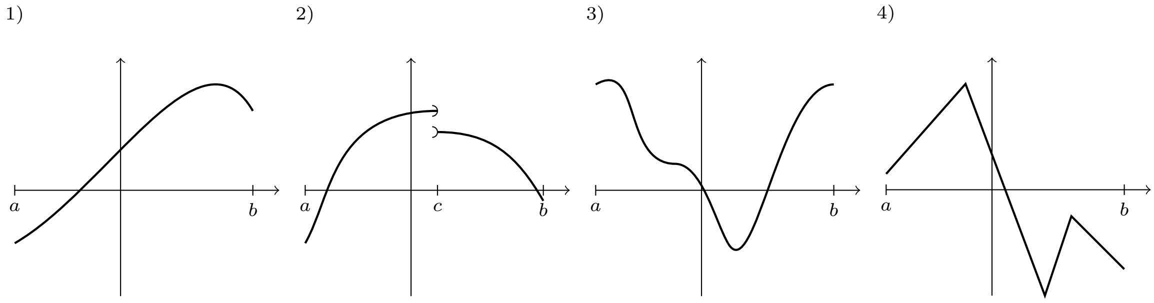


Remarque. L'hypothèse du changement de signe est nécessaire : la fonction $x \mapsto x^3$ n'admet pas d'extremum sur $\mathbb{R}$, pourtant la dérivée $f'(x) = 3x^2$ s'annule en $x = 0$, mais cette dérivée ne change pas de signe (elle est toujours positive).

3.3 Continuité sur un intervalle

Définition 3.9. Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est une fonction **continue** sur l'intervalle I lorsque sa courbe représentative peut se tracer d'un trait continu, c'est-à-dire « sans lever le crayon ».

Exemple.



Parmi les différents graphes de fonction représentés, les graphes 1), 3) et 4) correspondent à une fonction continue.

Propriété 3.10. Les fonctions *usuelles* sont continues sur leurs ensembles de définition :

f **est définie par**	**Intervalle(s) où** f **est continue**
$x \mapsto ax + b$ (fonction affine)	$\mathbb{R}$
$x \mapsto ax^2 + bx + c$ (polynôme du second degré)	$\mathbb{R}$
Polynôme de degré n	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{a}{x}$ (fonction inverse)	$]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$
$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ (fonction homographique)	$]-\infty; \frac{-d}{c}[$ et $]\frac{-d}{c}; +\infty[$
$x \mapsto \sqrt{x}$ (fonction racine carrée)	$[0; +\infty[$
les fonctions exponentielles	$\mathbb{R}$
la fonction logarithme	$]0; +\infty[$

De plus, toutes fonctions définies à partir d'une expression utilisant les précédentes fonctions est continue sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.

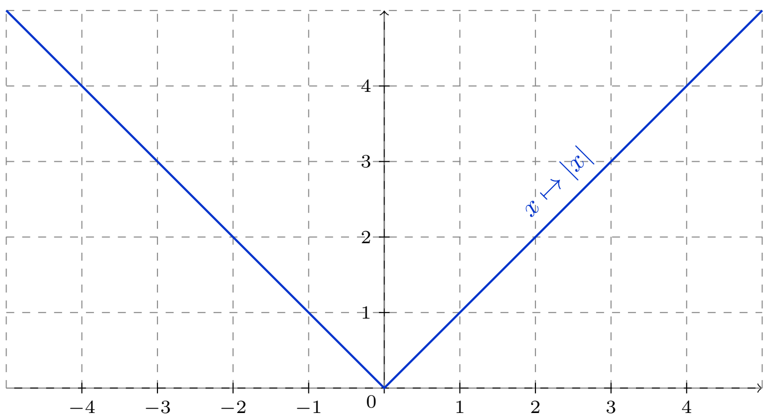
Exemple. La fonction f définie par $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{1-x}$ sur l'intervalle $]1; +\infty[$ est continue.

Propriété 3.11. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I, alors elle est continue sur cet intervalle.

Remarque. Il existe des fonctions continues mais qui ne sont pas dérivables. Par exemple la fonction valeur absolue

$$x \mapsto |x| = \text{abs}(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

n'est pas dérivable mais continue :



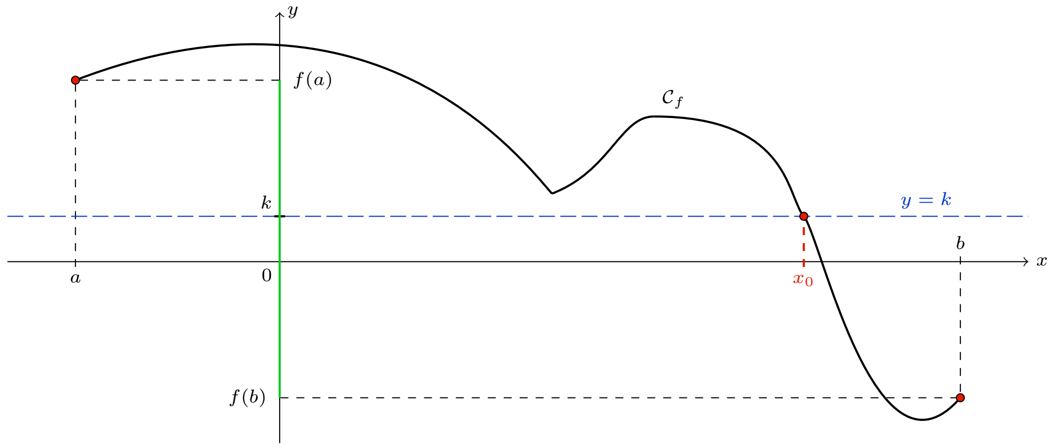
Plus précisément, la fonction valeur absolue n'est pas dérivable uniquement en 0. Il y a une infinité de droites « tangentes » à la courbe représentative au point d'abscisse 0.

Théorème 3.12 (des valeurs intermédiaires)**.** Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$, avec $a < b$, une fonction continue et k un nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ alors l'équation

$$f(x) = k$$

sur l'intervalle $[a; b]$, admet au moins une solution x_0.

Remarque. Le théorème des valeurs intermédiaires nous dit, moralement, que si l'on trace le graphe d'une fonction f en partant du point de coordonnées $(a; f(a)$ pour aller du point $(b, f(b))$ sans « lever le crayon » et si on se donne k un nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ alors nécessairement on coupe l'axe horizontale d'équation $y = c$.



Ce qui implique que k admet au moins un antécédent par la fonction f.

Une conséquence :

Propriété 3.13. Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$, avec $a < b$, une fonction **continue et strictement monotone**. Soi k un nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ alors l'équation

$$f(x) = k$$

sur l'intervalle $[a; b]$, admet **une unique** solution x_0.

Un cas particulier :

Propriété 3.14. Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $I = [a; b]$.
Si $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $[a; b]$.

Pour rechercher la solution de l'équation $f(x) = 0$, on peut par exemple mettre en oeuvre l'**algorithme de dichotomie** :

Variables : a, b sont des nombres
Entrées : Saisir a, b
Traitement :
Si $a > b$ **alors**
    c prend la valeur b
    b prend la valeur a
    a prend la valeur c
Fin Si
Si $f(b) \times f(a) \leq 0$ **alors**
    Tant que $b - a > 10^{-5}$ **faire**
        Si $f(\frac{a+b}{2}) \times f(a) \leq 0$ **alors**
            b prend la valeur $\frac{a+b}{2}$
        Sinon
            a prend la valeur $\frac{a+b}{2}$

```
        Fin Si
    Fin Tant que
Fin Si
Sorties : Afficher a et b
```

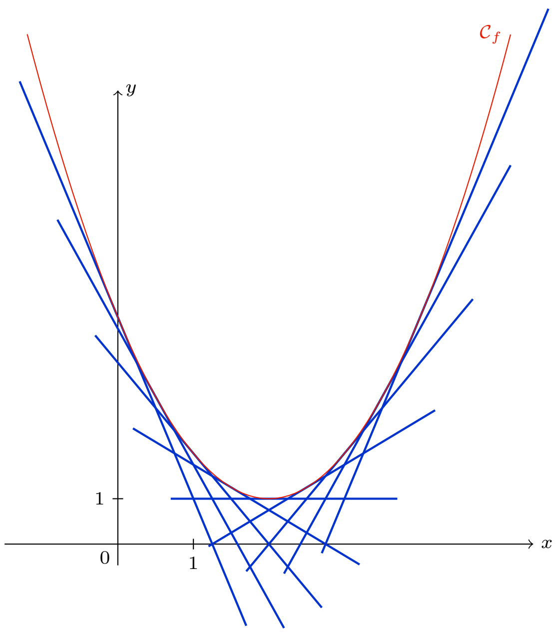
Cet algorithme réduit l'intervalle $[a; b]$ de telle sorte qu'il soit de longueur inférieure ou égale à 10^{-5} et contenant la solution à l'équation $f(x) = 0$. Ainsi, le nombre a retourné est une valeur approchée par défaut de la solution à 10^{-5} près.

Exercice : Modifier l'algorithme pour qu'il retourne une valeur approchée par excès et au millième près.

4 Convexité-concavité (2S)

- Reconnaître graphiquement des fonctions convexes, concaves.
- Utiliser le lien entre convexité et sens de variation de la dérivée.
- Reconnaître graphiquement un point d'inflexion : Un point d'inflexion est un point où la représentation graphique traverse sa tangente.
- Positions relatives des courbes représentatives des fonctions $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto x$.

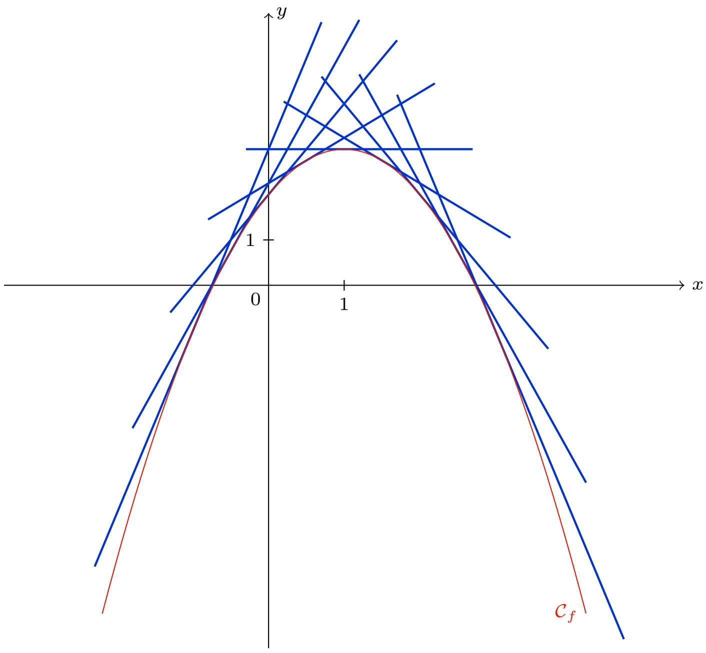
Exemple. Considérons la fonction $f : [-1;\, 5] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - 4x + 5$. Ci-dessous une représentation graphique de la courbe représentative de la fonction f ainsi que quelques unes de ses tangentes en différents points.



On observe que la courbe représentative de la fonction f est **au dessus** de chacune de ses tangentes.

Définition 4.1. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable est **convexe** sur l'intervalle I si sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.

Exemple. Considérons la fonction $f : [-1;\, 5] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = -x^2+2x+2$. Ci-dessous une représentation graphique de la courbe représentative de la fonction f ainsi que quelques unes de ses tangentes en différents points.

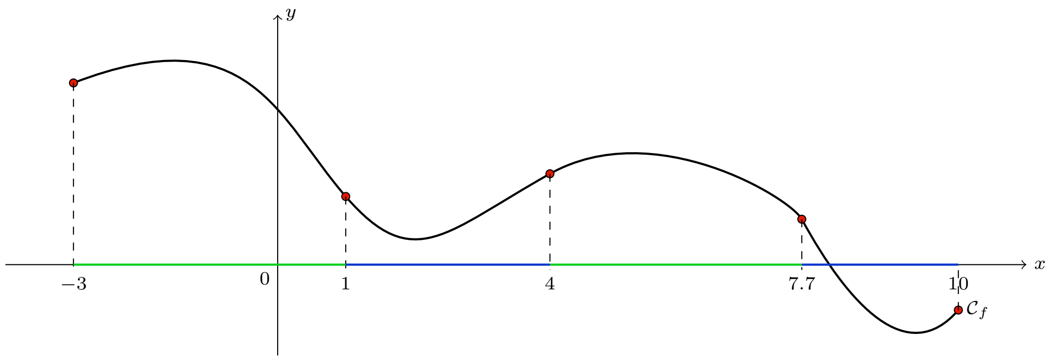


On observe que la courbe représentative de la fonction f est **en dessous** de chacune de ses tangentes.

Définition 4.2. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable est **concave** sur l'intervalle I si sa courbe représentative est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.

Remarque.
- On peut définir d'une autre manière la notion de fonction concave : un fonction f est concave sur un intervalle I si la fonction $g = -f$ est convexe sur I.
- Étudier la convexité d'une fonction c'est déterminer sur quel(s) intervalle(s), elle est convexe et sur quel(s) intervalle(s), elle est concave.

Exemple. Considérons une fonction $f : [-3; 10] \to \mathbb{R}$ dont le graphe est donné ci-dessous.



On observe que la fonction f est :
- convexe sur les intervalles $[1; 4]$ et $[7.7; 10]$;
- concave sur les intervalles $[-3; 1]$ et $[4; 7.7]$.

