Notes de cours de spé maths en Terminale ES

O. Lader

Table des matières

1 Recherche de courbes sous contraintes, matrices

Exercice 1. On se place dans un plan muni d'un repère. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation cartésienne $2x+3y-7=0$ et $\mathcal{D}'$ la droite d'équation cartésienne $x-5y+3=0$.
Soit $M(x;y)$ le point d'intersection des deux droites.

1. Justifier que les coordonnées du point M sont solution du système :

$$\begin{cases} 2x+3y & =0 \\ x-5y+3 & =0 \end{cases}$$

2. On rappelle que $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{v}$ un vecteur de la droite $\mathcal{D}'$.
3. *Rappels : Deux vecteurs* $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ *sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles si et seulement si* $xy'-x'y=0$.
Vérifier que les vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires.
4. En déduire que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ se coupent bien en un point M.

1.1 Systèmes linéaires

Deux exemples de systèmes linéaires à deux équations et deux variables :

$$\begin{cases} x+3y & =4 \\ 3x+y & =6 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} 2a+3b & =1 \\ 3a-b & =-4 \end{cases}$$

Les résoudre.

Définition 1.1. Un **système linéaire** à deux inconnus et deux équations est de la forme suivante :

$$\begin{cases} ax+by & =c \\ a'x+b'y & =c' \end{cases}$$

où a, b, c, a', b' et c' sont des nombres réels fixés (des paramètres).

Un exemple de système à trois équations et trois inconnus :

$$\begin{cases} x-y+3z & =0 \\ x+y+3z & =0 \\ y+z & =0 \end{cases}$$

Définition 1.2. Un **système linéaire** à trois équations et trois inconnus est de la forme suivante :

$$\begin{cases} a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13}\,z &= b_1 \\ a_{21}\,x + a_{22}\,y + a_{23}\,z &= b_2 \\ a_{31}\,x + a_{32}\,y + a_{33}\,z &= b_3 \end{cases}$$

où les a_{ij} et les b_i sont des nombres fixés.

Remarque. En toute généralité, on peut définir les **systèmes linéaires** à m équations et n inconnus.

La résolution des tels systèmes est assez fastidieuse comme on vient de le voir. Pour nous faciliter la tâche, nous allons utiliser un nouvel outil : les matrices.

1.2 Matrices

Définition 1.3. Une **matrice** de dimension $n \times p$ est un tableau de nombres réels à n lignes et p colonnes :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & & \dots & a_{2p} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & & \dots & a_{3p} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{i1} & & & & a_{ij} & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

On notera que le coefficient a_{ij} se trouve sur la i-ème ligne et la j-ème colonne [1].

Définition 1.4. Une matrice à une seule ligne est une **matrice ligne**.
Une matrice à une seule colonne est une **matrice colonne**.
Lorsque $n = p$, donc que le tableau est carré, alors la matrice est une **matrice carrée** de taille n.

Exemples.

1. $M = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 101 \\ 11.3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$, matrice de taille 2×3 ;
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, matrice carrée de taille 2 ;
3. $B = \begin{pmatrix} -1 & 10 & 505 \\ 3 & 534 & 234 \\ 0 & -1 & 1001 \end{pmatrix}$, matrice carrée de taille 3 ;

4. $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, matrice colonne.

Définition 1.5. Dire que deux matrices sont égales signifie qu'elles ont le même format et les nombres qui occupent la même position sont deux à deux égaux.

Opération sur les matrices

Définition 1.6. Soit A et B deux matrices de même taille $n \times p$. La somme (resp. différence) de A et B la matrice, notée $A+B$ (resp. $A-B$), obtenue en additionnant (resp. en soustrayant) deux à deux chaque coefficient qui occupent la même position.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$. Alors

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 13 \end{pmatrix}$$

et

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-5 & 2-6 \\ 3-7 & 4-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$$

Définition 1.7. Soit A une matrice de taille $n \times p$ et k un nombre réel. La matrice kA est la matrice obtenue en multipliant echaque coefficient de A par le nombre k.

L'opération la plus subtile sur les matrices est le produit. Quelques exemples et cas particuliers de produits de matrices :

1. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 2 + 1 \times 3 \\ 7 \times 2 + 9 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 41 \end{pmatrix}$;
2. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \times x + b \times y \\ c \times x + d \times y \end{pmatrix}$;
3. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \times x + b \times y & a \times z + b \times t \\ c \times x + d \times y & c \times z + d \times t \end{pmatrix}$;
4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2b + 3c \\ 4a + 5b + 6c \\ 7a + 8b + 9c \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 & 12 & 14 \\ -1 & -2 & -3 \\ 44 & 47 & 33 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1\times 10+2\times(-1)+3\times 44 & 1\times 12+2\times(-2)+3\times 47 & 1\times 14+2\times(-3)+3\times 33 \\ 4\times 10+5\times(-1)+6\times 44 & 4\times 12+5\times(-2)+6\times 47 & 4\times 14+5\times(-3)+6\times 33 \\ 7\times 10+8\times(-1)+9\times 44 & 7\times 12+8\times(-2)+9\times 47 & 7\times 14+8\times(-3)+9\times 33 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 140 & 149 & 107 \\ 299 & 320 & 239 \\ 458 & 491 & 371 \end{pmatrix}.$$

Définition 1.8. En toute généralité, on peut [2] calculer le produit d'une matrice A de taille $n \times p$ avec une matrice B de taille $p \times q$. L'élément sur la i-ème ligne et la j-ème colonne de $A \times B$ est obtenue en faisant la somme des biproduits des éléments de la i-ème ligne de A en allant de la gauche vers la droite avec les éléments de la j-ème colonne de B en allant du haut vers le bas.

Nous allons définir deux matrices particulières :

Définition 1.9. La **matrice nulle** de taille $n \times p$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls.

Par exemple la matrice nulle de taille 2×1 est $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On peut vérifier qu'on a : $A \times I = A$ et $I \times A = A$.

Définition 1.10. La **matrice identité** (ou unité) I_n de taille n est la matrice carrée de taille n qui contient des 1 sur la première diagonale et des zéros ailleurs.

Un exemple, la matrice identité de taille 3 est $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Propriété 1.11. *Pour toute matrice carrée A de taille n, on a*

$$A \times I_n = A \qquad et \qquad I_n \times A = A$$

où I_n est la matrice identité de taille n.

Remarque. **Attention !** Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.On note que

$$A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, **avec les matrices,** $A \times B \neq B \times A$.

