Notes de cours de mathématiques en Première STMG

O. Lader

Table des matières

1 Proportion (3S) 2
1.1 Union et intersetion . . . 3

2 Second degré (3S) 5
2.1 Forme canonique . . . 5
2.2 Équation du second degré . . . 7

3 Évolution (3S) 9

4 Suites, généralités (1S) 11
4.1 Sens de variation . . . 12

5 Statistiques descriptives (3S) 13
5.1 La moyenne et écart type . . . 13

6 Suites arithmétiques et géométriques (3S) 15

7 Probabilités : Schéma de Bernoulli (2S) 17
7.1 Rappels . . . 17
7.2 Schéma de Bernoulli . . . 20

8 Dérivation : Second degré (3S) 22
8.1 Rappels : Fonction affine . . . 22
8.2 Tangente à une parabole . . . 22
8.3 Fonction dérivée . . . 23
8.4 Rappel : Tableau de signe d'une fonction affine . . . 24

9 Loi binomiale (3S) 27

10 Dérivation, Troisième degré (3S) 30

11 Échantillonnage et prise de décision (4S) 31

1 Proportion (3S)

Définition 1.1. Soit A une partie d'une population E. La **proportion des éléments de A par rapport à E** est

$$p = \frac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } E} = \frac{n_A}{n_E}$$

Lorsqu'on connait deux quantités parmi les trois termes p, n_A et n_E, on peut retrouver le troisième :

Propriété 1.2. *Soit $p = \frac{n_A}{n_E}$ la proportion de A dans E, alors on a :*

1) $n_A = p \times n_E$;
2) $n_E = \frac{n_A}{p}$.

Une proportion s'exprime souvent sous forme de pourcentage.
Un pourcentage est une façon d'exprimer un nombre comme une fraction de cent :

$$a\% = a\,\frac{1}{100} \quad \text{où } 0 \leq a \leq 100$$

Exemple. Dans une population de référence constitué de 400 personnes, on suppose que 56 personnes ont une particularité P. La proportion de personnes ayant la particularité P est $\frac{56}{400}$. Pour exprimer cette **proportion** en un **pourcentage**, on peut procéder comme suit :

$$\frac{56}{400} = \frac{56 \times 100}{400 \times 100} = \frac{56}{4}\frac{1}{100} = 14\%$$

On peut retrouver le pourcentage, en complétant le tableau de proportionnalité suivant :

400	100
56	$100 \times \frac{56}{400} = 14$

$\times \frac{56}{400}$

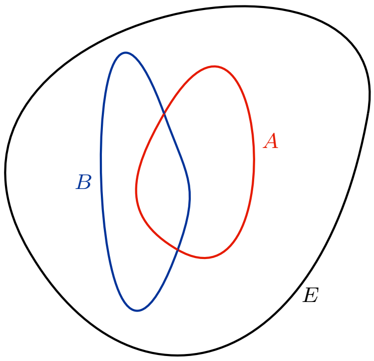
Le nombre 14 représente le nombre de personnes ayant la particularité P parmi 100 personnes.

Propriété 1.3. *Le pourcentage x d'une population ayant un caractère P donné est égale à la proportion de la population ayant ce caractère multiplié par 100 :*

$$x = \textit{proportion} \times 100 = \frac{\textit{Nombre de personnes ayant le caractère } P}{\textit{taille de la population considérée}} \times 100$$

1.1 Union et intersetion

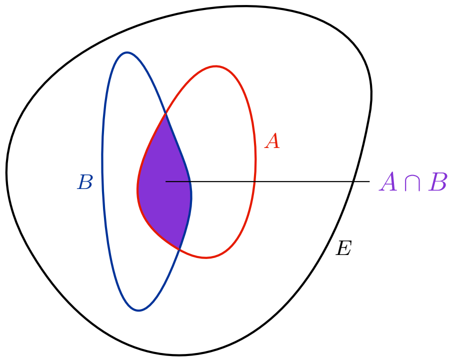
Soit A et B deux parties (ou sous-populations) d'une population E.