Remarque. Les seules fonctions qui soient à la fois convexes et concaves sont les fonctions affines.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et a dans I, alors l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse a est

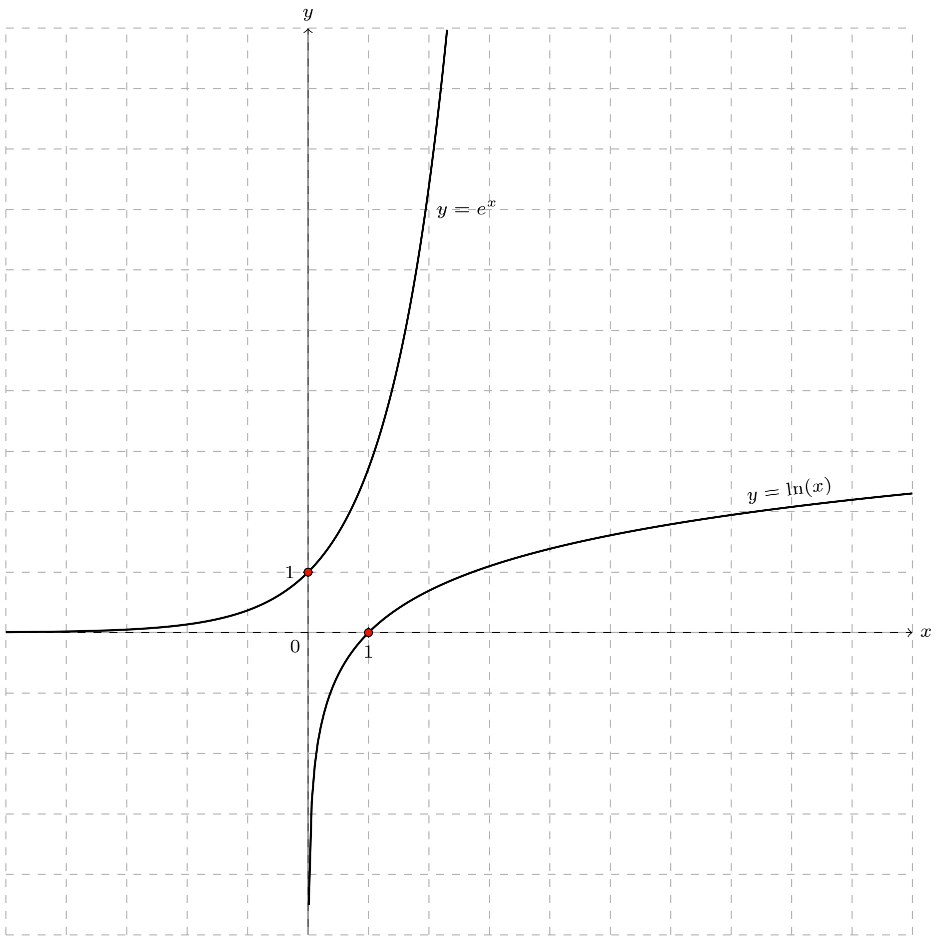
$$y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$$

Si on interprète formellement la propriété géométrique intervenant dans la définition de la convexité, on déduit que :

Propriété 4.3. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et a un réel de I. Pour tout nombre réel x dans I, on a :

- si f est convexe, $f(x) \geq f'(a) \times (x - a) + f(a)$;
- si f est concave, $f(x) \leq f'(a) \times (x - a) + f(a)$;

Rappelons les représentations graphiques de la fonction exponentielle et du logarithme :



Propriété 4.4.

- La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$;
- La fonction logarithme est concave sur $]0; +\infty[$.

Une conséquence des deux propriétés précédentes :

Propriété 4.5.

- Pour tout nombre réel x, on a $e^x \leq x + 1$;
- Pour tout nombre réel $x > 0$, on a $\ln(x) \leq x - 1$.

Propriété 4.6. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et a, b deux nombres dans I, alors :

- si f est convexe : $f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$;

- si f est concave : $f(\frac{a+b}{2}) \geq \frac{f(a)+f(b)}{2}$;

Propriété 4.7.
- Si f est une fonction convexe sur un intervalle I alors tout arc de courbe est situé en dessous de la corde correspondante.
- Si f est une fonction concave sur un intervalle I alors tout arc de courbe est situé au-dessus de la corde correspondante.

4.1 Lien entre la convexité et les variations de la dérivée

Propriété 4.8. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I.
1. Si la dérivée f' est croissante sur I alors la fonction f est convexe sur I ;
2. Si la dérivée f' est décroissante sur I alors la fonction f est concave sur I.

On admettra pour la fin de ce chapitre que la dérivée de toutes les fonctions dérivables considérées est aussi dérivable.

Définition 4.9. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable (deux fois). La fonction dérivée de la fonction f' est appelée **fonction dérivée seconde** de la fonction f et se note f'' :

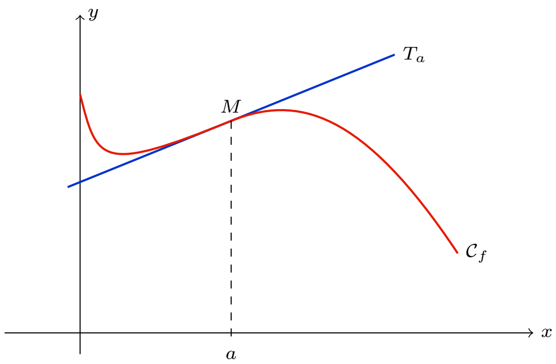
$$f'' = (f')'$$

De la propriété précédente, on déduit le fait suivant :

Propriété 4.10. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I.
1. Si la dérivée seconde f'' est positive sur I alors la fonction f est convexe sur I ;
2. Si la dérivée seconde f'' est négative sur I alors la fonction f est concave sur I.

4.2 Point d'inflexion

Définition 4.11. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I et a un réel de I. Le point M d'abscisse a de la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f est appelé **un point d'inflexion** si la courbe $\mathcal{C}_f$ traverse la tangente au point d'abscisse a.



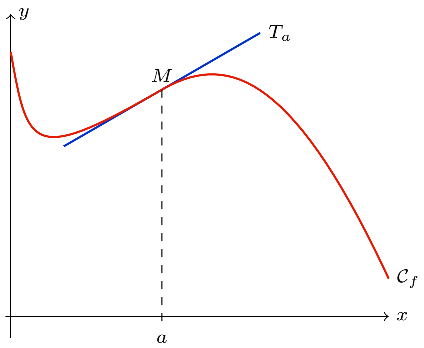
Propriété 4.12. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I et a un réel de I.
Supposons que f change de convexité au voisinage du point d'abscisse a, alors le point d'abscisse a de la courbe $\mathcal{C}_f$ est un point d'inflexion.

Propriété 4.13. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I et a un réel de I.
Supposons que f'' s'annule en a et change de signe au voisinage du nombre a, alors le point d'abscisse a de la courbe $\mathcal{C}_f$ est un point d'inflexion.

En résumé :

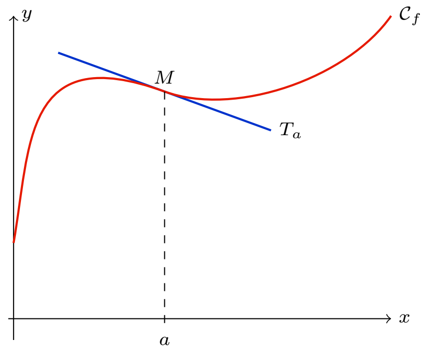
abscisse du point d'inflexion

	x		a	
dérivée seconde	$f''(x)$	+	0	-
dérivée	$f'(x)$	$\nearrow$		$\searrow$
fonction	$f(x)$	convexe		concave



abscisse du point d'inflexion

x		a	
$f''(x)$	-	0	+
$f'(x)$	$\searrow$		$\nearrow$
$f(x)$	concave		convexe



4.3 Application : Coût marginal

Supposons qu'on exprime le cout total de production par une fonction $C : I \to \mathbb{R}$ de la quantité produite.

Le **coût marginal** est la variation du coût total qui serait occasionnée par la production d'une unité supplémentaire. Il dépend donc du niveau de production atteint et il est lui aussi une fonction de la quantité produite. Lorsque la quantité est un entier (par exemple, nombre de pairs de chaussure), alors :

$$C_m(q) = \frac{\Delta C(q)}{\Delta q} = C(q+1) - C(q)$$

et lorsque la quantité peut être un nombre réel (par exemple, volume en litres) et la fonction coût C est dérivable, alors :

$$C_m(q) = \frac{\partial C(q)}{\partial q} = C'(q)$$

Le coût marginal joue un rôle fondamental dans l'analyse des décisions de production ; lorsque le coût marginal est négatif pour une production donnée, le chef d'entreprise peut en effet s'interroger sur l'opportunité d'augmenter sa production.

En revenant aux deux tableaux de la page précédente, on remarque que si $C_m = C'$ est la dérivée du coût total, alors la dérivée seconde du coût total C'' est égale la dérivée du coût marginal C'_m. D'où

Propriété 4.14. Soit $C : I \to \mathbb{R}$ une fonction coût dérivable sur I et $C_m : I \to \mathbb{R}$ le coût marginal définie par $C_m(q) = C'(q)$ pour tout q dans I.
Supposons que la fonction coût admet un point d'inflexion d'abscisse a, alors le coût marginal atteint un extremum en a.

5 Probabilités conditionnelles (2,5S)

- Conditionnement par un événement de probabilité non nulle. Notation $\mathbb{P}_A(B)$.
- Construire un arbre pondéré en lien avec une situation donnée.
- Exploiter la lecture d'un arbre pondéré pour déterminer des probabilités.
- Calculer la probabilité d'un événement connaissant ses probabilités conditionnelles relatives à une partition de l'univers : formule des probabilités totales.
  Le vocabulaire lié à la formule des probabilités totales n'est pas un attendu du programme, mais la mise en oeuvre de cette formule doit être maitrisée.

5.1 Rappels :

Définition 5.1. Une **expérience aléatoire** est une expérience vérifiant les deux conditions suivantes :

- elle comporte plusieurs issues envisageables.
- on ne peut prévoir l'issue lorsqu'on réalise l'expérience.

On se restreindra aux expériences comportant un nombre fini d'issues.
L'**univers** (noté Ω) de l'expérience aléatoire est l'ensemble des issues de cette expérience.
Un **événement** est un ensemble d'issues de l'expérience aléatoire.
Les **événements élémentaires** sont les événements réduits à une unique issue de l'expérience.

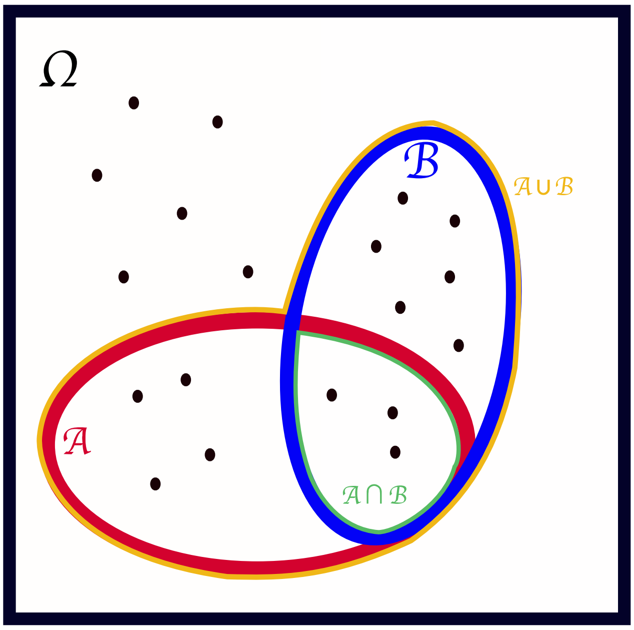
Exemple. Le jet d'un dé, tirage d'une carte dans un jeu de carte, tirage d'une boule dans une urne.

Définition 5.2. On appelle **événement contraire** d'un événement A, l'événement noté $\bar{A}$ qui contient l'ensemble des issues n'appartenant pas A.

Définition 5.3. Soient A et B deux événements d'une expérience aléatoire donnée.

- L'intersection des deux événements A et B est l'événement constitué des issues qui sont dans A et dans B, noté $A \cap B$.
- L'union des deux événements A et B est l'événement constitué des issues de A ou de B (au sens large), noté $A \cup B$.
- On dit que A est inclus dans B, noté $A \subset B$ si toutes les issues de A sont aussi des issues de B.

L'événement $A \cap B$ se réalise lorsque les deux événements à la fois se réalisent.
L'événement $A \cup B$ se réalise lorsqu'au moins un des deux événements se réalise.



Définition 5.4. Dans une expérience aléatoire, deux événements E et E' sont dit **incompatibles** s'ils ne partagent pas d'issue commune (i.e : leur intersection est vide).

Définition 5.5. Une (théorie de) **probabilité** associée à une expérience aléatoire est une application qui à un événement E associe un nombre réel, noté $\mathbb{P}(E)$ telle que :

1. $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$,
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (il se passe certainement quelque chose),
3. Pour tous A et B deux événements incompatibles, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Étant donné un événement E, le nombre $\mathbb{P}(E)$ donne (mesure) les chances de réussite de E. Plus $\mathbb{P}(E)$ est proche de 1, plus l'événement E se réalisera.
La probabilité de l'événement vide $\emptyset$ est nul ($\mathbb{P}(\emptyset) = 0$). Moralement, lorsqu'on réalise une expérience aléatoire, il se passe toujours quelque chose.

Propriété 5.6 (loi des grands nombres)**.** Lors d'une expérience répétée n fois, les fréquences obtenues d'un événement E de l'expérience se rapprochent de la variable théorique $\mathbb{P}(E)$, la probabilité de l'événement E.

Propriété 5.7. Dans une expérience aléatoire, supposons que l'univers Ω se décompose en n issues : $x_1, \ldots, x_n$ (formellement, $\Omega = \{x_1, \ldots, x_n\}$). Posons $p_i = \mathbb{P}(x_i)$ la probabilité que l'issue x_i se réalise. Alors,

$$p_1 + \ldots + p_n = 1$$

La somme des probabilités des issues possibles d'une expérience aléatoire vaut toujours un. Ce fait, peut être utilisé comme un premier test de vraisemblance d'une théorie de probabilité proposée pour étudier une expérience aléatoire !

Définition 5.8. Lorsque, dans une expérience aléatoire, toutes les issues élémentaires ont la même probabilité de se réaliser, on dit que l'expérience est **équiprobable**.

Exemple. Lancé d'un dé équilibré, lancé d'une pièce équilibrée.