Définition 1.12 (et propriété)**.** Soit A une matrice carrée d'ordre n. Lorsqu'il existe une matrice A' carrée d'ordre n telle que $A' \times A = I_n$ ou $A \times A' = I_n$, on dit que la matrice A est **inversible** et on note $A' = A^{-1}$.

On admet donc que lorsque l'inverse A^{-1} existe, on a $A \times A^{-1} = I_n = A^{-1} \times A$.

Retour aux systèmes linéaires Faisons maintenant le lien avec les systèmes linéaires.

Exemple. Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 8 \\ 18 \end{pmatrix}$.

Notons que,

$$A \times X = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 4x + 7y \end{pmatrix}$$

Ainsi, l'**égalité matricielle** $A \times X = B$ équivaut au **système linéaire** :

$$\begin{cases} 2x + 3y & = 8 \\ 4x + 7y & = 18 \end{cases}$$

Si l'on résout le système, on note que les solutions sont $x = 1$ et $y = 2$, c'est-à-dire $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Or, on peut vérifier que

$$X = A^{-1} \times B$$

Propriété 1.13. *Soit A une matrice carrée qui admet une matrice inverse A^{-1}. Le système d'équations linéaires correspondant à $A \times X = B$ admet pour unique solution $X = A^{-1} \times B$.*

Matrice de Léontief

Exercice 2. Dans un pays sans échanges extérieurs, l'économie se décompose en trois branches : l'agriculture (A), l'industrie hors énergie (I) et l'énergie (E).
On donne le tableau d'échanges interbranches (en millier d'euros) ci-dessous :

	Consommation de l'agriculture	Consommation de l'industrie hors énergie	Consommation de l'énergie	Consommation finale (pour la population)	Production totale
Produit agricole	400	400	150		2 000
Produit industriel hors énergie	600	900	210		3 000
Produit de l'énergie	100	810	210		4 000

Exemple de lecture : Pour l'agriculture, la production totale pour une valeur de 2 millions d'euros se répartit en consommation finale (pour la population) et consommations intermédiaires : 400 milliers d'euros consommés par l'industrie, 150 milliers d'euros consommés par l'énergie et 400 milliers d'euros consommés par l'agriculture elle-même.

1. Lire dans le tableau la production de l'énergie consommée par l'agriculture.
2. a) À partir de l'exemple de lecture, justifier que la consommation finale (la part consommée par la population) des produits agricoles est d'une valeur de 1 150 milliers d'euros.
   On remarquera que finalement, la production totale est égale à la somme des consommations des 4 types (agricole, industrie, énergie et population). C'est une particularité du modèle, qui provient de l'hypothèse que ce pays ne procède pas aux échanges extérieurs (en particulier, pas d'exportation).

   b) Compléter la colonne "Consommation finale" du tableau. On note C_f la matrice colonne des consommations finales (par la population) :
$$C_f = \begin{pmatrix} 1\,050 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$
3. On appelle **matrice des coefficients techniques**, la matrice M carrée de taille 3 constituées des 9 coefficients sur les trois premières colonnes du précédent tableau où l'on divise la première colonne par la production totale agricole, la deuxième colonne par la production totale industrielle et la troisième colonne par la production totale d'énergie.
   Plus précisément, si on note a_{ij} le coefficient sur la i-ème ligne et la j-ème colonne de la matrice M, alors
$$a_{ij} = \frac{\text{consommation du produit i par la branche j}}{\text{production totale de la branche j}}$$
   où les branches sont numérotées ainsi : 1 : agriculture, 2 : industrie, 3 : énergie.

   a) Déterminer la matrice des coefficients techniques avec les coefficients sous forme de fractions simplifiées :
$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{15} & \frac{3}{80} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

   b) Calculer le produit $M \times P$. On note C_i le résultat et on l'appelle matrice des consommations intermédiaires.
   Justifier que le premier coefficient de la matrice C_i correspond à la valeur en euros des produits agricoles consommés par les trois branches.

c) On note I la matrice identité de taille 3. Rappeler ses coefficients.

d) Vérifier que $(I - M) \times P = C_f$.
En effectuant le calcul sur feuille et sans la calculatrice de $(I - M) \times P$, justifier pourquoi on tombe sur la matrice C_f.
La matrice $L = I - M$ est appelée **matrice de Léontief**.

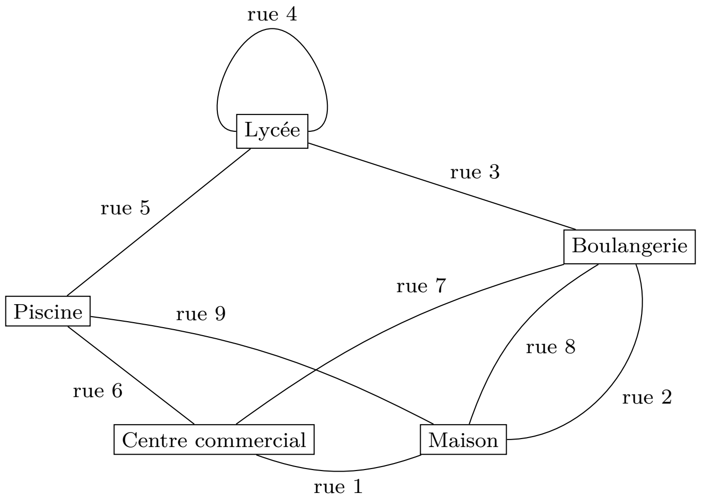
4. On suppose que la matrice M des coefficients techniques reste stable et que la consommation finale (par la population) :
   - en produit agricole baisse de 10% ;
   - de la production industrielle augmente de 10% ;
   - et de l'énergie de 20%.

a) Déterminer la nouvelle matrice C_f des consommations finales (par la population).

b) On pose $P = \begin{pmatrix} a \\ i \\ e \end{pmatrix}$ la matrice des productions totales nécessaires dans cette nouvelle configuration.
À l'aide de l'équation $(I - M) \times P = C_f$, déterminer la matrice P.

2 Problème d'organisation, graphes

Un exemple de graphe :

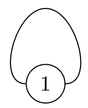


Définition 2.1. Un **graphe** est la donnée d'un ensemble de *sommets* et d'un ensemble d'*arêtes* qui relient deux sommets.

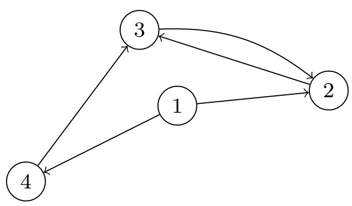
Quelques vocabulaires supplémentaires :

Définition 2.2.

- L'**ordre** du graphe est le nombre de ses sommets.
- Une **boucle** est une arête reliant un sommet à lui-même.