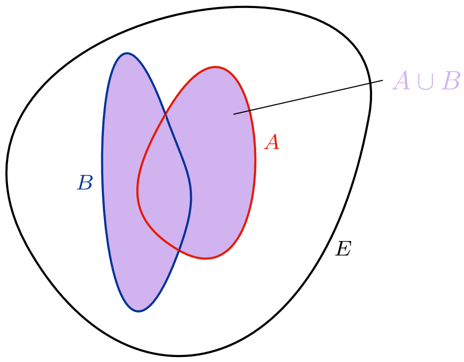
Par exemple, considérons la population E des élèves d'une classe de lycée et désignons par A ceux qui possèdent un smartphone et par B ceux qui ont une calculatrice scientifique.

Définition 1.4.

1) L'**intersection**, notée $A \cap B$, est constitué des éléments qui sont dans A **et** dans B :



2) L'**union**, notée $A \cup B$, est constitué des éléments qui appartiennent à *au moins l'une* des deux parties A **ou** B :



Propriété 1.5. *Soit A et B deux sous-populations d'une même population E. On note p_A la proportion d'invidus de A dans E et de même, p_B, $p_{A\cap B}$ et $p_{A\cup B}$. On a la relation suivante :*

$$p_{A\cup B} = p_A + p_B - p_{A\cap B}$$

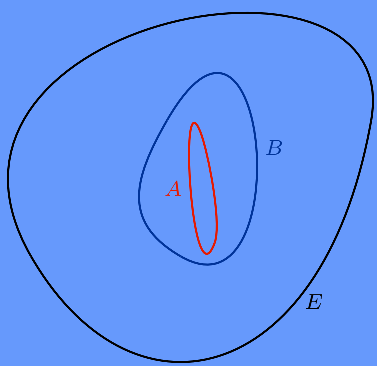
Définition 1.6. Deux sous-populations A et B d'une même population E sont **disjointes** lorsqu'elles n'ont pas d'élément commun et le note ainsi : $A \cap B = \emptyset$.

Il n'y a pas d'individus dans la partie vide, d'où lorsque A et B sont disjointes, $p_{A\cap B} = 0$ et de la propriété précédente, on déduit que dans ce cas, $p_{A\cup B} = p_A + p_B$.

Définition 1.7. Un ensemble A est **inclus** dans un ensemble B, noté $A \subset B$, lorsque tous les éléments de A appartiennent à B.

Notons que si A est une sous-population d'une population E alors naturellement, $A \subset E$.

Propriété 1.8. *Dans une population E, considérons deux sous-populations A et B. Supposons que A est incluse dans B, alors $A \subset B \subset E$:*



De plus, la proportion p_A de A dans E est égale au produit de la proportion p' de A dans B et de la proportion p_B de B dans E :

$$p_A = p' \times p_B$$

2 Second degré (3S)

Définition 2.1. Une fonction **polynôme de degré deux** (ou un trinôme du second degré) est une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont des nombres réels donnés tel que $a \neq 0$.
Les trois réels a, b et c sont les coefficients de la fonction f. De plus, a est appelé le coefficient dominant.

Par abus de langage, on se permet d'identifier la fonction f avec l'expression algébrique $ax^2 + bx + c$.

Exemples. Quelques exemples des fonctions polynômes du second degré :

— $f(x) = 1043x^2 + 12564x - 1954$,
— $f(x) = (x-1)(x+2)$,
— $f(x) = (x+1)^2$.

Les fonctions suivantes ne sont pas des fonctions polynômes du second degré :

— $f(x) = x + 1$,
— $f(x) = x^3 + x + 1$,
— $f(x) = (x+1)^2 - x^2$.

Remarque. On peut définir la notion de fonction polynôme de degré n ainsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Par exemple, $x + 12$ est une fonction polynôme de degré un et $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ est une fonction polynôme de degré 4.