Soit A un événement d'une expérience aléatoire, le nombre d'issues que contient A est appelé le cardinal de A et il est noté $\text{card}(A)$.

Propriété 5.9. Lors d'une expérience aléatoire ayant n issues équiprobables :

- La probabilité de chaque événement élémentaire est $\frac{1}{n}$.
- La probabilité d'un événement A est

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{n} = \frac{\text{nombre d'issues favorables à A}}{\text{nombre d'issues possibles}}$$

Propriété 5.10. La probabilité de l'événement contraire d'un événement A est :

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

Propriété 5.11. Soient A et B deux événements. Si $A \subset B$ alors, $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

Moralement, la propriété précédente nous dit que plus un événement contient d'issues plus il est probable.

Exemple. On considère l'expérience aléatoire du jet d'un dé. Soit A l'événement "le résultat est un multiple de trois" et B l'événement "le résultat est un nombre pair". On note que $A = \{3, 6\}$ et $B = \{2, 4, 6\}$, ainsi

- l'intersection de A et B est $A \cap B = \{6\}$.
- l'union de A et B est $A \cap B = \{2, 3, 4, 6\}$.

Théorème 5.12. Si A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire alors :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

5.2 Probabilité conditionnelle

Dans l'univers Ω d'une épreuve aléatoire, on considère un événement A de probabilité non nulle ($\mathbb{P}(A) \neq 0$).

Définition 5.13. Pour tout événement B, on appelle **probabilité conditionnelle de B sachant A** le nombre

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Propriété 5.14.

1. L'égalité précédente permet d'exprimer la probabilité de l'intersection
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}_A(B),$$
2. $0 \leq \mathbb{P}_A(B) \leq 1$,
3. $\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(\bar{B}) = 1$.

Propriété 5.15. Dans une situation d'équiprobabilité, on a
$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\text{nombre d'issues de } A \cap B}{\text{nombre d'issues de A}}$$

Exemple.

Les élèves d'une classe sont répartis suivant le tableau ci-contre.

	Fille (F)	Garçon (G)	Total
Demi-pensionnaire (D)	12	10	22
Externe (E)	6	8	14
Total	18	18	36

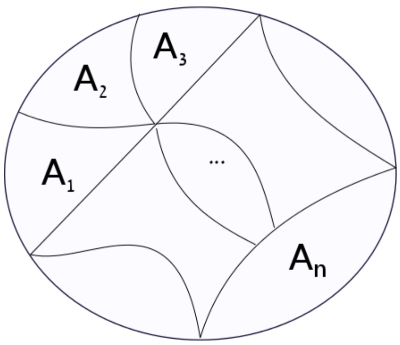
On choisit au hasard un de ces élèves.

La probabilité que l'élève choisi soit une fille est $\mathbb{P}(F) = \frac{18}{36} = 0.5$.

La probabilité que l'élève choisi soit une fille demi-pensionnaire est $\mathbb{P}(D \cap F) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

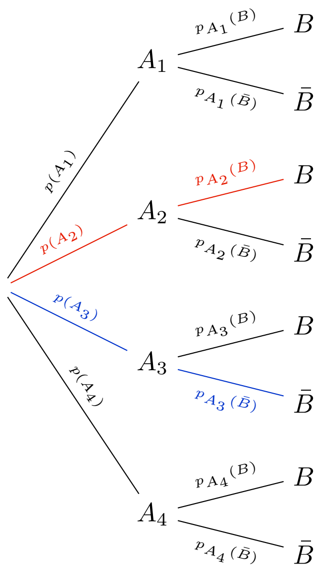
Sachant que l'élève choisi est une fille, la probabilité qu'elle soit demi-pensionnaire est $\mathbb{P}_F(D) = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$. On peut vérifier que l'on a bien $\mathbb{P}_F(D) = \frac{\mathbb{P}(D \cap F)}{\mathbb{P}(F)}$.

Dans l'univers Ω d'une épreuve aléatoire, on considère un événement B et n événements A_1, A_2, $\ldots$, A_n de probabilités non nulles, formant une **partition** de Ω. C'est-à-dire que les événements A_i sont deux à deux incompatibles et leur union est l'univers entier. Graphiquement :



En d'autres termes, une partition A_1, A_2, $\ldots$, A_n est une manière de classer les issues possibles de notre expériences en n catégories d'événements notées A_1 à A_n.

Sur un **arbre pondéré de probabilités** (réalisé ci-desous pour $n = 4$), une **branche** est représentée par un segment (portant une probabilité), un **noeud** est la jonction de deux ou plusieurs branches, et un **chemin** est une succession de branches allant du noeud initial de l'arbre à l'une de ses extrémités.
Chaque chemin correspond à l'évènement intersection des événements figurant sur ce chemin (par exemple $A_2 \cap B$ pour le 3^e chemin).

Arbre	Événement	Probabilité
	$A_2 \cap B$	$\mathbb{P}(A_2 \cap B) = \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_2}(B)$
	$A_3 \cap \bar{B}$	$\mathbb{P}(A_3 \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(A_3) \times \mathbb{P}_{A_3}(\bar{B})$

Propriété 5.16. À partir de là, pour les calculs, on utilise les règles suivantes :

1. La **somme des probabilités** portées sur les branches issues d'un même noeud est égale à 1.
2. La **probabilité de l'événément correspondant à un chemin** est le produit des probabilité portées sur ses branches.
3. Le **probabilité d'un événement** est la somme des probabilités des événements correspondant aux chemins qui y aboutissent.

Dans l'exemple précédent, avec $n = 4$, la troisième propriété s'écrit ainsi :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(B) + \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_2}(B) + \mathbb{P}(A_3) \times \mathbb{P}_{A_3}(B) + \mathbb{P}(A_4) \times \mathbb{P}_{A_4}(B)$$

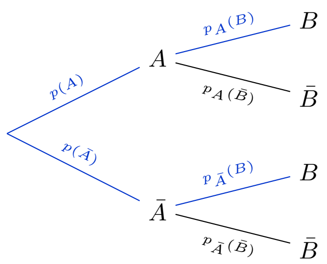
Propriété 5.17 (Formule des probabilités totales, cas $n = 2$)**.** Soit A et B deux événements, avec A de probabilité non nulle ($\mathbb{P}(a) \neq 0$), alors

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\bar{A}) \times \mathbb{P}_{\bar{A}}(B)$$

Une illustration avec un arbre pondéré de probabilité :

	$A \cap B$	$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$
	$\bar{A} \cap B$	$\mathbb{P}(\bar{A} \cap B) = \mathbb{P}(\bar{A}) \times \mathbb{P}_{\bar{A}}(B)$
	$B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$	$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$

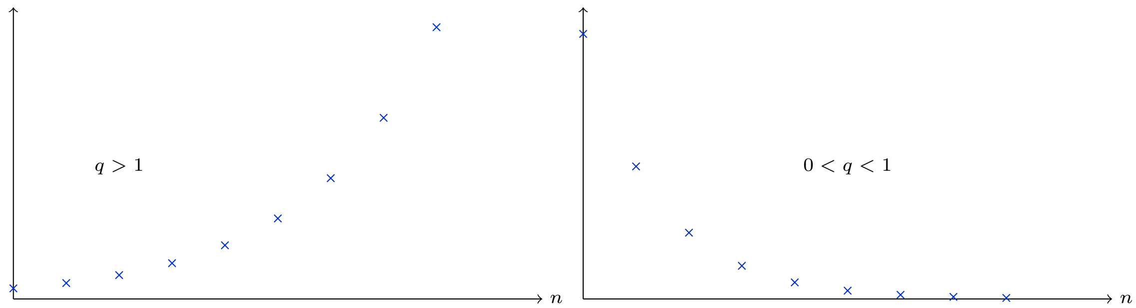
Propriété 5.18 (Formule des probabilités totales)**.** Soit A_1, A_2, …, A_n des événements d'une expérience aléatoire. Supposons qu'ils forment une partition de l'univers et que chacun d'eux à une probabilité non nulle. Soit B un événement quelconque, alors

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(B) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}_{A_2}B + \ldots + \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(B)$$

6 Fonctions exponentielles (2,5S)

6.1 Fonction exponentielle de base q

On rappelle que si (u_n) est une suite géométrique de raison $q > 0$, alors $u_n = u_0\, q^n$. On avait vu que la suite (u_n) est strictement décroissante lorsque $0 < q < 1$ et elle est strictement croissante lorsque $q > 1$.



On peut définir une fonction dont le graphe passe par le précédent nuage de points :

Propriété 6.1 (et définition)**.** Soit $q > 0$ un nombre réel. On considère le nuage de points associé à la suite géométrique $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Il existe **une unique** fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes :

1. La courbe représentative de f réalise un prolongement continu du nuage (c'est-à-dire, $f(n) = q^n$ pour tout entier naturel n) ;
2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$;
3. pour tous nombres réels x et y, $f(x + y) = f(x) \times f(y)$.

Cette fonction est appelée **la fonction exponentielle** de base q. On note pour tout nombre réel x,

$$f(x) = q^x$$

Remarques.

- La propriété nous dit entre autre qu'on est capable (à l'aide la calculatrice) de calculer q^x quel que soient $q > 0$ et x un nombre réel. De plus la fonction $x \mapsto q^x$ est dérivable.
- La relation fonctionnelle $f(x + y) = f(x) \times f(y)$ peut donc se réécrire ainsi :

$$q^{x+y} = q^x\, q^y$$

Conséquences de la relation fonctionnelle :

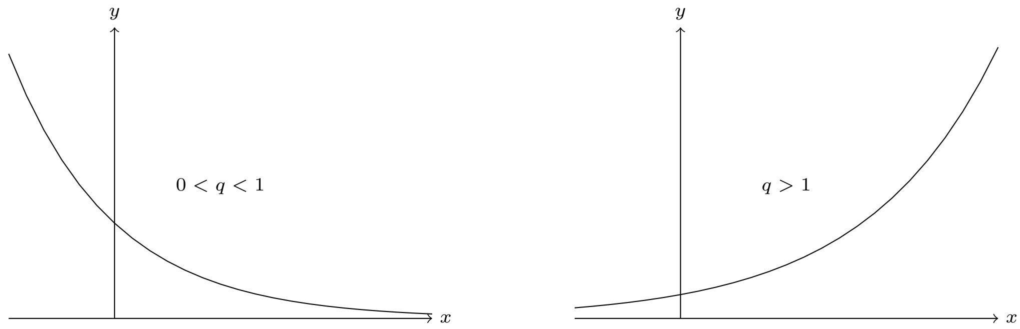
Propriété 6.2. Soit $q > 0$, a et b des nombres réels et n un entier naturel, alors :

1. $1^a = 1$;
2. $q^{a+b} = q^a\, q^b$;
3. $q^{-a} = \frac{1}{q^a}$;
4. $\frac{q^a}{q^b} = q^{a-b}$;
5. $q^{\frac{a}{2}} = \sqrt{q^a}$;
6. $q^{na} = (q^a)^n$.

Propriété 6.3. Soit $q > 0$ un nombre réel, alors quel que soit x, le nombre q^x est **strictement positif**.

Propriété 6.4. On admet que la fonction $x \mapsto q^x$, définie sur $\mathbb{R}$, est :

- strictement décroissante lorsque $0 < q < 1$;
- constante lorsque $q = 1$;
- strictement croissante lorsque $q > 1$.



Exemple.

- La fonction $x \mapsto 0.9^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ car $0 < 0.9 < 1$;
- La fonction $x \mapsto 2.4^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car $1 < 2.4$.

Une conséquence,

Propriété 6.5. Si $q \neq 1$, alors pour tous nombres réels a et b, on a :

$$q^a = q^b \quad \text{si et seulement si} \quad a = b$$

6.2 La fonction exponentielle

Propriété 6.6 (et définition)**.** Il existe une unique fonction $x \mapsto q^x$ qui admet pour nombre dérivé 1 en 0.
On note e la base de cette fonction exponentielle et $e \simeq 2,718$.
On dit que la fonction exponentielle de base e est **la** fonction exponentielle.
Elle se note exp : $x \mapsto e^x$.

En particulier, on a :

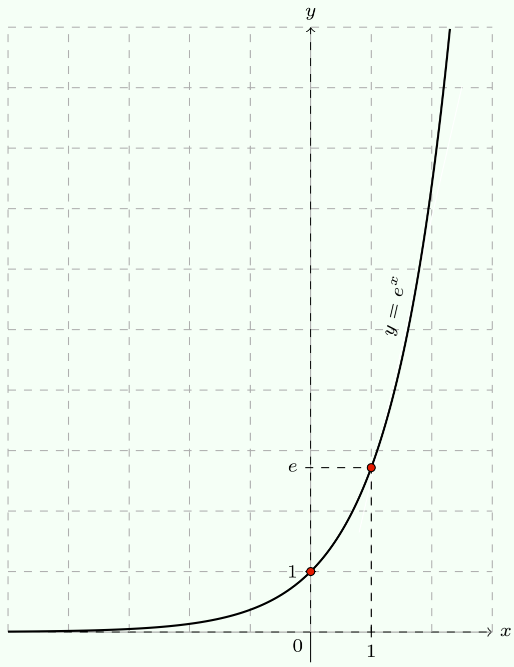
Propriété 6.7. Pour tous x, x' dans $\mathbb{R}$, on a

1. $e^{x+x'} = e^x\, e^{x'}$;
2. $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$;
3. $e^{x-x'} = \frac{e^x}{e^{x'}}$;
4. $e^{\frac{x}{2}} = \sqrt{e^x}$;
5. $e^{nx} = (e^x)^n$.

Propriété 6.8. La fonction exponentielle est égale à sa fonction dérivée. C'est-à-dire : pour tout nombre réel x, $\exp'(x) = \exp(x)$.