- Deux sommets reliés par une arête sont dits **adjacents**.
- Un graphe **simple** est un graphe sans boucle et tel qu'entre deux sommets, il y a *au plus une* arête.
- Un **graphe orienté** est un graphe tel que *ses arêtes ont un sens de parcours*. On parle aussi d'*arcs* au lieu d'arêtes dans un graphe orienté.



- Un **graphe complet** est un graphe dont tous les sommets sont reliés deux à deux par une unique arête.

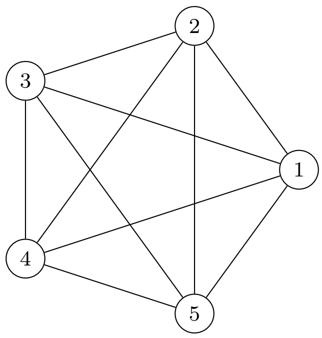
Définition 2.3. Le **degré** d'un sommet est égal au *nombre* de fois où le sommet est l'extrémité d'une arête.

Remarque. Lorsque le graphe est simple, le degré d'un sommet est plus simplement égal au nombre d'arêtes issues de ce sommet.
Lorsque le graphe n'est pas simple, alors une arête qui forme une boucle sur un sommet compte pour **deux** dans le degré de ce sommet.

Propriété 2.4. *La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale au double du nombre total d'arêtes :*

$$\sum_{S \text{ sommet}} \deg(S) = 2 \times \textit{Nombre d'arêtes}$$

Remarque. Dans un graphe complet d'ordre n (avec n sommets), le degré d'un sommet est égal à $n-1$.
Voici le graphe complet d'ordre 5 :

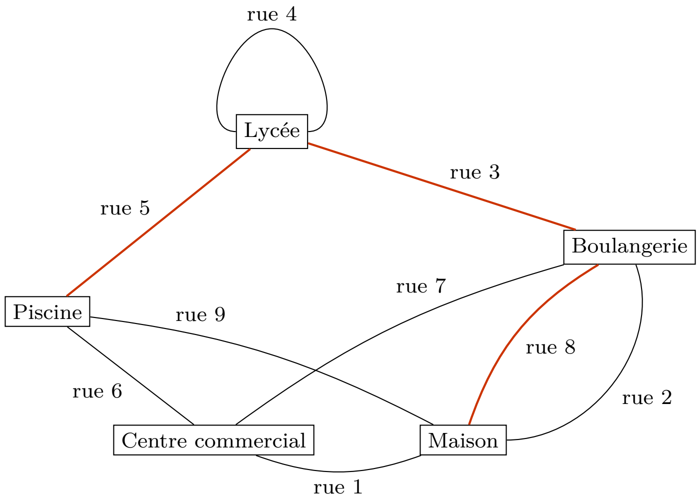


Maintenant que nous avons introduit la notion de graphe, nous allons les parcourir.

2.1 Chaînes sur un graphe

Définition 2.5. Dans un graphe, une **chaîne** (ou un chemin) est une suite d'arêtes mise bout à bout. La **longueur d'une chaîne** est le nombre d'arêtes constituant la chaîne.
Dans le cas, où les arêtes ont été prises *une seule fois* et que les *extrémités coïncident*, la chaîne est un **cycle**.

Dans une chaîne, on peut prendre plusieurs fois la même arête. Un exemple de chaîne :



La chaîne est représentée en rouge.

Définition 2.6. Un graphe est **connexe** lorsque, pour chaque paire de sommets, il *existe au moins une chaîne* reliant les deux sommets.

En d'autres termes, lorsque un graphe est connexe, il est "d'un seul tenant".

Définition 2.7. Une **chaîne Eulérienne** est une chaîne composée de toutes les arêtes du graphe, chacune prise **une** seule fois.
Si, de plus, la chaîne revient à son sommet d'origine, la chaîne Eulérienne est un **cycle Eulérien**.

Une chaîne eulérienne est une chaîne qui permet de parcourir toutes les arêtes du graphe sans faire de demi-tour (c'est-à-dire, reprendre une arête déjà parcouru).

Exemple. Le graphe donné en introduction de ce chapitre admet une chaîne Eulérienne. La voici
Maison - Boulangerie - Lycée - Lycée - Piscine - Centre commercial - Boulangerie - Maison - Piscine

Théorème 2.8 (théorème d'Euler)**.**
Un graphe admet **une chaîne Eulérienne** *si, et seulement si, ce graphe est connexe et il a exactement aucun ou deux sommets de degré impair.*
Dans le cas d'un graphe connexe ayant aucun sommet de degré impair, la chaîne Eulérienne est, plus précisément, un **cycle Eulérien***.*

Remarque. L'hypothèse « le graphe est connexe » est aussi très importante ! En plus de l'étude des degrés des sommets, il faudra vérifier à chaque fois cette hypothèse.

Nous allons faire un lien avec le chapitre précédent sur les matrices.

2.2 Matrice d'adjacence

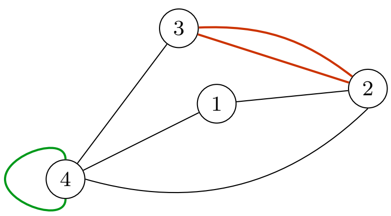
Définition 2.9. Soit G un graphe d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n. La **matrice d'adjacence** du graphe G est la matrice carrée A de taille n :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & & \dots & a_{2p} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & & \dots & a_{3p} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{i1} & & & & {\color{red}a_{ij}} & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

où ${\color{red}a_{ij}}$, le coefficient sur la i-ème ligne et j-ème colonne, est égal au nombre d'arêtes reliant les sommets i et j.
Lorsque i et j ne sont pas adjacents, alors $a_{ij} = 0$.
Si le graphe G est orienté, a_{ij} est le nombre d'arêtes allant du sommet i vers le sommet j.

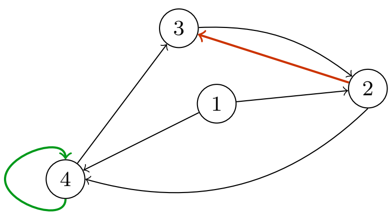
Exemples.

1. La matrice d'adjacence du graphe :



est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & {\color{red}2} & 1 \\ 0 & {\color{red}2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & {\color{green}1} \end{pmatrix}$.

2. La matrice d'adjacence du graphe orienté :



est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & {\color{red}1} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & {\color{green}1} \end{pmatrix}$.

Remarques.