2.1 Forme canonique

Propriété-Définition 2.2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ une fonction polynôme du second degré ($a \neq 0$). Il existe de nombre réels α et β tels que pour tout nombre réels x, on a*

$$ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

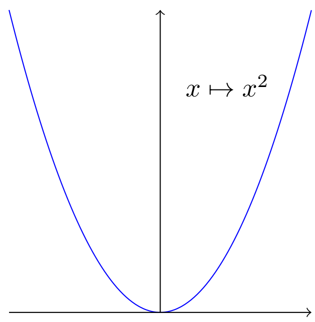
L'écriture $a(x-\alpha)^2 + \beta$ est la **forme canonique** *du trinôme $ax^2 + bx + c$.*

Exemple.

$$x^2 + x + 1 \quad = \quad \left(x^2 - 2\left(\frac{-1}{2}\right)x + \left(\frac{-1}{2}\right)^2\right) + 1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^2 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$$

Avec cette écriture, comme $(x + \frac{1}{2})^2 \geq 0$, on note que $f(x) = x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4}$ quel que soit le nombre réel x et on a égalité lorsque $x = \frac{-1}{2}$ ($f(\frac{-1}{2}) = \frac{3}{4}$).

A l'aide de la forme canonique, nous allons déterminer les variations d'un trinôme. Avant rappelons un cas particulier : Le graphe de la fonction carré, $f(x) = x^2$ est le suivant :



et le tableau de variation de la fonction carrée est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) = x^2$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Exercice 1.

1) Tracer le graphe des fonctions :
   — $f(x) = x^2 + 2$,
   — $f(x) = x^2 - 2$,
   — $f(x) = (x-1)^2$,
   — $f(x) = (x+3)^2$.

   Remarquer qu'on peut toutes les obtenir à partir de translation de la courbe de la fonction carrée.

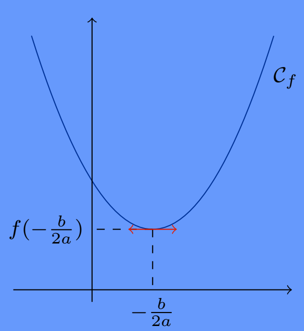
2) Comparer le graphe de la fonction $f(x) = (x-1)^2 + 4$ et $g(x) = -(x-1)^2 + 4$ et $h(x) = -3(x-1)^2 + 4$.

En toute généralité, on remarque qu'on peut estimer l'allure de la courbe du trinôme ax^2+bx+c à partir de la forme canonique $a(x-\alpha)^2 + \beta$. En effet, avec la forme canonique, suivant le signe de a, on déduit que β est un minimum ou un maximum ainsi que l'orientation de la parabole. En résumé,

Propriété 2.3. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré. Les variations du trinôme f sont données par les tableaux suivants :*

— *Si $a > 0$,*

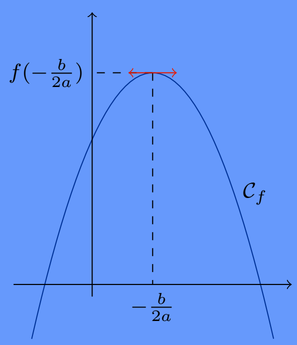
x	$-\infty$		$\alpha = \frac{-b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$\beta = f(\frac{-b}{2a})$	$\nearrow$	



Le fonction f admet un minimum en $-\frac{b}{2a}$.

— *Si $a < 0$,*

x	$-\infty$	$\alpha = \frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\beta = f(\frac{-b}{2a})$	$\searrow$



Le fonction f admet un maximum en $-\frac{b}{2a}$.

Lorsque le coefficient dominant a est positif la parabole est tournée vers le haut et lorsqu'il est négatif, elle est tournée vers le bas.

2.2 Équation du second degré

Définition 2.4. Une équation du second degré, d'inconnue x, est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2+bx+c=0$, où a, b et c sont des nombres réels tels que a soit non nul.

Dans une équation du second degré, les nombres a, b et c sont des paramètres, c'est-à-dire qu'ils sont déterminés à l'avance et l'objet de la résolution est de déterminer les valeurs que x peut prendre.