Formellement, on a : $(e^x)' = e^x$. D'autre part, on a vu que la fonction exponentielle est strictement positive ainsi sa dérivée, qui est égale à la fonction exponentielle elle-même, l'est aussi et on a :

Propriété 6.9. La fonction exponentielle exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



7 Fonction logarithme népérien (3S)

7.1 Définition

Rappelons que la fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ est continue strictement croissante. Soit $k > 0$ un nombre réel alors, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe *un unique réel* x_0 tel que $e^{x_0} = k$. Ce réel x_0 va être noté $\ln(k)$, ainsi on a

$$e^{\ln(k)} = k$$

Ce nombre $\ln(k)$ va être appelé le logarithme népérien du nombre k :

Définition 7.1 (théorème)**.** On admet qu'il existe une unique fonction appelée **logarithme népérien**, notée ln, telle que :

- ln est définie sur $]0;\ +\infty[$;
- pour tout nombre réel $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$.

Comme, $e^0 = 1$ et $e^1 = e$, on déduit que $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$.

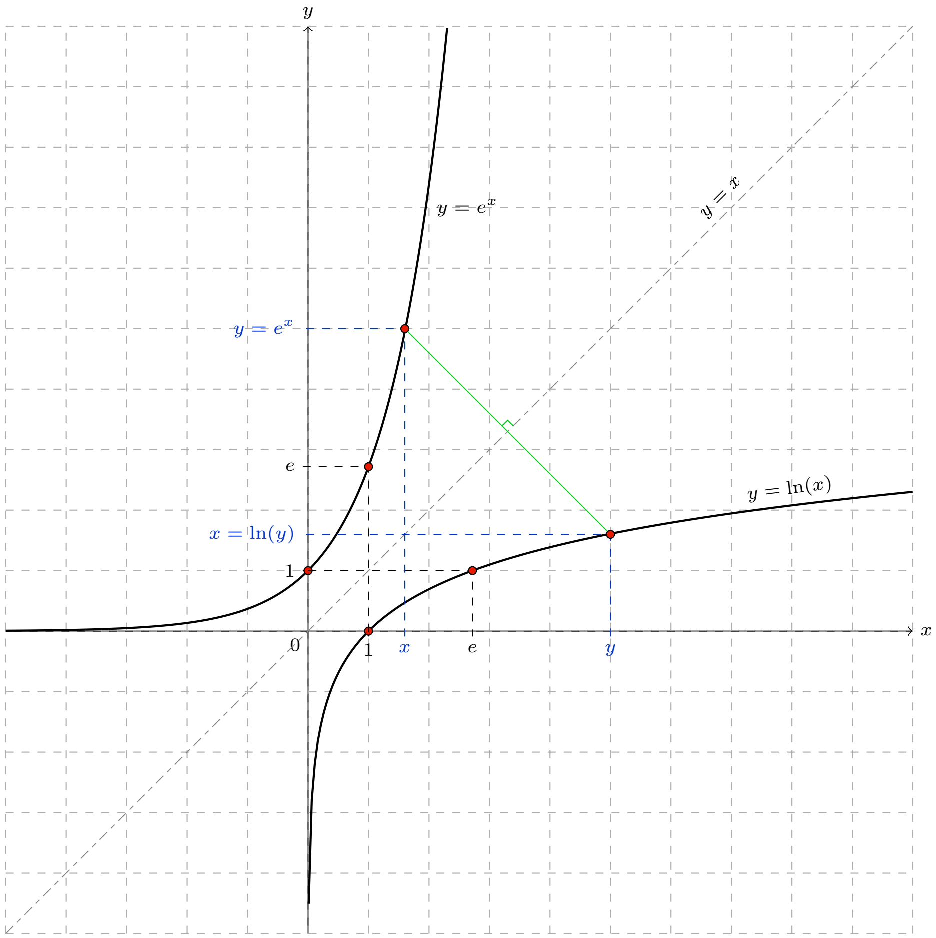
Propriété 7.2.

1. Pour tout $y > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on a $y = e^x \iff x = \ln(y)$;
2. Pour tout $x \in R$: $\ln(e^x) = x$.

Remarque. La relation entre la fonction logarithme népérien et l'exponentielle est analogue à celle déjà connue entre la fonction carrée et la racine carrée :

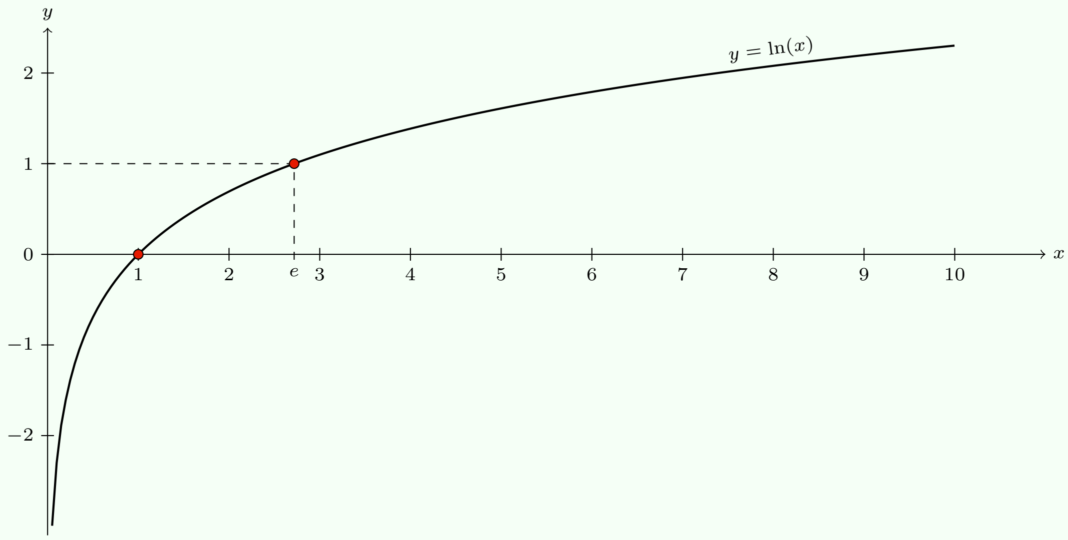
Fonction carrée et racine carrée	Logarithme népérien et exponentielle
Si $x > 0$, $(\sqrt{x})^2 = x$	Si $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$
Si $x > 0$, $\sqrt{x^2} = x$	Si $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$

On dit que la fonction logarithme népérien est la **fonction inverse** de la fonction exponentielle.
De plus de la première relation de la propriété précédente, on déduit la chose suivante : si un point $M(x;\ y)$ appartient au graphe de la fonction exponentielle (c'est-à-dire, si $y = e^x$) alors le point $M'(y;\ x)$ appartient au graphe de la fonction logarithme népérien car $x = \ln(y)$. Ainsi **le graphe du logarithme népérien** s'obtient en prenant le **symétrique** du graphe **de l'exponentielle par rapport à la première bissectrice** d'équation $y = x$:



En résumé,

Propriété 7.3. La fonction logarithme ln est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$.



7.2 Propriétés

Propriété 7.4. Soit a et b deux nombres de l'intervalle $]0;\ +\infty[$. Alors,

1. $\ln(a) = \ln(b)$ si et seulement si $a = b$;
2. $\ln(a) < \ln(b)$ si et seulement si $a < b$.

En particulier : $\ln(a) = 0$ équivaut à $a = 1$

- $\ln(a) = 0$ équivaut à $a = 1$
- $\ln(a) < 0$ équivaut à $0 < a < 1$
- $\ln(a) > 0$ équivaut à $a > 1$

Propriété 7.5. On admet que pour tout $a, b > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on a

1. $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$; *(le logarithme du produit est la somme des logarithmes)*
2. $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a)$;
3. $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$;
4. $\ln(a^x) = x \times \ln(a)$.

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. Posons pour tout entier naturel n, $v_n = \ln(u_n)$.
Soit n un entier naturel, appliquons le logarithme népérien à la relation de récurrence qui caractérise (u_n) :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= q u_n \\ \ln(u_{n+1}) &= \ln(q\, u_n) \\ \ln(u_{n+1}) &= \ln(u_n) + \ln(q) \\ v_{n+1} &= v_n + \ln(q) && \text{par définition de la suite } (v_n) \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = \ln(q)$.

Propriété 7.6. Si la suite (u_n) est une suite géométrique alors la suite (v_n), définie par $v_n = \ln(u_n)$ pour tout entier n, est arithmétique.

7.3 Dérivée et tableau de variation de la fonction ln

Théorème 7.7. Le fonction logarithme népérien ln est dérivable sur $]0; +\infty[$. De plus, pour tout nombre réel $x > 0$, on a :

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Remarque.

- La dérivée du logarithme népérien est la fonction inverse.
- Comme conséquence, on retrouve le fait que la fonction ln est continue sur $]0; +\infty[$.

Théorème 7.8. Soit $u : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I. La fonction f définie sur I par

$$f(x) = \ln(\, u(x)\,)$$

est dérivable sur I et pour tout réel x dans I, on a :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Remarque. La précédente relation peut être réécrite formellement ainsi :

$$(\ \ln(u)\ )' = \frac{u'}{u}$$

7.4 Résolution d'une équation du type $x^n = k$

Soit k un nombre réel strictement positif et n un entier naturel.
Supposons qu'il existe $x > 0$ vérifiant la condition $x^n = k$ et appliquons le logarithme à cette équation :

$$\begin{aligned}
x^n &= k \\
\ln(x^n) &= \ln(k) && \text{on applique le logarithme} \\
n\ \ln(x) &= \ln(k) && \text{logarithme d'une puissance} \\
\ln(x) &= \frac{\ln(k)}{n} \\
e^{\ln(x)} &= e^{\frac{\ln(k)}{n}} && \text{on applique l'exponentielle} \\
x &= e^{\frac{\ln(k)}{n}}
\end{aligned}$$

Donc si $x > 0$ est solution de $x^n = k$, alors nécessairement $x = e^{\frac{\ln(k)}{n}}$.

Propriété 7.9. Si k est un réel strictement positif et si n est un entier naturel non nul alors l'équation

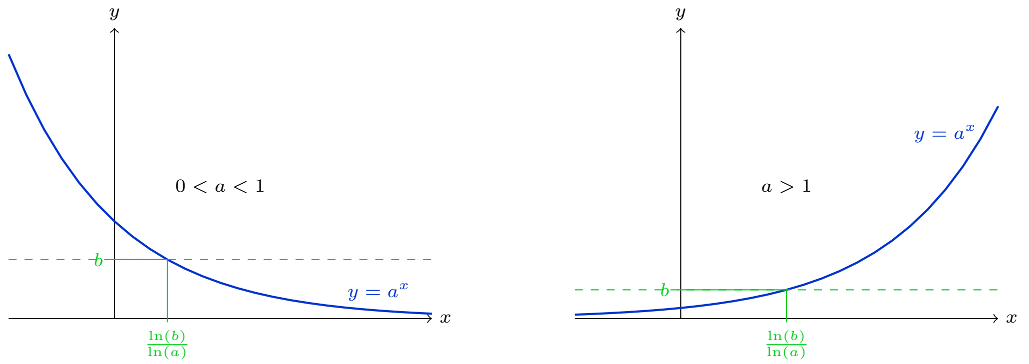
$$x^n = k$$

admet une unique solution x dans $]0;+\infty[$:

$$\mathcal{S} = \{e^{\frac{\ln(k)}{n}}\}$$

Applications : équations et inéquations (hors programme)
Soit a et b des nombres réels strictement positifs tels que $a \neq 1$.

Propriété 7.10. L'équation $a^x = b$, d'inconnue x, a une unique solution dans $\mathbb{R}$: le nombre $\frac{\ln(b)}{\ln(a)}$.



Propriété 7.11. L'ensemble des solutions de l'inéquation $a^x < b$ est :

- dans le cas $0 < a < 1$, l'intervalle $]\frac{\ln(b)}{\ln(a)};\ +\infty[$;
- dans le cas $1 < a$, l'intervalle $]-\infty;\ \frac{\ln(b)}{\ln(a)}[$;

Propriété 7.12. L'ensemble des solutions de l'inéquation $a^x > b$ est :

- dans le cas $0 < a < 1$, l'intervalle $]-\infty;\ \frac{\ln(b)}{\ln(a)}[$;
- dans le cas $1 < a$, l'intervalle $]\frac{\ln(b)}{\ln(a)};\ +\infty[$;

8 Lois de probabilité à densité (3S)

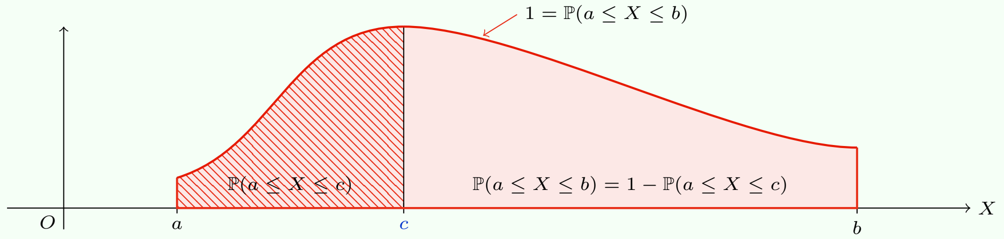
8.1 Définition et propriétés

Définition 8.1.
- On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est une **densité de probabilité** sur I lorsque :
  — la fonction f est continue sur I ;
  — la fonction f est à valeurs positives sur I ;
  — l'aire sous la courbe de f est égale à une unité d'aire.
- On dit que la **variable aléatoire** X suit la loi de densité f sur l'intervalle I lorsque, pour tout $a < b$ dans l'intervalle I, la probabilité que X soit compris entre a et b s'obtient ainsi :

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Propriété 8.2. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de densité f sur l'intervalle $[a; b]$, alors pour tout nombre réel c dans $[a; b]$:

1. $\mathbb{P}(X = a) = \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$;
2. $\mathbb{P}(a \leq X \leq c) = 1 - \mathbb{P}(c \leq X \leq b)$. (événement contraire)



Remarque. Le premier point de la précédente, nous dit que la probabilité qu'une variable aléatoire X de densité f prenne un valeur c précise est nulle.
Par contre, en général, il existe un $\epsilon > 0$ tel que la probabilité $\mathbb{P}(c - \epsilon \leq X \leq x + \epsilon)$, que X soit à une distance inférieur à ϵ de c, soit strictement positive.