- Dans un graphe non orienté et simple, la somme des termes d'une ligne (ou d'une colonne) de la matrice d'adjacence est égale au degré du sommet associé à la ligne (ou colonne).
- La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique par rapport à la première diagonale.
- La matrice composée de 1, sauf la diagonale composée de 0, est la matrice d'un *graphe complet*.

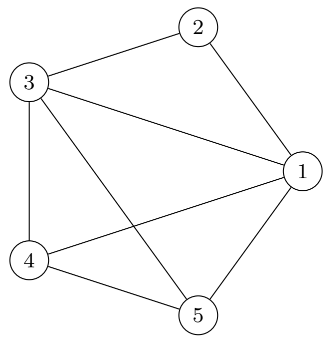
- Soit G un graphe orienté, alors la somme des éléments de la matrice d'adjacence est égale au nombre d'arêtes.

Théorème 2.10. *Soit G un graphe et A sa matrice d'adjacence et p un entier.*
Soit $M = A^p$ la puissance p-ème de A :

$$A^p = \underbrace{A \times \ldots \times A}_{p \text{ fois}}$$

L'élément m_{ij} de la matrice A^p est **égal au nombre de chaînes de longueur p reliant le sommet i au sommet j.**

Exemple. Considérons le graphe suivant :



Sa matrice d'adjacence est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Combien y a-t-il de chemins de longueur 3 allant du sommet 1 au sommet 2 ?
Avec un peut de méthode, on peut voir qu'il y en a 7 en tout. Les voici :

1 - 2 - 1 - 2

1 - 2 - 3 - 2

1 - 3 - 1 - 2

1 - 4 - 1 - 2

1 - 4 - 3 - 2

1 - 5 - 1 - 2

1 - 5 - 3 - 2

On peut le vérifier à l'aide de la matrice d'adjacence :

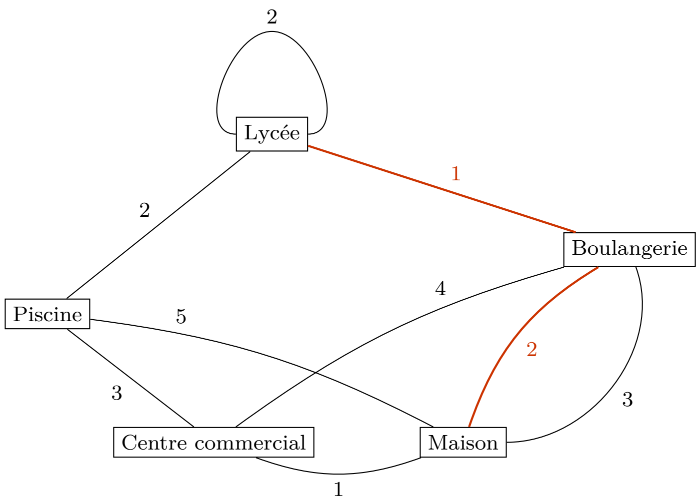
$$A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 9 & 9 \\ 7 & 2 & 7 & 4 & 4 \\ 9 & 7 & 8 & 9 & 9 \\ 9 & 4 & 9 & 6 & 7 \\ 9 & 4 & 9 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

et le coefficient sur la première ligne et deuxième colonne est bien 7.

3 Recherche du plus court chemin, graphes pondérés

Définition 3.1. Un graphe est dit **étiqueté** lorsque ses arêtes sont affectées d'étiquettes. Elles peuvent être des nombres, des symboles, des lettres, etc.

Un exemple de graphe étiqueté se trouve sur la page 16. Au lieu d'indiquer les noms des rues dans ce graphe, on pourrait indiquer les distances(en km) :



Un tel graphe est un graphe pondéré.

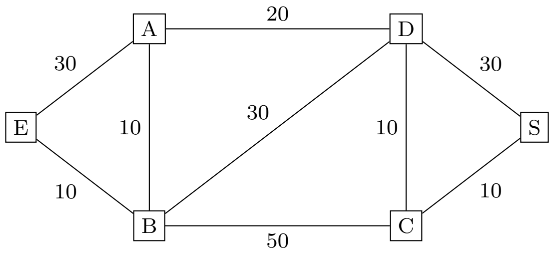
Définition 3.2.
- Un **graphe pondéré** est un graphe étiqueté dont les étiquettes sont des nombres positifs, appelé *poids* de cette arête.
- Le **poids d'une chaîne** d'un graphe pondéré est la somme des poids des arêtes qui la composent.
- Une **plus courte chaîne** (ou chemin) entre deux sommets est, parmi toutes les chaînes qui les relient, une chaîne de poids minimal.
  Le poids de cette plus courte chaîne définit la distance entre les deux sommets.

Exemple. Dans le graphe précédent, le plus court chemin de la maison au lycée est en rouge.

Attention ! On verra qu'une plus courte chaine ne passe pas nécessairement par le moins d'arêtes possibles. Il faut bien distinguer le poids d'une chaine (la somme des étiquettes) et sa longueur (le nombre d'arêtes parcourues)

3.1 Plus courte chaîne : algorithme de Dijkstra

Considérons le graphe pondéré suivant :



Quelle est le plus court chemin de l'entrée E à la sortie S ? Dans l'exemple précédent, on peut envisager de tester tous les chemins sans boucle de E à S mais la méthode la plus adaptée est d'appliquer l'algorithme de Dijkstra.

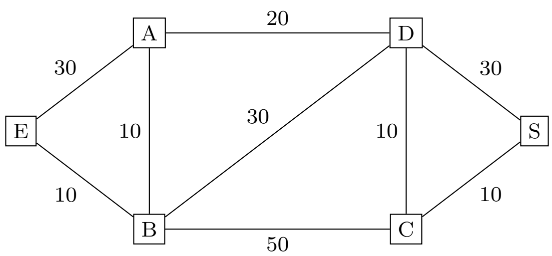
Définition 3.3. Algorithme de Dijkstra

Entrée : G un graphe pondéré connexe non orienté avec un sommet E (entrée) et un sommet S (sortie).
Initialisation :
  On affecte *définitivement* le poids 0 à l'entrée (début) E.
  On attribue *provisoirement* aux sommets adjacents à E le poids des arêtes qui le relient à E.
  On attribue *provisoirement* aux autres sommets du graphe le poids ∞.
Tant que il y a des sommets avec un poids provisoire (ou que le poids du sommet S est provisoire) **faire**
    Parmi les sommets de poids provisoire, choisir un des sommets de poids le plus faible. On le note T
    Attribuer à T son poids *définitivement*
    Pour tous les sommets T' voisin de T dont le poids est encore provisoire **faire**
      On pose p la somme du poids de T et du poids de l'arête de T à T'
      $\triangleright$ p est le poids du chemin de E à T' passant par T
      Si p < poids de T' **alors**
        Remplacer le poids de T' par p
        Marquer "p (T)" au-dessus de l'arête T' pour marquer la provenance de cette dernière affectation et son nouveau poids.
      Fin Si
    Fin Pour
Fin Tant que

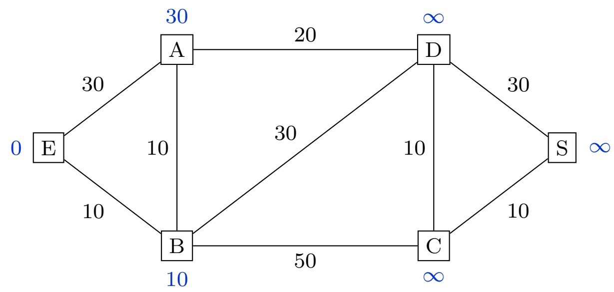
Remarques.