Définition 2.5. Une solution de l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ est appelée une **racine** du trinôme ax^2+bx+c.

Soit $ax^2+bx+c=0$ une équation du second degré, nous avons vu dans la section précédente que si l'on pose $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = c - \frac{b^2}{4a}$, on a $ax^2+bx+c = (x-\alpha)^2+\beta$. Ainsi, le nombre réel x est solution de l'équation du second degré si et seulement si

$$a(x-\alpha)^2+\beta = 0 \iff a(x-\alpha)^2 = -\beta \iff 4a^2(x-\alpha)^2 = b^2-4ac \iff (2ax-2a\alpha)^2 = b^2-4ac$$

D'autre part, le nombre b^2-4ac admet une racine carrée si et seulement s'il est positif.
Distinguons deux cas :

— Si $b^2-4ac < 0$, l'équation du second degré n'admet pas de solution.

— Si $b^2-4ac \geq 0$, alors les solutions $X^2 = b^2-4ac$ sont $X = \pm\sqrt{b^2-4ac}$. Ainsi, x est solutions de l'équation du second degré si et seulement si

$$2ax - 2a\alpha = \pm\sqrt{b^2-4ac} \iff x = \frac{-b+\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

En résumé, on vient de voir la propriété suivante :

Propriété-Définition 2.6. *Soit $ax^2 + bx + c = 0$ une équation du second degré. Le nombre $b^2 - 4ac$ est appelé le* **discriminant** *de l'équation et est noté Δ. De plus, on a*

- *Si $\Delta < 0$, l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de solution.*
- *Si $\Delta = 0$, l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ admet une unique solution $x_0 = \frac{-b}{2a}$. Dans ce cas, on dit que x_0 est une racine double.*
- *Si $\Delta > 0$, l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions :*

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \textit{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Propriété 2.7 (Factorisation du trinôme)**.** *Soit $ax^2 + bx + c = 0$ une équation du second degré.*

- *Supposons que le discriminant Δ est supérieur ou égal à zéro. Posons*

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \textit{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

  les racines, alors

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- *Supposons que $\Delta = 0$, alors $x_0 = \frac{-b}{2a}$ est l'unique racine et $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$.*

Lorsque le discriminant est strictement négatif, on ne sait pas réaliser une telle factorisation.

Exemple. Résolvons $x^2 - 5x + 6 = 0$. On trouve $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$.

Comme conséquence, on peut étudier le signe d'un trinôme. Par exemple, si le discriminant est positif, il est plus simple d'étudier le signe du produit $a(x - x_1)(x - x_2)$ que celui de l'expression équivalente $ax^2 + bx + c$.

3 Évolution (3S)

Définition 3.1. Une grandeur évolue d'une valeur initiale y_1 à une valeur finale y_2.

- La **variation absolue** est $y_2 - y_1$;
- La **variation relative** est $\frac{y_2-y_1}{y_1}$;
- Le nombre $t = \frac{y_2-y_1}{y_1}$ est le **taux d'évolution** de y_1 à y_2.

Le taux d'évolution est souvent exprimé en pourcentage :

— Si $t > 0$, on pose $p = t \times 100$, alors $t = p\%$ et on a une augmentation de $p\%$ de y_1 à y_2.

— Si $t < 0$, on pose $p = -t \times 100$, alors $t = -p\%$ et on a une diminution de $p\%$ de y_1 à y_2.

Exemple. La température en un lieu passe de $15^{\circ}C$ à $21^{\circ}C$ pendant la matinée. Le taux d'évolution de la température est $t = 0,4$ et la température a augmenté de 40%.

Propriété 3.2. *Faire évoluer une quantité y_1 d'un taux d'évolution t à y_2 revient à la multiplier par $1 + t$:*

$$y_2 = (1 + t)y_1$$

Le coefficient $c = 1 + t$ est appelé **coefficient multiplicateur**.

Exemple. Le prix d'un produit, égal à 12€, augmente de 3%.
Le taux d'évolution est égal à 0.03 et le coefficient multiplicateur est égal à $1 + 0,03$. Le prix après augmentation est alors 12×1.03€.