Définition 8.3. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de densité f sur l'intervalle $[a; b]$. On associe la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$$

pour tout nombre réel t. Cette fonction F est appelée **fonction de répartition de** F.

Remarque. On peut montrer que $F(a) = 0$, $F(b) = 1$ et que F est croissante.

Définition 8.4. Soit X une variable aléatoire de densité f sur l'intervalle I. Soit J et K deux intervalles inclus dans I, supposons que $\mathbb{P}(X \in J) \neq 0$. On définit la probabilité conditionnelle de l'événement $\{X \in K\}$ sachant $\{X \in J\}$ ainsi :

$$\mathbb{P}_{X \in J}(X \in K) = \frac{\mathbb{P}(X \in J \cap K)}{\mathbb{P}(X \in J)}.$$

8.2 Lois uniformes

Soit $a < b$ deux nombres réels et k un nombre. Du chapitre sur l'intégration, on déduit que

$$\begin{aligned} \int_a^b k\,\mathrm{d}t &= 1 \\ (b-a)k &= 1 \\ k &= \frac{1}{b-a} \end{aligned}$$

D'où la propriété suivante.

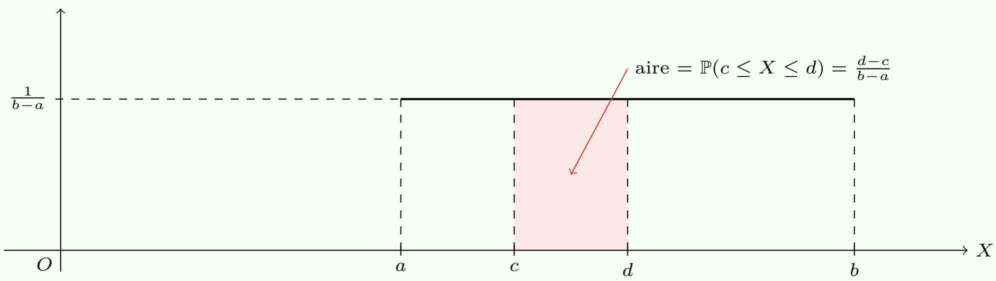
Propriété 8.5 (et définitiion)**.** Soit $a < b$ deux nombres réels, on définit $f : [a;\, b] \to \mathbb{R}$ la fonction constante égale à $\frac{1}{b-a}$:

$$f(x) = \frac{1}{b-a},$$

alors f est une densité de probabilité.
Si X est une variable aléatoire qui suit la loi de densité constante f sur l'intervalle $[a; b]$, alors on dit que X **suit une loi uniforme sur** $[a;\, b]$.

Propriété 8.6. Si X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a; b]$, avec $a < b$, alors pour tout $c \leq d$ dans l'intervalle $[a;\, b]$, on a

$$\mathbb{P}(c \leq X \leq d) = \int_c^d \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t = \frac{d-c}{b-a}$$



Définition 8.7. L'espérance $E(X)$ d'une variable aléatoire à densité f sur $[a;\, b]$ est définie par

$$E(X) = \int_a^b x\, f(x)\,\mathrm{d}x$$

Propriété 8.8. Si X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a; b]$, avec $a < b$, alors son espérance est

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

Remarque. L'espérance de X qui suit une loi uniforme est égale à la moyenne de ses bornes $\frac{a+b}{2}$.

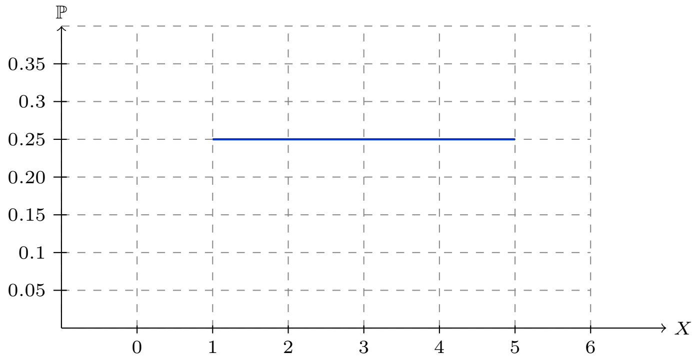
(lien avec l'espérance d'une variable aléatoire discrète)

8.3 Exercices

Exercice 1. Suit à un problème sur son ordinateur portable, Gisèle décide d'appeler le service après-vente du fabricant. Le temps d'attente exprimé en minutes, avant d'être en communication avec un conseiller technique suit la loi uniforme sur l'intervalle $[1; 10]$.

1. Quelle est la probabilité que Gisèle attende moins de trois minutes ?
2. Quelle est la probabilité qu'elle attende plus de cinq minutes ?
3. Préciser le temps moyen d'attente.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire qui la loi uniforme sur l'intervalle $[1; 5]$.



1. Déterminer la densité f associée à X.
2. Calculer les probabilités suivantes :
   a) $\mathbb{P}(X \leq 2.5)$;
   b) $\mathbb{P}(2.5 \leq X)$;
   c) $\mathbb{P}(X \leq 4)$;
   d) $\mathbb{P}(2.5 \leq X \leq 4)$;
   e) $\mathbb{P}(X < 1)$;
   f) $\mathbb{P}(X \geq 0)$;
   g) $\mathbb{P}(X = 2)$.
3. Soit $1.1 \leq a \leq 4.9$ et posons $\epsilon = 0.1$, déterminer la probabilité que X soit environ égale à a au dixième près :
$$\mathbb{P}(a - \epsilon \leq X \leq a + \epsilon)$$
   Qu'observe-t-on ?
4. Déterminer l'espérance de X.
5. Sachant que X appartient à l'intervalle $[1; 3]$, quelle est la probabilité que X soit compris entre 1 et 1.5 ?

Exercice 3. Des études statistiques ont montré que la durée d'un sourire chez un enfant de huit semaines, exprimée en secondes, est comprise dans l'intervalle $[0; 23[$, de façon aléatoire. Notons X la variable aléatoire correspondant à la durée d'un sourire chez un enfant de huit semaines donné.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
2. Calculer la probabilité qu'un enfant de huit semaines sourit pendant plus de 10 secondes.
3. Calculer la probabilité qu'un sourire dure entre 5 et 15 secondes.
4. Quelle est la durée moyenne d'un sourire ?
5. Sachant qu'un enfant sourit depuis 12 secondes, calculer la probabilité qu'il sourit encore pendant plus de 10 secondes.

Exercice 4. Chaque soir, deux copains, Axel et Matthieu, se connectent en réseau pour jouer. Matthieu, ponctuel, se connecte chaque soir à 19h précises tandis qu'Axel se connecte de manière aléatoire entre 19h et 19h30.

1. Quelle est la probabilité qu'un soir, Matthieu attende plus de 10 minutes ?
2. Un soir, Matthieu attend depuis 20 minutes. Agacé, il décide de se déconnecter dans les deux minutes qui suivent, si Axel n'est toujours pas connecté. Quelle est la probabilité qu'Axel et Matthieu jouent ensemble en réseau ce soir-là ?

Exercice 5. La commande `=alea()` des tableurs affiche un nombre aléatoire de l'intervalle $[0;1[$. Soit X la variable aléatoire égale au nombre affiché avec la commande `=5*alea()`.

1. Quelle est la loi suivie par X ?
2. Calculer $\mathbb{P}(1 \leq X \leq 4)$.
3. Calculer la probabilité que le chiffre des dizaines du nombre aléatoire X soit 2.
4. Sachant que le chiffre des dizaines de X est 2, quelle est la probabilité que le chiffre des centaines soit aussi égal à 2 ?
5. Quelle est l'espérance de X.

9 La loi normale (4S)

- Connaître la fonction de densité de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et sa représentation graphique.
- Loi normale d'espérance μ et d'écart type σ.
- Utiliser une calculatrice ou un tableur pour obtenir une probabilité dans le cadre d'une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

9.1 Rappels : Loi binomiale

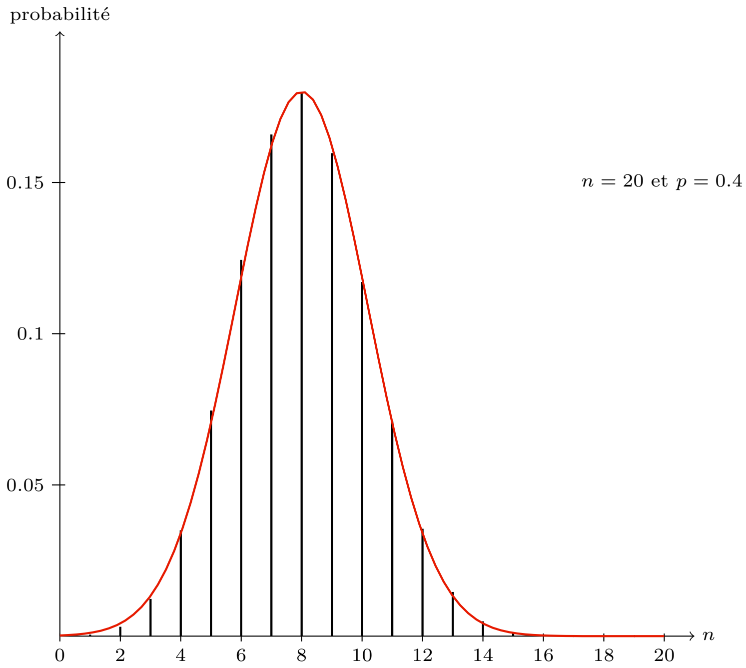
Définition 9.1. Considérons une expérience aléatoire de type "Pile ou Face" avec une probabilité p d'avoir un succès et donc $1-p$ d'avoir un échec. Si l'on répète n fois de manière indépendante la précédente expérience aléatoire, alors la variable aléatoire qui correspond au nombre de succès **suit une loi binomiale** de paramètres n et p.

Définition 9.2 (Utilisation de la calculatrice)**.** Soit X une variable aléatoire qui suit une **loi binomiale** de paramètres n et p, alors

1. Avec une casio :
   - pour calculer $P(X = k)$, on utilise la commande : `Bpd(k,n,p)` ;
   - pour calculer $P(X \leq k)$, on utilise la commande : `Bcd(k,n,p)` ;
2. Avec une TI :
   - pour calculer $P(X = k)$, on utilise la commande : `Bpd(n,p,k)` ;
   - pour calculer $P(X \leq k)$, on utilise la commande : `Bcd(n,p,k)` ;

Remarque. On portera une attention particulière à l'ordre des paramètres suivant le modèle de calculatrice !

Remarque. Le diagramme en bâtons d'une loi binomiale de paramètres n et p, lorsque n est très grand et que p n'est pas voisin de 0 et de 1, peut être approché par une courbe “en cloche".



Avec la calculatrice :

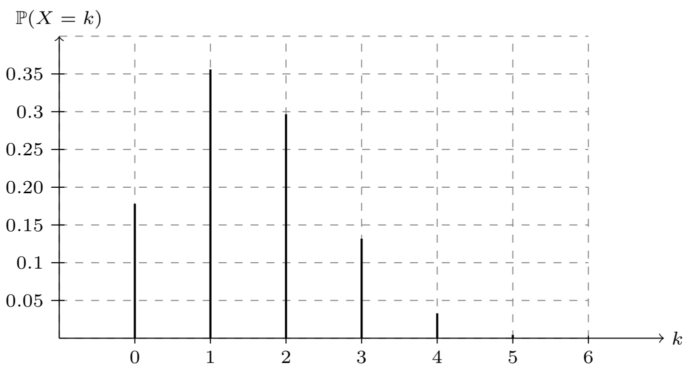
- Avec la casio, dans le programme **TABLE**, taper la commande `Y1 = BinomialPD(X,10,0.25)`. Puis faire une table pour X allant de 0 à 10 avec un pas de 1. (Pour trouver, la commande `BinomialPD`, il faut faire (OPTN) [STAT] [DIST] [BINM]).
- Avec la TI, il faut taper `seq(binompdf(10,0.25,X),X,0,10,1)`$\rightarrow L_2$.

Propriété 9.3. Soit X une variable aléatoire discrète qui suit une loi binomiale de paramètres n et p, alors :

- l'espérance de X est $E(X) = n \times p$;
- la variance de X est $V(X) = np(1-p)$;
- l'écart type de X est $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

Exercice 6.

1. La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0.25$.
   Voici une représentation graphique des probabilités $P(X = k)$ pour k allant de 0 à 6.



   a) Lire $P(X = 0)$.
   b) Lire la probabilité que X soit égale à 4.
   c) Déterminer au dixième près, $P(X \leq 3)$ à l'aide de la précédente représentation ou de la calculatrice.

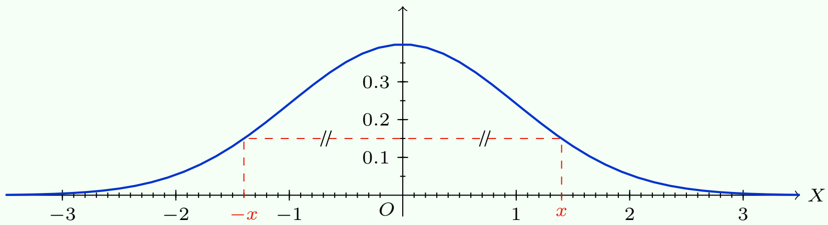
2. On sélectionne les candidats à un jeu télévisé en leur demandant de répondre à six questions.
   Pour chacune des questions, ils devront choisir la réponse exacte, parmi quatre affirmations. Un candidat

se présente et répond à toutes les questions *au hasard*.
On note X la variable aléatoire désignant le nombre de réponses exactes données par ce candidat à l'issue du questionnaire.

a) Quelle est la loi de probabilité de X ?
b) Quelle est la probabilité que toutes les réponses du candidat soient fausses ?
c) Calculer la probabilité pour que ce candidat donne au moins 3 bonnes réponses et soit ainsi sélectionné.
d) Quelle est le nombre moyen de bonnes réponses sur les 6 questions en répondant au hasard ?

9.2 Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;\,1)$

Propriété 9.4. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ est une densité de probabilité. Sa courbe représentative est appelé **« courbe de Gauss »**.
De plus, la courbe de Gauss est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées :



Remarque.