- L'algorithme peut aussi être appliqué si le graphe G est orienté.
- Une page web avec une animation pour suivre pas à pas les étapes de l'algorithme : `http://yallouz.arie.free.fr/terminale_cours/graphes/dijkstra.php`
- L'algorithme a été trouvé par Edsger Wybe Dijkstra, mathématicien et informaticien néerlandais, en 1959.

Exemple. Appliquons l'algorithme de Dijkstra à l'exemple précédent :

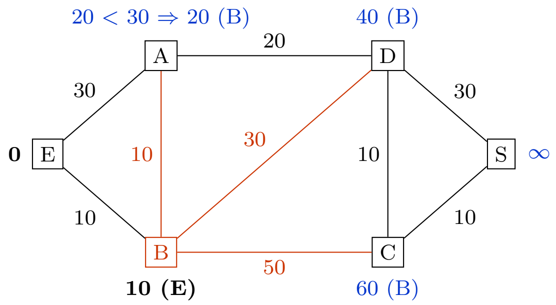


L'initialisation :

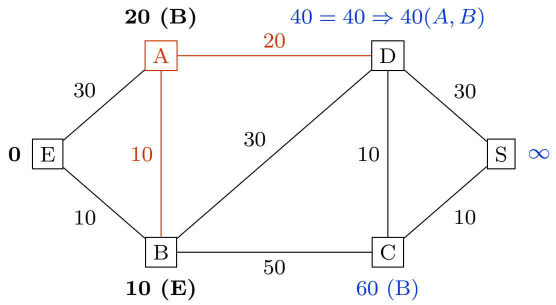


Parcours des arêtes de poids provisoire. Dans les graphes suivants, en bleu sont représentés les poids des arêtes qui sont encore provisoires et en noire ceux qui sont définitifs.

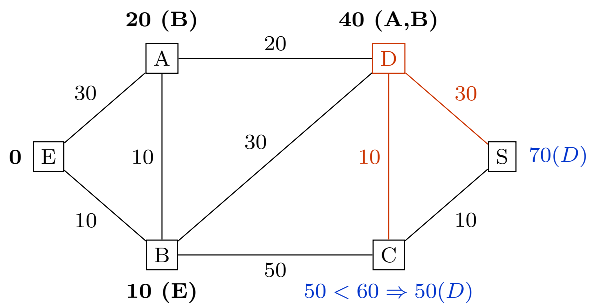
1) On choisit l'arête de poids minimal : B



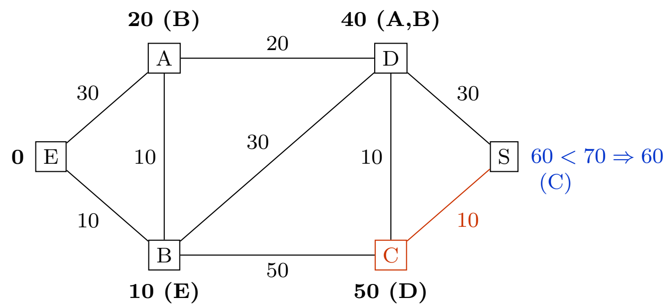
2) On choisit l'arête de poids minimal : A



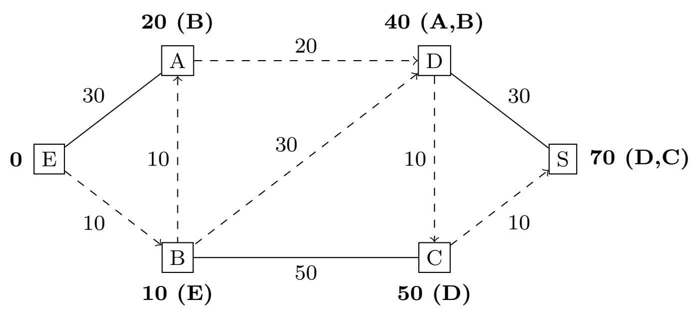
3) On choisit l'arête de poids minimal : D



4) On choisit l'arête de poids minimal : C



On finit avec le sommet S :



On note qu'effectivement, le chemin le plus court du sommet E à S a pour poids 60 et il y a deux chemins possibles : $E - B - D - C - S$ ou $E - B - A - D - C - S$.

On peut aussi effectuer toutes les étapes de l'algorithme de Dijkstra sur un tableau comme suit :

Étape	E	A	B	C	D	S	Min
Initialisation	**0**	30 (E)	10 (E)	∞	∞	∞	B
Voisins de B	**0**	30 (B)	**10 (E)**	60 (B)	40 (B)	∞	A
Voisins de A	**0**	**30 (B)**	**10 (E)**	60 (B)	$40 < 40 \Rightarrow 40$ (B,A)	∞	D
Voisins de D	**0**	**30 (B)**	**10 (E)**	$50 < 60 \Rightarrow 50$ (D)	**40 (B,A)**	$70(D)$	C
Voisins de C	**0**	**30 (B)**	**10 (E)**	**50 (D)**	**40 (B,A)**	$60 < 70 \Rightarrow 60$ (C)	S
Le sommet S	**0**	**30 (B)**	**10 (E)**	**50 (D)**	**40 (B,A)**	**60 (C)**	

Remarque. Voici le lien vers une vidéo illustrant l'utilisation d'un tableau pour appliquer l'algorithme : `http://youtu.be/dS1Di2ZHl4k`
Quelques remarques sur la vidéo :