Définition 3.3. Soit x un nombre représentant par exemple un prix où une quantité, soit p un pourcentage.

— Le nombre $\frac{p}{100} \times x$ représente les $p\%$ de x.

— **Augmenter** x de $p\%$ revient à lui ajouter $p\%$ de lui-même. Le résultat peut être écrit de la manière suivante :

$$x + \frac{p}{100} \times x = (1 + \frac{p}{100}) \times x$$

— **Diminuer** x de $p\%$ revient à lui retrancher $p\%$ de lui-même. Le résultat peut être écrit de la manière suivante :

$$x - \frac{p}{100} \times x = (1 - \frac{p}{100}) \times x$$

Le nombre $1 \pm \frac{p}{100}$ par lequel on multiplie x dans les deux cas précédent est appellé **coefficient multiplicatif**.

Considérons deux évolutions successives :

$$\begin{tikzcd}
\boxed{y_1} \arrow[r, bend right, "\times(1+t_1)"'] \arrow[rr, bend left, "\times(1+t)"] & \boxed{y_2} \arrow[r, bend right, "\times(1+t_2)"'] & \boxed{y_3}
\end{tikzcd}$$

D'après le propriété précédente, on a les trois relations suivantes :

$$y_2 = (1+t_1)y_1 \qquad , \qquad y_3 = (1+t_2)y_2 \qquad \text{et} \qquad y_3 = (1+t)y_1$$

D'où

Propriété 3.4. *Le coefficient multiplicateur de y_0 à y_2 est égale à produit des coefficients multiplicateurs successifs et on a la relation suivante entre les différents taux d'évolutions :*

$$t = (1+t_1) \times (1+t_2) - 1$$

Remarque. **Attention !** Si une quantité y_1 évolue d'une taux d'évolution t et ensuite du taux d'évolution $-t$ alors elle n'est en général plus égal à y_1.
Par exemple, considérons une paire de chaussures à 70 euros. On l'augmente de 10%, on obtient $70 \times (1 + \frac{10}{100}) = 77$. Pour revenir en arrière, on y arrive pas en diminuant de 10%. En effet, 77 diminué de 10% vaut $77 \times (1 - \frac{10}{100}) = 69.3$ qui est bien différent de 70 ! Le taux d'évolution *réciproque* qui permet de revenir à 70 euros est $t' = \frac{70-77}{77} \simeq -0.091 = -9.1\%$

Propriété 3.5. *Soit t le taux d'évolution de y_1 à y_2 et $c = 1+t$ le coefficient multiplicateur.*

- *Le* **coefficient multiplicateur réciproque** *est $c' = \frac{1}{c}$;*
- *Le* **taux d'évolution réciproque** *est $t' = \frac{1}{1+t} - 1$.*

De plus, si on fait évoluer y_2 du taux d'évolution réciproque t', on revient à y_1 :

$$\begin{tikzcd}
\boxed{y_1} \arrow[r, bend right, "\times c"'] & \boxed{y_2} \arrow[l, bend right, "\times \frac{1}{c}"']
\end{tikzcd}$$

4 Suites, généralités (1S)

Définition 4.1. Une **suite numérique** u est une fonction définie sur $\mathbb{N}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u_n := u(n) \end{aligned}$$

On note cette suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Une suite de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la donnée pour tout entier naturel n d'un nombre réel noté u_n. Un dit que u_n est le n-ème terme de la suite (u_n).

Exemples.
— $(u_n) = (0, 1, 2, 3, 4, \ldots)$, c'est-à-dire pour tout n : $u_n = n$.
— $(u_n) = (0, 2, 4, 6, 8, \ldots)$, c'est-à-dire pour tout n : $u_n = 2n$.
— $(u_n) = (0, 1, 4, 9, 25, 36, \ldots)$, c'est-à-dire pour tout n : $u_n = n^2$.
— $(u_n) = (1, 5, 25, 125, \ldots)$, c'est-à-dire pour tout n : $u_n = 5^n$.