- La propriété affirme entre autre que l'aire sous la courbe de Gauss vaut un.
- Soit $x > 0$ un nombre réel, rappelons que $(-x)^2 = x^2$, d'où
$$f(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(-x)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} = f(x)$$
Ce qui prouve que la courbe de Gauss est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Définition 9.5. Une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ si pour tous réels a et b tels que $a < b$, on a :
$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x.$$
La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ est appelée fonction de densité de la loi $\mathcal{N}(0;1)$.

Remarque. La loi normale centrée réduite est aussi appelée « loi de Gauss » (ou « loi Gaussienne »).

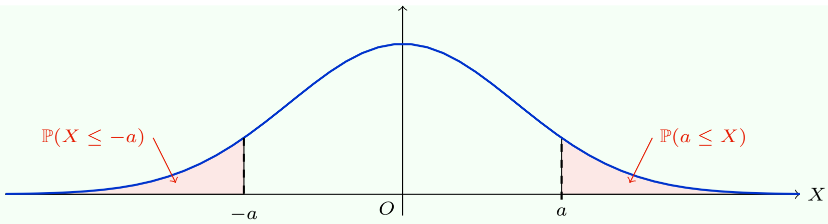
Le fait que l'axe des ordonnées soit un axe de symétrie pour la courbe de Gauss, implique, entre autre, la propriété suivante :

Propriété 9.6. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$, alors

1. $\mathbb{P}(X \leq 0) = \mathbb{P}(X \geq 0) = \frac{1}{2}$.

Pour tout nombre réel a :

2. $\mathbb{P}(X = a) = 0$ et donc $\mathbb{P}(X < a) = \mathbb{P}(X \leq a)$;
3. $\mathbb{P}(X \leq -a) = \mathbb{P}(a \leq X)$.



Propriété 9.7. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$, alors pour tout $a \leq b$, on a

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X \leq a)$$

Propriété 9.8. Si X suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;\ 1)$, alors :

- son **espérance** est $E(X) = 0)$;
- son **écart type** est $\sigma(X) = 1$.

Propriété 9.9 (Intervalles particuliers)**.**

- $P(X \in [-1;\ 1]) \simeq 0.68$;
- $P(X \in [-1,96;\ 1,96]) \simeq 0.95 = 95\%$;
- $P(X \in [-2;\ 2]) \simeq 0.954 = 95,4\%$;
- $P(X \in [-3;\ 3]) \simeq 0.997 = 99,7\%$.

9.3 Loi normale $\mathcal{N}(\mu;\ \sigma^2)$

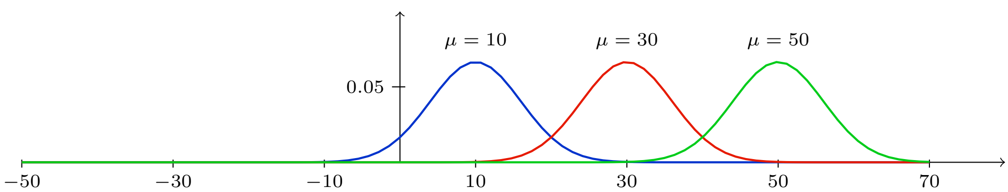
Définition 9.10. Une variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$si la variable aléatoire $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$.

Propriété 9.11. Si X suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$alors :

- son espérance est μ ;
- son écart type est σ.

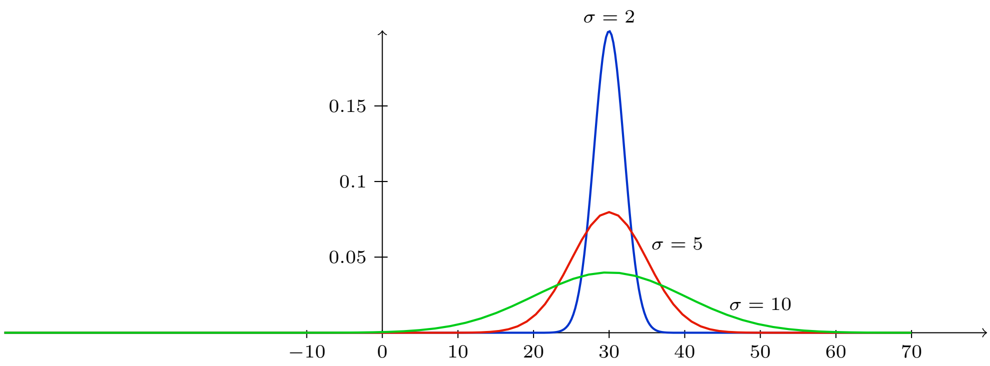
Quelques exemples de densité de lois normales $\mathcal{N}(0,1)$:

- On fixe l'écart type $\sigma = 6$:



On observe que le sommet de la Gaussienne se situe au point d'abscisse μ, l'espérance.

- On fixe l'espérance $\mu = 30$:



On observe que plus l'écart type σ est grand et plus la courbe représentative de la densité est diffuse.

Remarque. Soit X une variable aléatoire, la fonction $x \mapsto P(X \leq x)$ est appelée *fonction de répartition* (en Anglais, *distribution function*).

On rappelle que pour une loi à densité, le fait que les inégalités soient strictes ou pas n'a pas d'importance, c'est-à-dire :
$P(X \leq a) = P(X < a)$.

Définition 9.12 (Utilisation de la calculatrice)**.** Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance μ et d'écart type σ alors

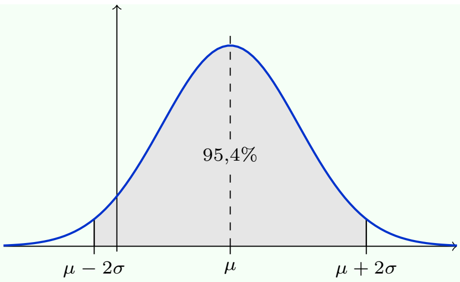
1. Avec une casio : pour calculer $P(a \leq X \leq b)$, on utilise la commande : `Ncd(a,b,σ,μ)`.
2. Avec une TI : pour calculer $P(a \leq X \leq b)$, on utilise la commande : `normalcdf(a,b,μ,σ)`.

Propriété 9.13.

1. La courbe d'une loi normale d'espérance μ est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = \mu$.
2. L'aire sous la courbe d'une loi normale est égale à 1.
3. $P(X \leq \mu) = \frac{1}{2} = P(\mu \leq X)$.
4. $P(X > a) = 1 - P(X \leq a)$.
5. $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X < a)$.

Propriété 9.14 (Intervalles particuliers)**.** Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, alors :

- $P(X \in [\mu - \sigma; \mu + \sigma]) \simeq 0.68 = 68\%$;
- $P(X \in [\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]) \simeq 0.954 = 95,4\%$;
- $P(X \in [\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]) \simeq 0.997 = 99,7\%$.



95,4%
$\mu - 2\sigma$
μ
$\mu + 2\sigma$

9.4 Programme calculatrice pour le calcul de $P(a \leq X \leq b)$

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale. Le programme suivant permet de calcul avec une précision d'environ 10^{-3} près de $P(a \leq X \leq b)$, la probabilité que X soit compris entre a et b.
D'après une propriété (admise), on a

$$P(a \leq X \leq b) = P(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq N \leq \frac{b-\mu}{\sigma}) = P(N \leq \frac{b-\mu}{\sigma}) - P(N \leq \frac{a-\mu}{\sigma})$$

où N suit une loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1.

Avec une Casio :

```
"A":?→A
"B":?→B
"MOYENNE":?→M
"ECART TYPE":?→S
0→P
If A < B And S ≠ 0
Then
(A - M)/S → A
(B - M)/S → B
Abs(A) → X
Abs(B) → Y
1 + 0.196854 × X + 0.115194 × X^2 + 0.000344
× X^3 + 0.019527 × X^4 → X
1 - 1 / ( 2 × X^4 ) → X
1 + 0.196854 × Y + 0.115194 × Y^2 + 0.000344
× Y^3 + 0.019527 × Y^4 → Y
1 - 1 / ( 2 × Y^4 ) → Y
If A<0
Then 1-X→X
IfEnd
If B<0
Then 1-Y→Y
IfEnd
Y - X → P
IfEnd
"P(A<X<B) = ":P ◢
```

Avec une TI :

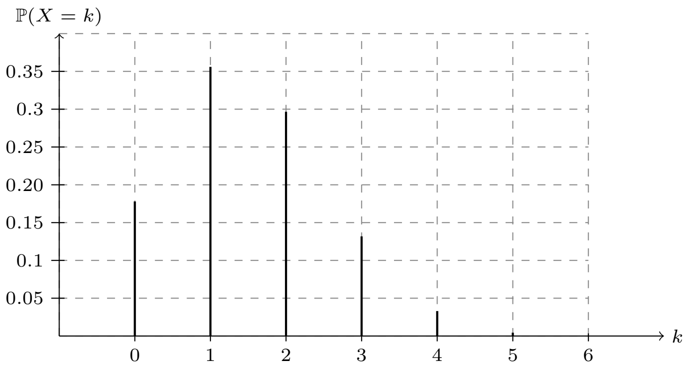
```
Prompt A
Prompt B
Prompt M
Prompt S
0→P
If A < B and S ≠ 0
(A - M)/S → A
(B - M)/S → B
Abs(A) → X
Abs(B) → Y
1 + 0.196854 × X + 0.115194 × X^2 + 0.000344
× X^3 + 0.019527 × X^4 → X
1 - 1 / ( 2 × X^4 ) → X
1 + 0.196854 × Y + 0.115194 × Y^2 + 0.000344
× Y^3 + 0.019527 × Y^4 → Y
1 - 1 / ( 2 × Y^4 ) → Y
If A<0
1-X→X
End
If B<0
1-Y→Y
End
Y - X → P
End
Disp P
```

Remarque :

- Les parties du code en bleue et en vert sont à écrire sur « une ligne ».

Corrigé de l'exercice.

1. La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0.25$.
   Voici une représentation graphique des probabilités $P(X = k)$ pour k allant de 0 à 6.



   a) Avec la calculatrice, $P(X = 0) = Bpd(0, 6, 0.25) \simeq 0.18 = 18\%$.
   b) Avec la calculatrice, la probabilité que X soit égale à 4 est $P(X = 4) = Bpd(4, 6, 0.25) \simeq 0.03 = 3\%$.
   c) Au dixième près, $P(X \leq 3) = Bcd(3, 6, 0.25) \simeq 0.96 = 96\%$.

2. On sélectionne les candidats à un jeu télévisé en leur demandant de répondre à six questions.
   Pour chacune des questions, ils devront choisir la réponse exacte, parmi quatre affirmations. Un candidat se présente et répond à toutes les questions *au hasard*.
   On note X la variable aléatoire désignant le nombre de réponses exactes données par ce candidat à l'issue du questionnaire.

   a) Le fait que le candidat réponde au hasard à une question avec 4 possibilités implique que la probabilité qu'il réponde correctement à la question de $\frac{1}{4} = 0.25$. On répète de manière identique et indépendante l'expérience pour les 6 questions, ainsi X le nombre de bonnes réponses parmi les 6 questions suit une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0.25$.
   b) La probabilité que toutes les réponses du candidat soient fausses est $P(X = 0) \simeq 0.18$, d'après la question 1.a).
   c) La probabilité pour que ce candidat donne au moins 3 bonnes réponses et soit ainsi selectionné est

   $$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - Bcd(2, 6, 0.25) \simeq 0.17 = 17\%.$$

   d) Le nombre moyen de bonnes réponses sur les 6 questions en répondant au hasard est de $E(X) = n\,p = 6 \times 0.25 = 1.5$.

10 Aire sous une courbe : Intégration (2S)

Dans ce chapitre, nous allons voir comment calculer l'aire d'une figure délimitée entre autre par la courbe représentative d'une fonction.

Dans ce chapitre, le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J) ; l'unité d'aire qui sera utilisée pour mesurer les aires est l'aire du rectangle formé à partir des trois points O, I et J.

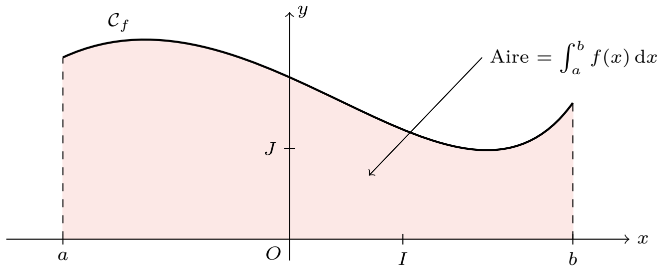
10.1 Intégrale d'une fonction positive

On dit qu'une fonction f est **positive** sur un intervalle si, pour tout x de l'intervalle $f(x)$ est positif : $f(x) \geq 0$.

Définition 10.1. Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a;\, b]$, continue et positive sur $[a;\, b]$.

On appelle **intégrale de la fonction f sur** $[a;\, b]$ la mesure de l'aire du domaine du plan délimité par la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$.

Ce nombre est noté $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.



L'aire du domaine en rouge s'appelle aussi **« aire sous la courbe »**.

Remarque.

- Le domaine en rouge qui permet de définir l'intégrale peut aussi être définie comme étant le lieu géométrique des points $M(x;\, y)$ tels que

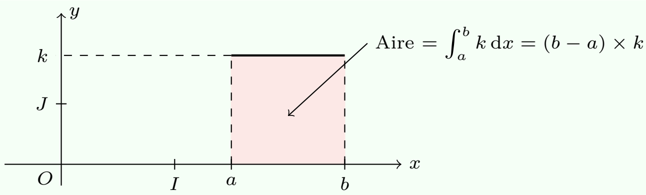
$$a \leq x \leq b \qquad \text{et} \qquad 0 \leq y \leq f(x)$$

- Le nombre $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ se lit « intégrale de a à b de $f(x)\,\mathrm{d}x$ ».
- Les réels a et b sont appelés les **bornes** de l'intégrale.
- Dans l'expression d'une intégrale, le terme x est appelé variable muette.
  On peut aussi remplacer x par d'autres expressions, par exemple $\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x = \int_a^b t^2\,\mathrm{d}t$.