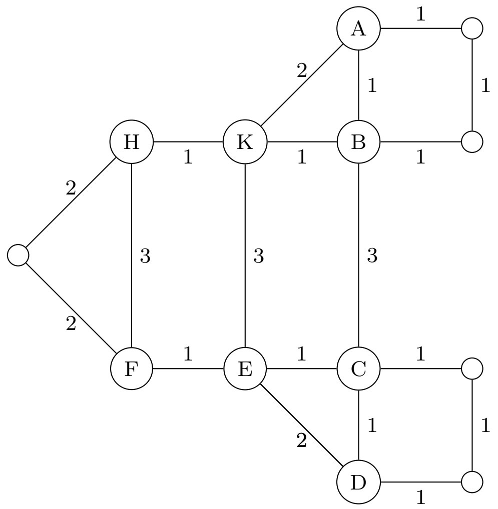
- les commentaires sont en anglais :
- "path" : chemin ;
- "node" : sommet ;
- "edge" : arête.
- Dans la colonne "unvisited", il répertorie les arêtes avec un poids provisoire et dans la colonne "visited", il répertorie les arêtes avec un poids définitif.
- Avec la version de l'algorithme qu'on a vu précédemment, l'étape d'initialisation correspond dans la vidéo à l'étape d'initialisation plus l'étape "iteration 1".

Propriété 3.4. *Si G est un graphe pondéré connexe et non orienté, l'algorithme de Dijkstra détermine une chaîne de poids minimal entre deux sommets du graphe.*

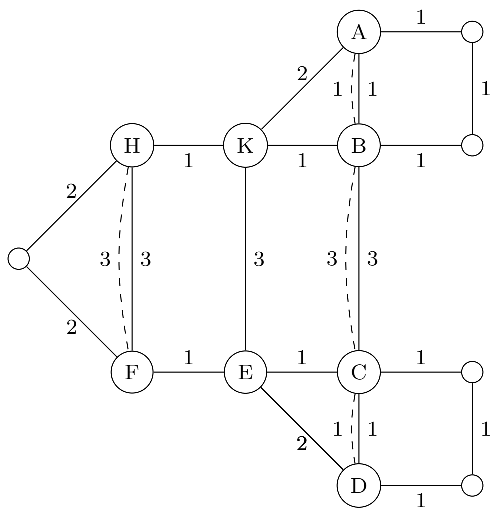
3.2 Couplage minimal

Le problème dit du “postier chinois" consiste à optimiser la distribution du courrier en parcourant, au moins une fois, chacune des rues d'une ville (ou d'un quartier d'une ville) en cherchant à minimiser la distance totale parcourue.

Ce problème a été posé, pour la première fois, par le Chinois Kwan Mei-Ko, en 1962.
On considère le graphe suivant, représentant le plan d'une tournée d'un facteur dans un ville. Les poids sur les arêtes sont les longueurs des rues, exprimée en hectomètres et les sommets représentent les intersections des rues. Le bureau de poste est situé au point B.



1. Lorsque le facteur effectue sa tournée, il part toujours du bureau situé en B pour y revenir en fin de tournée. Le facteur se rend compte qu'en changeant tous les jours d'itinéraire, il n'arrive pas à effectuer sa tournée en passant exactement une fois dans chaque rue. Pouvez-vous lui dire pourquoi ?
2. Calculer d la somme des poids du graphe. Justifier que la distance minimale que le facteur peut parcourir est supérieure strictement à d hectomètres ?
3. Lister les noeuds de degré impair.
4. Le couplage A-D et F-H : Considérons que le facteur s'autorise à prendre deux fois le chemin A-B-C-D et deux fois le chemin H-F (celui de poids 3). On peut représenter la nouvelle configuration ainsi :



a) Montrer que cette nouvelle configuration admet une chaîne Eulérienne partant de B et en déterminer une.

b) Quelle est la distance totale d_1, en hectomètres, parcourue par le facteur en parcourant la précédente chaîne Eulérienne ?

c) Justifier que la distance (minimale) entre A et D est 5 hectomètres et la distance (minimal) entre F et H est 3 hectomètres.

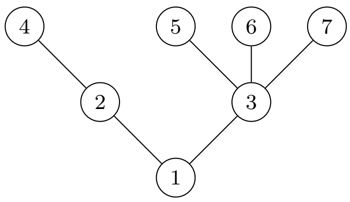
d) Vérifier que $d_1 = d + 5 + 3$.

5. Faire le même raisonnement que dans la question précédente, avec le couplage $A - F$ et $D - H$ (attention à bien emprunter une chaîne plus courte pour aller de A) F et de même de D à H).
6. De même avec le couplage $A - H$ et $D - F$.
7. Y a-t-il un autre couplage possible entre les arêtes de degré impair ?
8. Conclure que la distance minimale que le facteur doit parcourir pour faire sa tournée est de 3500m et préciser un exemple d'une tournée "minimale".

3.3 Arbre couvrant minimal : algorithme de Krustal

Définition 3.5. Un **arbre** est un graphe connexe sans cycle.

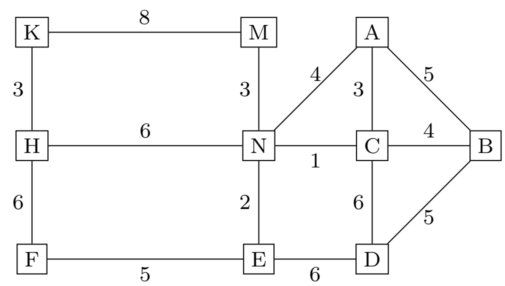
Un exemple d'arbre :



Définition 3.6.

1. Un **sous-graphe** d'un graphe G est un graphe tel que
   - ses sommets sont des sommets de G ;
   - ses arêtes sont certaines arêtes de G reliant ces sommets.
2. Un **sous-graphe couvrant** d'un graphe G est un sous-graphe contenant tous les sommets de G.
3. Un **sous-arbre couvrant** d'un graphe G est un sous-arbre contenant tous les sommets de G.
4. Un **arbre couvrant minimal** est un arbre couvrant d'un graphe pondéré G dont le poids total des arêtes est minimal.

Exemple. Deux compagnies maritimes, Alpha et Delta, desservent les dix îles d'un archipel. Le graphe G de la figure à droite représente les liaisons maritimes entre ces îles : les sommets sont les îles et les arêtes, les liaisons maritimes reliant ces îles. Les arêtes sont pondérées par les distances entre ces îles, exprimées en milles (1 mille marin = 1,852 km).