Rappelons que l'ensemble des entiers naturels peut être parcouru en partant de zéro et en avançant successivement de un :

$$0, \quad 1, \quad 2 = 1 + 1, \quad 3 = 2 + 1, \quad \ldots$$

Revenons à la suite des nombres pairs :

$$(u_n) = (0, 2, 4, 6, 8, \ldots, 2n, \ldots)$$

On note qu'un terme (disons u_n) de la suite est égale à son précédent plus 2 (c'est-à-dire $u_{n-1}+2$). Les termes de la suite vérifient donc la relation suivante :

$$u_n = u_{n-1} + 2$$

On notera que cette relation n'a pas de sens pour $n = 0$. Il nous faut un point de départ pour construire la suite (dans le cas de la suite des nombres pairs : $u_0 = 0$).

Définition 4.2. Une suite (u_n) peut être définie à l'aide d'une fonction $f : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$u_n = f(n)$$

pour tout entier n.

Par exemple, la suite des entiers pairs (u_n) peut être définie ainsi : $u_n = 2n$ (dans ce cas, $f(x) = 2x$).

Définition 4.3. Une suite est **définie par récurrence** quand elle est définie par la donnée de :

— son premier terme u_0 (ou u_1 en général).
— d'une relation qui permet de calculer à partir de chaque terme le terme suivant. Cette relation est appelée **relation de récurrence**.

Exemple. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 3u_n + 1$ pour tout entier naturel n.
On obtient alors $u_1 = 3 \times u_0 + 1 = 3 \times 1 + 1 = 4$, $u_2 = 3 \times 4 + 1 = 13$, $u_3 = 3 \times 13 + 1 = 40$ et ainsi de suite.

4.1 Sens de variation

Définition 4.4. Une suite (u_n) est dite

— **croissante** si pour tout entier n, on a $u_n \leq u_{n+1}$.

— **décroissante** si pour tout entier n, on a $u_n \geq u_{n+1}$.

— **constante** si pour tout entier n, on a $u_n = u_{n+1}$.

Une suite est dite **monotone** si elle est soit croissante, soit décroissante, soit constante.

Propriété 4.5. *Soit (u_n) une suite.*

— *Si (u_n) est croissante, alors pour tous entiers m, n, $m \leq n$ implique $u_n \leq u_m$.*

— *Si (u_n) est décroissante, alors pour tous entiers m, n, $m \leq n$ implique $u_n \geq u_m$.*

5 Statistiques descriptives (3S)

Définition 5.1. Dans une population (ou un échantillon), on considère un caractère X qui prend différents états, aux quels on associe des nombres $x_1, \dots, x_k$.

- L'**effectif** d'une valeur x_i est le nombre de fois qu'il a cette valeur dans notre population, on le note n_i.
- L'**effectif total** est le nombre d'individus de la population (ou d'élément de l'échantillon), il est noté N.
- La **fréquence** d'une valeur x_i est le quotient de l'effectif n_i par l'effectif total N, il est noté f_i. Formellement, on a
$$f_i = \frac{n_i}{N}$$
En déplaçant l'entier N de l'autre côté de l'équation, on note que $n_i = f_i N$.
- On représente ainsi la série statistique :

X	x_1	...	x_k	Total
Effectifs	n_1	...	n_k	N = Effectif total
Fréquences	f_1	...	f_k	1