L'aire d'un rectangle étant simple à calculer, on a la propriété suivante :

Propriété 10.2 (Intégrale d'une fonction constante)**.** Soit $k \geq 0$ et $f : [a;\, b] \to \mathbb{R}$ la fonction constante définie par $f(x) = k$ pour tout x dans l'intervalle $[a;\, b]$. Alors

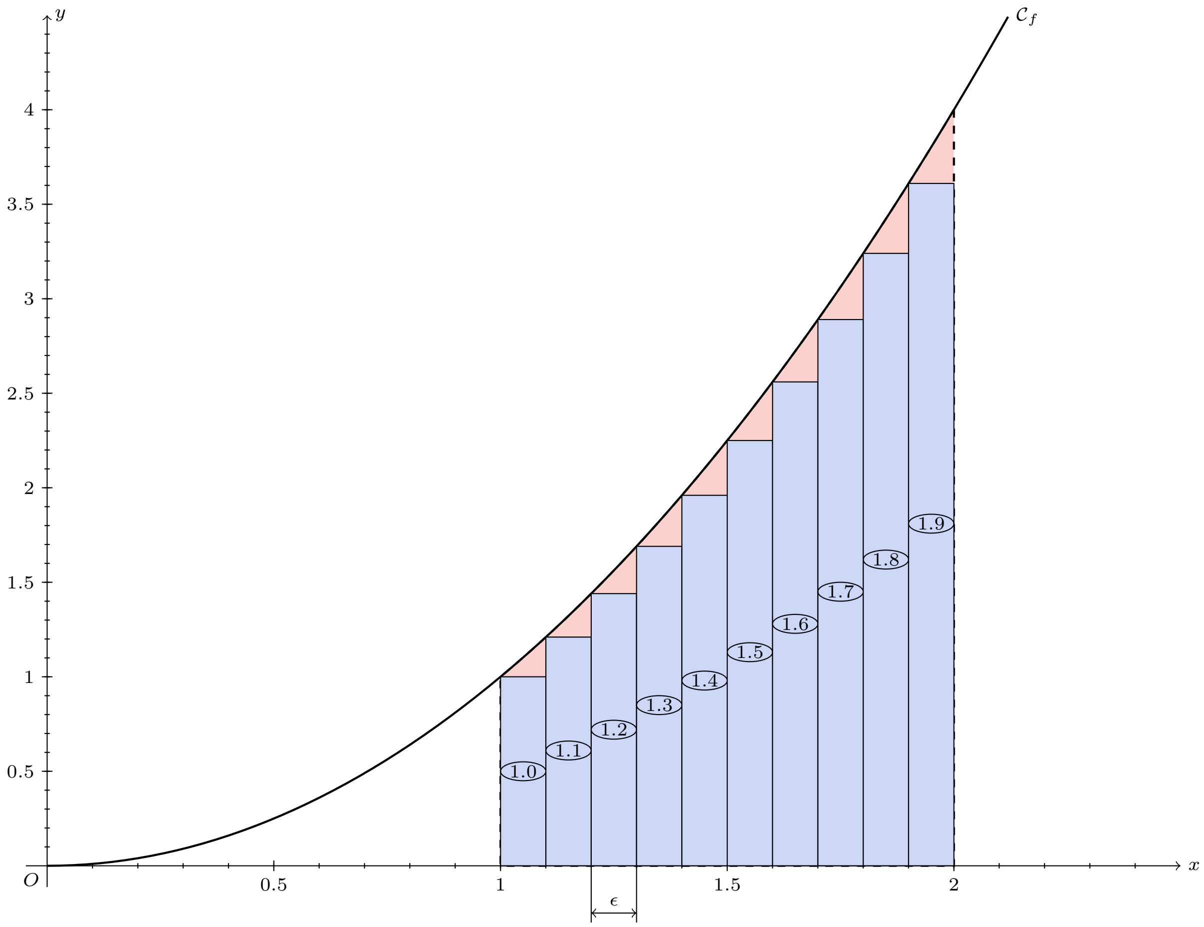
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b k\,\mathrm{d}x = (b - a) \times k$$



Si l'on juxtapose plusieurs rectangles, on peut réussir à approximer l'aire sous une courbe. Par exemple, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la fonction carrée, définie par $f(x) = x^2$ et cherchons à approximer l'intégrale de f sur l'intervalle [1; 2] :

$$I = \int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x$$

On fixe $\epsilon = 0.1$ et on découpe l'intervalle $[1; 2]$ en intervalles réguliers de longueur ϵ et on trace les rectangles de hauteur maximale partant de l'axe des abscisses jusqu'à la courbe représentative de la fonction f comme sur la figure ci-dessous.



On observe que la somme S des aires des rectangles en bleu est inférieure ou égale à l'intégrale $I = \int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x$. De plus, comme l'aire de la partie en rouge, qui fait défaut, est petit, la précédente somme S constitue une **approximation** de I.
Dans le tableau suivant, on calcul la somme des aires des rectangles en bleu.

rectangle N ° x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	Total
hauteur = x^2	1.0	1.21	1.44	1.69	1.96	2.25	2.56	2.89	3.24	3.61	
aire = hauteur $\times\epsilon$	0.1	0.121	0.144	0.169	0.196	0.225	0.256	0.289	0.324	0.361	2.185

D'où, $\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x \simeq 2.185$.
On notera que plus on veut une approximation précise de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, plus on doit choisir un découpage en intervalles de taille ϵ avec ϵ d'autant plus petit.

Remarque. Le procédé qu'on vient d'évoquer dans l'exemple précédent a été utilisé par Bernard Riemann dans « über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe » en 1854 pour définir rigoureusement l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle. D'ailleurs, en sa mémoire, on parle aussi d'**intégrale de Riemann** pour la notion d'intégrale que nous étudions dans ce chapitre.

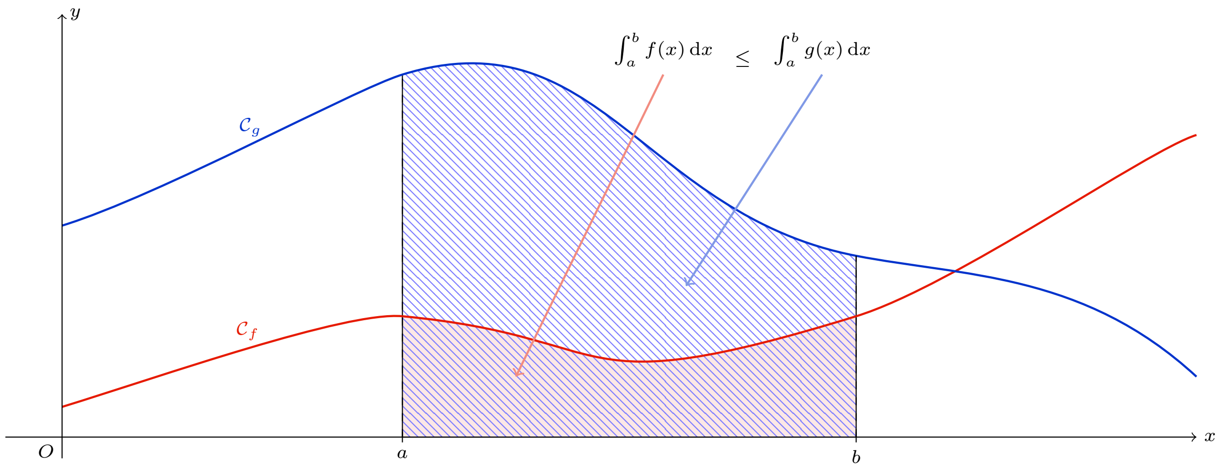
L'aire d'un rectangle de largeur nul étant nul, on a la propriété suivante :

Propriété 10.3. Soit $f : [a;\, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive. Pour tout réel c de l'intervalle $[a; b]$:

$$\int_c^c f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Propriété 10.4 (positivé de l'intégrale)**.** Soit $f : [a;\, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive sur $[a;\, b]$, alors l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est aussi positive.

Lorsque la courbe représentative d'une fonction f est en dessous d'une courbe représentative d'une autre fonction g sur un intervalle $[a;\, b]$ alors l'intégrale de f est inférieure à l'intégrale de g sur $[a;\, b]$.

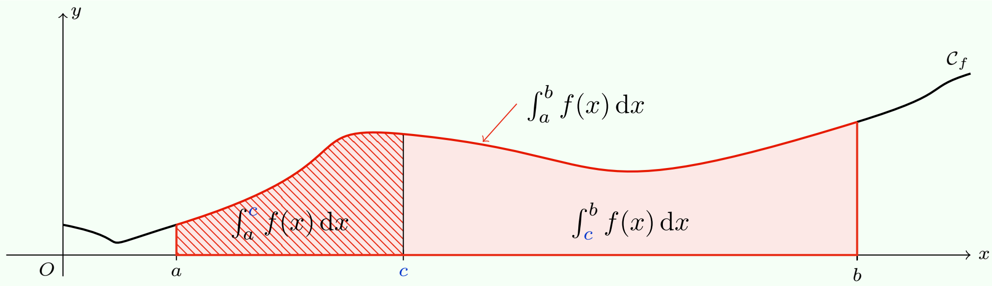


Propriété 10.5. Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle $[a;\, b]$ continues et positives telles que $f \leq g$ (c'est-à-dire telles que $f(x) \leq g(x)$ pour tout x dans l'intervalle $[a;\, b]$), alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque. Formellement, on a : $f \;\leq\; g \quad \Rightarrow \quad \int f(x)\,\mathrm{d}x \;\leq\; \int g(x)\,\mathrm{d}x.$

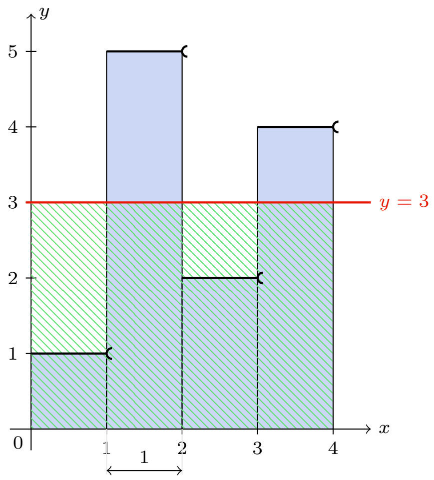
Propriété 10.6 (relation de Chasles)**.** Soit $f : [a;\, b] \to \mathbb{R}$ continue et positive. Soit c un nombre de l'inervalle $[a; b]$, alors



$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Valeur moyenne

Considérons la série statistique $(1; 5; 2; 4)$. Voici, un histogramme associé :

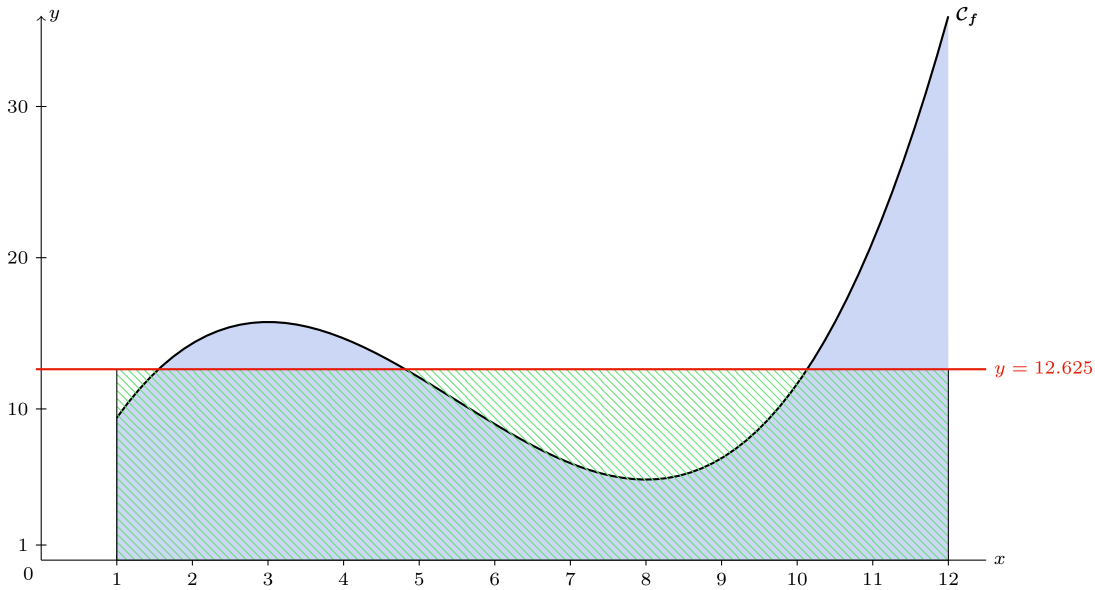


Identifions la partie supérieure des bâtons du diagramme avec le graphe d'une fonction, alors l'aire en bleu sous la courbe de la fonction f est égale à $\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 1+5+2+4 = 12$. D'autre part, la moyenne de cette série est $\bar{x} = \frac{1+5+2+4}{4} = 3$ et on note que l'aire du rectangle hachurée en vert est égale à $\int_0^4 3\,\mathrm{d}x = 3 \times 4 = 12$.
Dans cet exemple, la moyenne peut donc être calculée de la manière suivante $\bar{x} = \frac{1}{4}\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$. Ce constat suggère la définition suivante :

Définition 10.7. La **valeur moyenne** d'une fonction f définie sur l'intervalle $[a;\, b]$ avec $a < b$, continue et positive sur $[a;\, b]$, est égale au nombre

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple. Considérons la fonction $f : [1;\, 12] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{11}{4}x^2 + 12x$.



Admettons que $\int_1^{12} f(x)\,\mathrm{d}x \simeq 138.875$, alors la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1; 12]$ est $\mu \simeq \frac{138.875}{12-1} \simeq 12.625$.
Ici aussi, on observe que l'aire de la partie hachurée en vert est environ 11×12.625 qui correspond à l'aire sous la courbe de la fonction f, $\int_1^{12} f(x)\,\mathrm{d}x$. Afin de pousser plus loin l'analogie avec les statistiques, on peut s'imaginer que la partie en bleu sous la courbe représentative correspond à une infinité de bâtons d'un diagramme en bâtons d'une série statistique. Ainsi, on légitime la terminologie de « valeur moyenne » pour la fonction f.