Pour des raisons économiques, la compagnie Delta ne peut plus assurer de liaisons maritimes entre ces îles. La compagnie Alpha décide alors de réorganiser les liaisons maritimes en gardant un réseau qui connecte toutes les îles entre elles par un minimum de liaisons. Elle veut aussi minimiser la distance totale des liaisons qu'elle va assurer.
Cela revient à déterminer un graphe G_m de poids minimal ayant les mêmes sommets que le graphe G et seulement neuf arêtes reliant ces sommets. Le graphe G_m est donc un graphe connexe, sans cycle et de poids minimal : c'est un arbre couvrant minimal.

Pour déterminer l'arbre couvrant minimal, on va utiliser l'algorithme suivant :

Définition 3.7. Algorithme de Krustal

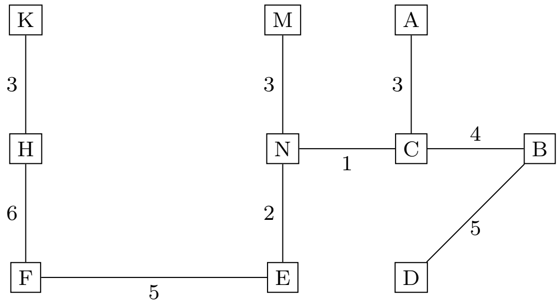
1: **Entrée :** G un graphe pondéré connexe non orienté.
2: Trier les arêtes du graphe par ordre croissant de poids.
3: Sélectionner une arête de poids minimal.
4: Continuer à sélectionner une nouvelle arête de poids minimal, sans introduire de cycle, jusqu'à ce que tous les sommets soient connectés.

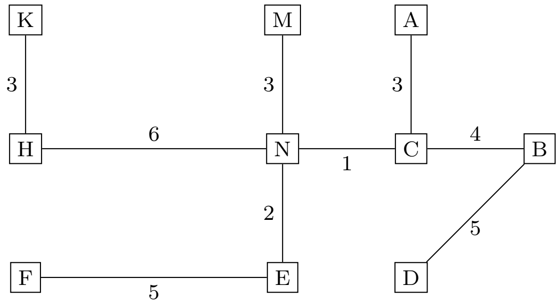
Remarque. L'algorithme de Krustal, du nom de son inventeur Joseph Krustal (1928-2010), a été publié en 1956.

Exemple. Revenons à l'exemple précédent et appliquons l'algorithme de Krustal :

Arête	C-N	N-E	N-M	C-A	K-H	N-A	C-B	A-B	B-D	E-F	C-D	E-D	F-H	H-N	K-M
Poids	1	2	3	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	6	8
Arête sélectionnée	C-N	N-E	N-M	C-A	K-H		C-B		B-D	E-F			F-H		
Variante	C-N	N-E	N-M	C-A	K-H		C-B		B-D	E-F				H-N	

Ainsi, on trouve deux arbres couvrant minimaux :





La distance minimale est égale à 32 miles.

Propriété 3.8. *L'algorithme de Krustal appliqué à un graphe pondéré, connexe et non orienté, permet de déterminer un arbre couvrant minimal.*

On notera qu'un graphe pondéré connexe non orienté peut admettre plusieurs arbres couvrants de poids minimal.

4 Problèmes d'évolution, graphes probabilistes

On va s'intéresser à l'évolution d'un système dans le temps qui peut prendre uniquement 2 états : 1 et 2.

- A l'instant 0, la probabilité que le système se trouve à l'état 1 est a_0 et la probabilité que le système se trouve à l'état 2 est b_0.
- A l'instant n, la probabilité que le système se trouve à l'état 1 est a_n et la probabilité que le système se trouve à l'état 2 est b_n.

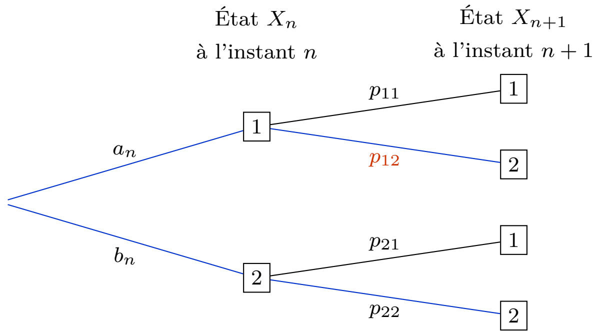
Notons X_n l'état dans lequel se trouve le système à l'instant n. Alors, le précédent point se réécrit ainsi :

$$P(X_n = 1) = a_n \qquad \text{et} \qquad P(X_n = 2) = b_n$$

On suppose que l'état dans lequel le système va se trouver à l'instant $n+1$ (l'instant suivant) dépend uniquement de l'instant n. En d'autres termes, l'état futur du système est uniquement déterminé par son état présent. Un tel processus “sans mémoire" est appelé une **chaîne de Markov**.

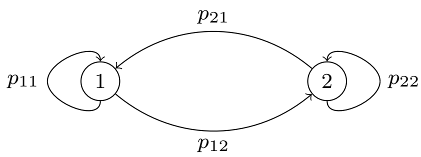
Remarque : Andreï Markov (1856-1922) était un mathématicien russe qui se spécialisa dans le calcul des probabilités dans les années 1900. Ses contributions dans se domaine ont été significative.

La précédente hypothèse peut être modélisée par un arbre :



Une autre représentation des probabilités de transition entre les états du système est possible par un arbre orienté pondéré :

Définition 4.1. Le graphe probabiliste du système à deux états est le graphe orienté et pondéré suivant :



Un arc $i \to j$ est pondéré par la probabilité conditionnelle, notée p_{ij}, de transition de l'état i à j d'un instant à l'instant suivant.

À l'aide du précédent arbre, on déduit la propriété suivante.

Propriété 4.2. *La somme des probabilités conditionnelles issues d'un état fixé vaut 1 :*

- $p_{11} + p_{12} = 1$;
- $p_{21} + p_{22} = 1$.

Le nombre p_{12} est la probabilité que le système passe à l'état 2 sachant qu'il était à l'état 1 et le nombre p_{22} est la probabilité que le système passe à l'état 2 sachant qu'il était à l'état 2. Ainsi, à l'aide de ces deux probabilités conditionnelles, on déduit que la probabilité que le système se trouve à l'état 2 à l'instant $n+1$ est

$$b_{n+1} = a_n \times p_{12} + b_n \times p_{22} \tag{B}$$

De même, la probabilité que le système se trouve à l'état 1 à l'instant $n+1$ est

$$a_{n+1} = a_n \times p_{11} + b_n \times p_{21} \tag{A}$$

Définition 4.3. La matrice M

$$M = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

dont le coefficient p_{ij} sur la i-ème ligne et j-ème colonne est la probabilité conditionnelle que le système passe de l'état i à l'état j l'instant suivant. La matrice M est appelée la **matrice de transition**.