Propriété 10.8. Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ continue et positive avec $a < b$. Soit m un minorant et M un majorant de la fonction f, c'est-à-dire deux nombres tels que pour tout x dans l'intervalle $[a; b]$, $m \leq f(x) \leq M$. Alors la valeur moyenne de la fonction f est comprise entre m et M :

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M$$

10.2 Primitives

Définition 10.9. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On dit qu'une fonction F est une **primitive** de la fonction f si la dérivée de la fonction F est égale à la fonction f sur I :

$$F' = f$$

Exemple. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction carrée, définie par $f(x) = x^2$ pour tout réel x. Soit k un nombre réel, posons $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + k$ pour tout réel x. Alors,

$$F'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 + 0 = x^2 = f(x)$$

Ainsi, F est une primitive de la fonction carrée f et ceci quel que soit le nombre réel k !

Propriété 10.10. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit F et G deux de ses primitives. Alors la fonction $F - G$ est une fonction constante, de plus il existe un nombre réel k tel que $G = F + k$.

Remarque. Deux primitives d'une fonction f sur un intervalle I ne diffèrent que d'une constante k.

Donnons les primitives des fonctions de référence :

Propriété 10.11. Soit n un entier naturel. Soit k un nombre réel quelconque.

Intervalle de définition I	Fonction : $f(x) =$	Primitive $F(x) =$
$\mathbb{R}$	$f(x) = 0$	$F(x) = k$
$\mathbb{R}$	$f(x) = 1$	$F(x) = x + k$
$\mathbb{R}$	$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}\,x^2 + k$
$\mathbb{R}$	$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{1}{3}\,x^3 + k$
$\mathbb{R}$	$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1} + k$
$]0; +\infty[$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k$
$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x) + k$
$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$	$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + k$
$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$	$f(x) = \frac{1}{x^n}$ avec $n \geq 2$	$F(x) = \frac{1}{-n+1}x^{-n+1} + k$
$\mathbb{R}$	$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + k$

Remarque. Le fait de « déterminer une primitive » est l'opération inverse de « dériver une fonction ». Ainsi, dans le tableau précédent, le passage de la troisième colonne à la seconde se fait en dérivant.

Propriété 10.12. Soit $f, g, u, v : I \to \mathbb{R}$ quatre fonctions continues et α, β, k des nombres réels. On note F, G une primitive de f et g respectivement. Alors :

Fonction définie sur I	Primitive sur I
$f + g$	$F + G + k$
αf	$\alpha F + k$
$\alpha f + \beta g$	$\alpha F + \beta G + k$
$u'\,u$	$\frac{1}{2}u^2 + k$
Si u ne s'annule pas, $\frac{u'}{u^2}$	$\frac{-1}{u} + k$
$u'\,e^u$	$e^u + k$
Si $u > 0$, $\frac{u'}{u}$	$\ln(u) + k$

11 Fonction exponentielle, dérivation (1S)

On rappelle que :

Propriété 11.1. La fonction exponentielle est égale à sa fonction dérivée. C'est-à-dire : pour tout nombre réel x, $\exp'(x) = \exp(x)$.

Formellement, on a : $(e^x)' = e^x$. D'autre part, on a vu que la fonction exponentielle est strictement positive ainsi sa dérivée, qui est égale à la fonction exponentielle elle-même, l'est aussi et on a :

Propriété 11.2. La fonction exponentielle exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Dérivée d'une composée de fonction avec la fonction exponentielle :

Propriété 11.3 (admise)**.** Si la fonction $u : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur l'intervalle I, alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est aussi dérivable sur I et on a pour tout nombre réel x :

$$(e^{u(x)})' = u'(x) \times e^{u(x)}$$

12 Fluctuation, estimation (2S)

- Connaître, pour n assez grand, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%.
- On admet le résultat qui sera conforté grâce à la simulation.
- Lien avec l'intervalle de fluctuation vu en seconde.
- Estimation : intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 (« les attendus de ce paragraphe sont modestes et sont à exploiter en lien avec les autres disciplines »).
  Hypothèses : $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$.
- Niveau de confiance.

Définition 12.1. Un **échantillon** de taille n est obtenu en prélevant au hasard, *successivement et avec remise*, n éléments d'une population.

Remarque. Un exemple d'utilisation d'un échantillon est lors d'un sondage. La propriété de "remise" signifie qu'on s'autorise à interroger plusieurs fois la même personne. Ce fait permet de garantir l'indépendance entre les résultats des différents « prélevements ». Ainsi, la loi de la variable aléatoire correpondant à l'effectif des éléments ayant le caractère suit une loi bien connue :

Propriété 12.2. Soit une population dont une proportion p des éléments admet un caractère donné. Dans un échantillon de taille n prélevé dans cette population, l'effectif, noté X, des éléments qui présentent ce caractère est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Définition 12.3. Dans une population, considérons un certain caractère. Notons p la proportion d'éléments ayant le précédent caractère. Un **intervalle de fluctuation (asymptotique) au seuil de 95%**, relatif à la proportion p et aux échantillons de taille n, est un intervalle où se situe la fréquence f observée dans un échantillon de taille n avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95.

D'après la propriété précédente, pour déterminer un intervalle de fluctuation, il nous faut étudier la variable aléatoire

$$F = \frac{X}{n}$$

correspondant à la fréquence. Comme X est un nombre compris entre 0 et n, on en déduit que la fréquence F prend les valeurs 0, $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, ..., $\frac{n-1}{n}$ et 1. D'autre part, X suit une loi binomiale de paramètres n et p, ainsi

$$\mathbb{E}(X) = np \qquad \text{et} \qquad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

D'où

$$\mathbb{E}(F) = \mathbb{E}(\frac{X}{n}) = \frac{np}{n} = p$$

Effectivement, on peut s'attendre à ce qu'en moyenne la fréquence F soit égale à p. Et,

$$\sigma(F) = \frac{\sqrt{np(1-p)}}{n} = \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$$

L'écart type, c'est-à-dire l'écart quadratique autour de la moyenne p, de la fréquence F est égale à la fraction $\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$.

Ces deux indicateurs interviennent dans la définition d'un intervalle de fluctuation :

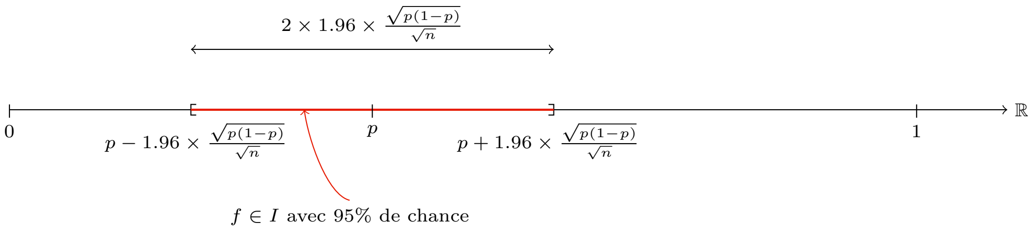
Théorème 12.4. Supposons que :

- $n \geq 30$;
- $n \times p \geq 5$;
- $n \times (1-p) \geq 5$.

Alors, un intervalle de fluctuation (asymptotique) au seuil 95% de la fréquence F est :

$$I = \left[p - 1.96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; \; p + 1.96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

Remarque. Lorsqu'on prélève un échantillon de taille n dans une population avec une proportion p d'éléments ayant un caractère donné, la fréquence observée sur l'échantillon à 95% de chance d'appartenir à l'intervalle de fluctuation I :



L'amplitude de l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% du cours est égale à $2 \times 1.96 \frac{1}{\sqrt{n}} \times \sqrt{p(1-p)}$. En étudiant la fonction $f(p) = \sqrt{p(1-p)}$, on se rend compte que pour tout p dans l'intervalle $[0; 1]$, $0 \leq f(p) \leq \frac{1}{2}$.
D'où, quel que soit la proportion p, l'amplitude de l'intervalle de fluctuation est inférieure à $\frac{1.96}{\sqrt{n}}$:

n	1	10	100	10^4	10^6	10^{2k}
amplitude inférieure à	1.96	0.62	0.196	0.0196	$0.00196 = 1.96 \times 10^{-3}$	1.96×10^{-k}

En résumé, plus la taille de l'échantillon est importante et plus l'amplitude (la taille) de l'intervalle de fluctuation I est petit autour de la proportion p.

Propriété 12.5 (test statistique)**.** On considère une population dans laquelle on **suppose** que la proportion d'un caractère est p.
On **observe** f la fréquence de ce caractère dans un échantillon (une portion de la population) de taille n.
Soit l'hypothèse : *“la proportion de ce caractère dans la population est p".*
Soit I un intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence dans les échantillons de taille n, alors l'**algorithme de décision** est le suivant :

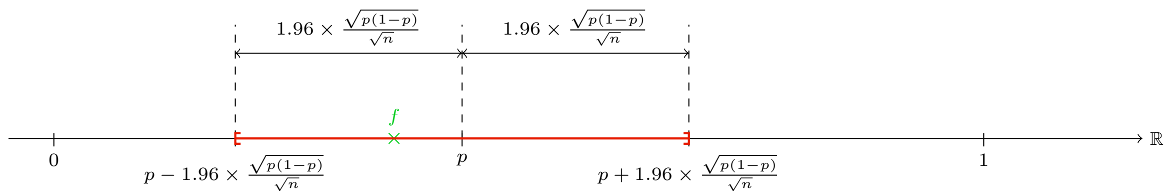
- Si la fréquence f de l'échantillon est dans l'intervalle I alors on accepte l'hypothèse que p soit la fréquence de ce caractère dans la population entière.
- Si la fréquence f de l'échantillon n'est dans pas l'intervalle I alors on rejette l'hypothèse, p n'est pas la fréquence de ce caractère dans la population entière.

Remarque. Rappelons que théoriquement, la probabilité que la fréquence f pour un échantillon de taille n soit en dehors de l'intervalle de fluctuation I est de $5\% = 0.05$ “seulement". Cette évènement étant très rare, lorsqu'il se réalise avec l'échantillon choisi, on décide que c'est l'hypothèse sur p qui est fausse et non pas le hasard qui a voulu que la fréquence soit en dehors de I. La probabilité de se tromper avec un tel jugement n'est que de 0.05, ce qui d'usage est considérée comme acceptable !

Notons que dire que la fréquence f appartient à l'intervalle de fluctuation I (formellement $f \in I$) signifie que

$$p - 1.96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \quad \leq \quad f \quad \leq \quad p + 1.96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$$

Graphiquement,



La *distance entre f et p* doit être inférieur à $1.96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$.

Une application est l'estimation de la proportion p à partir de la fréquence observée dite empirique f.

Estimation d'une proportion

Propriété 12.6. Soit f la fréquence observée d'un caractère dans un échantillon de taille n extrait d'une population dans laquelle la proportion de ce caractère est p. Alors l'intervalle $[f - \frac{1}{\sqrt{n}};\ f + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ est un **intervalle de confiance de la proportion p au seuil de confiance 95%**.

Lorsque n est assez grand, la proportion p appartient à l'intervalle de confiance avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.

13 Intégration : propriétés (2S)

Théorème 13.1. Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive. On associe la fonction $F : [a; b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

La fonction F est dérivable sur l'intervalle $[a;\, b]$ et sa fonction dérivée est la fonction f :

$$F'(x) = f(x)$$

pour tout $x \in [a;\, b]$.

Remarque.

- On notera que dans l'écriture $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, la variable t est une variable muette, utile uniquement pour le calcul de l'intégrale.
- $F(a) = 0$.
  En fait, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz [2], la fonction F est l'unique primitive de la fonction f telle que $F(a) = 0$.
- Le théorème nous dit entre autre que toute fonction continue f admet une primitive F.
- Néanmoins, toutes le primitives ne peuvent pas être exprimées à partir des fonctions usuelles. Par exemple, la fonction de Gauss $f(x) = e^{-x^2}$ n'admet pas de primitive en terme de fonctions usuelles.

Comme conséquence du théorème, on a la propriété suivante.

Propriété 13.2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue positive et $a < b$ deux nombres de l'intervalle I.
Soit $F : I \to R$ une primitive de la fonction f, alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

Nous pouvons maintenant généraliser le définition de l'intégrale aux fonctions de signe quelconque (plus nécessairement positives).

Définition 13.3. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue (quelconque), a, b deux nombres réels dans l'intervalle I et F une primitive de la fonction f.
On appelle **intégrale de a à b de la fonction f** le nombre

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Remarque. D'après la propriété précédente, lorsque $a < b$ et $f > 0$, la définition de l'intégrale coïncide avec celle donnée en terme d'aire sous la courbe en début de chapitre.

Notation : Pour faciliter les calculs dans la pratique, on utilise la notation suivante :

$$[\,F(t)\,]_a^b = F(b) - F(a)$$

2. Augustin Louis Cauchy (1789-1857) et Rudolf Lipschitz (1832-1903)

Propriété 13.4. Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$, a, b deux nombres dans I et α, β des nombres réels quelconques. Alors

1. $\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$;
2. $\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\,\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$; (linéarité de l'intégrale)
3. $\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$;
4. $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$; (relation de Chasles)

Si $a \leq b$,

5. si $f \geq 0$ alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$; (positivité de l'intégrale)
6. si $f \leq g$ alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

De même,

Définition 13.5. La **valeur moyenne** d'une fonction f définie sur l'intervalle $[a; b]$ avec $a \neq b$, continue sur $[a; b]$, est égale au nombre

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Propriété 13.6. Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ continue avec $a \neq b$. Soit m un minorant et M un majorant de la fonction f, c'est-à-dire deux nombres tels que pour tout x dans l'intervalle $[a; b]$, $m \leq f(x) \leq M$. Alors la valeur moyenne de la fonction f est comprise entre m et M :

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M$$

(courbe de Lorenz, coefficient de Gini)