La précédente propriété peut être reformulée ainsi

Propriété 4.4. *Dans une matrice de transition, la somme des coefficients d'une ligne vaut 1.*

En revenant aux équations (A) et (B) ci-dessus, on note que quel que soit l'instant n,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} a_n & b_n \end{bmatrix} \times M \\ = & \begin{bmatrix} a_n & b_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \\ = & \begin{bmatrix} a_n \times p_{11} + b_n \times p_{21} & a_n \times p_{11} + b_n \times p_{22} \end{bmatrix} \\ = & \begin{bmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Propriété 4.5. *Dans une chaîne de Markov à deux états et avec les notations précédentes, on pose :*

$$P_n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \end{bmatrix}$$

la matrice ligne dont le coefficient sur le i-ème colonne est la probabilité que le système se trouve à l'état i à l'instant n. Alors,

$$P_{n+1} = P_n \times M$$

où M est la matrice de transition.

En particulier de la relation précédente on déduit que

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_0 & b_0 \end{bmatrix} \times M \\
\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \end{bmatrix} \times M \\
&= \left(\begin{bmatrix} a_0 & b_0 \end{bmatrix} \times M \right) \times M \\
&= \begin{bmatrix} a_0 & b_0 \end{bmatrix} \times M^2 \\
\begin{bmatrix} a_3 & b_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \end{bmatrix} \times M \\
&= \left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \end{bmatrix} \times M^2 \right) \times M \\
&= \begin{bmatrix} a_0 & b_0 \end{bmatrix} \times M^3
\end{aligned}$$

Ce fait peut être généralisé :

Propriété 4.6. *Dans une chaîne de Markov à deux états et avec les notations précédentes, on a*

$$\begin{bmatrix} a_n & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 \end{bmatrix} \times M^n$$

C'est-à-dire

$$P_n = P_0 \times M^n.$$

La probabilité que le système soit à l'état i à l'instant n se lit sur la i-ème colonne du produit de la matrice $\begin{bmatrix} a_0 & b_0 \end{bmatrix}$ par la matrice de transition M à la puissance n.

Remarque. Dans la formule précédente, on notera une analogie avec l'expression de u_n en fonction de n lorsque (u_n) est une suite géométrique : $u_n = u_0 \times q^n$.

4.1 Chaîne de Markov avec 2 ou 3 états

Ce qui a été vu précédemment pour deux états se généralise à davantage d'états.

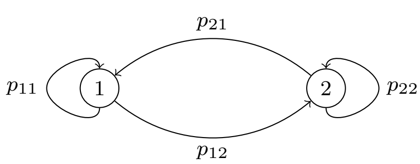
Définition 4.7. Un **graphe probabiliste** est un graphe **orienté** et **pondéré** tel que :

- Ses sommets sont les états possibles du système ;
- Un arc $i \to j$ est pondéré par la probabilité conditionnelle, notée p_{ij}, de transition de l'état i à j.

À un tel graphe probabiliste, on associe la matrice carrée $M = [p_{ij}]$ de taille n, où n est l'ordre du graphe. La matrice M est appelée la **matrice de transition** du système.

Exemples.

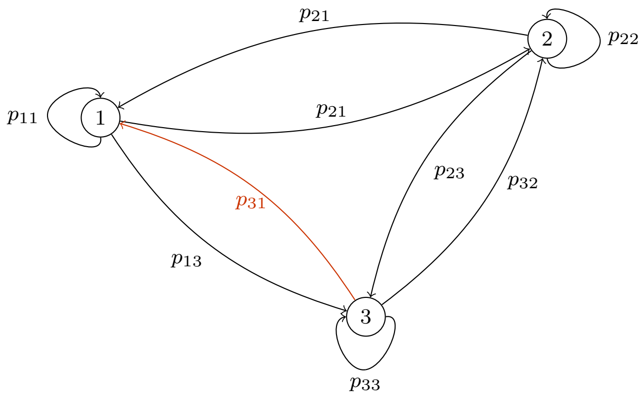
1. Graphe probabiliste d'ordre 2 :



La matrice de transition associée

$$M = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{12} \end{bmatrix}$$

2. Graphe probabiliste d'ordre 3 :



La matrice de transition associée

$$M = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{12} & p_{13} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

Propriété 4.8. *Dans une matrice de transition, la somme des coefficients d'une ligne vaut 1.*

Définition 4.9. On pose P_n la matrice dont le coefficient sur le i-ème colonne est la probabilité que le système se trouve à l'état i à l'instant n. Cette matrice représente la loi de probabilité du système à l'instant n est appelée **état probabiliste** à l'instant n.

Propriété 4.10. *Soit n un entier naturel. Dans une chaîne de Markov, avec les notations précédentes, on a :*

1. $P_{n+1} = P_n \times M$, *la loi de probabilité à l'instant* $n+1$ *(l'instant suivant) se déduit de la loi de probabilité à l'instant* n *et de la matrice de transition* M.
2. $P_n = P_0 \times M^n$.
3. $P_n = P_1 \times M^{n-1}$.

4.2 État stable

Définition 4.11. Un **état probabiliste** P est dit **stable** si $P = P \times M$, où M est la matrice de transition associée au graphe.

En fait, lorsqu'un état probabiliste P est stable, la probabilité qu'un système soit à l'état i à un instant donné est la même qu'à l'instant suivant. Dans une telle configuration, la loi de probabilité du système ne dépend plus de l'instant donné : elle est donc stable.

Propriété 4.12. *Pour tout graphe probabiliste d'ordre 2 dont la matrice de transition M ne comporte pas de 0, l'état probabiliste $P_n = \begin{bmatrix} x_n & y_n \end{bmatrix}$ converge vers un unique état probabiliste $P = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$ indépendant de l'état initial.*
Cet état stable P vérifie $P = PM$.
De plus,

$$x = \lim_{n\to+\infty} x_n \qquad \textit{et} \qquad y = \lim_{n\to+\infty} y_n.$$

Ce résultat est encore vrai avec trois états :

Propriété 4.13. *Pour tout graphe probabiliste d'ordre 3 dont la matrice de transition M ne comporte pas de 0, l'état probabiliste $P_n = \begin{bmatrix} x_n & y_n & z_n \end{bmatrix}$ converge vers un unique état probabiliste $P = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ indépendant de l'état initial.*
Cet état stable P vérifie $P = PM$.
De plus,

$$x = \lim_{n\to+\infty} x_n, \qquad y = \lim_{n\to+\infty} y_n \qquad \textit{et} \qquad z = \lim_{n\to+\infty} z_n.$$