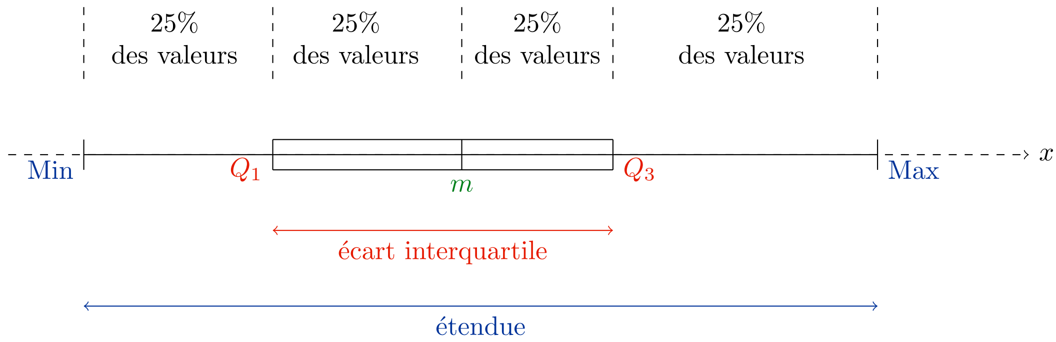
La collection de données (x_i, n_i) est appelée une **série statistique** (à une variable).

Définition 5.2. Soit (x_i, n_i) une série statistique.

- La **médiane** m est un nombre qui permet de couper l'ensemble des valeurs en deux parties égales : mettant d'un côté une moitié de l'effectif où les valeurs prisent sont inférieurs ou égales à m et de l'autre côté l'autre moitié de l'effectif où les valeurs prisent sont supérieurs ou égales à m.
(La médiane n'est pas unique, pour résoudre le problème lorsque n est impair, on prend le milieu).
- On note Q_1 le **premier quartile**, la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 25% des valeurs lui soient inférieures ou égales.
On note Q_3 le **troisième quartile**, la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 75% des valeurs lui soient inférieures ou égales.
- Le différence entre le troisième quartile et le premier quartile $Q_3 - Q_1$ est appelée **écart interquartile**. C'est un critère de dispersion de la série.
- La différence entre le maximum et le minimum Max - Min est appelée **l'étendue** de la série statistique.

Diagramme en boîte :

5.1 La moyenne et écart type



Définition 5.3. On note $\bar{x}$ la **moyenne** de la série statistique :

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{N}\left(n_1x_1 + \ldots + n_kx_k\right)\\ &= f_1\,x_1 + \ldots + f_k\,x_k\end{aligned}$$

Définition 5.4. La notation suivante

$$\sum_{i=1}^{k} x_i$$

signifie : faire la somme pour i allant de 1 à k des éléments x_i.

Une autre utilisation du symbole de sommation pour redéfinir la moyenne :

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{k} n_i x_i\right)$$

Définition 5.5. L'**écart type** de la série statistique est obtenu à l'aide de la calculatrice.

Remarque. Il est possible de définir rigoureusement l'écart type[1] :

— La **variance** de la série statistique est :

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{N}\left(n_1(x_1-\bar{x})^2 + \ldots + n_k(x_k-\bar{x})^2\right)\\ &= \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i-\bar{x})^2\right)\\ &= \frac{1}{N}\left(n_1x_1^2 + \ldots + n_kx_k^2\right) - \bar{x}^2\end{aligned}$$

C'est la moyenne quadratique de la série centrée (i.e : où l'on a retranché la moyenne).

— L'**écart type** de la série statistique est la racine carrée de la variance :

$$\sigma = \sqrt{V}$$

1. La connaissance de cette formule en première STMG est facultative.

6 Suites arithmétiques et géométriques (3S)

Définition 6.1. Une **suite arithmétique** de terme initial u_0 et de raison r est la suite définie de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$$

Propriété 6.2 (faculatif)**.** *Soit (u_n) une suite arithmétique de terme initial u_0 et de raison r :*

$$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$$

Son n-ème terme est $u_n = r\,n + u_0$.

En fait, on peut montrer que si (u_n) est arithmétique de raison r, alors pour tous $n \geq m$, on a $u_n = (n-m)r + u_m$.

Propriété 6.3. *Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de terme initial u_0. Notons que pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n$ est égale à la raison r.*

1) *Si $r > 0$, alors pour tout n : $u_n < u_{n+1}$ et la suite est strictement croissante.*
2) *Si $r = 0$, alors pour tout n : $u_n = u_{n+1} = u_{n+2} = \dots$ et la suite est constante.*
3) *Si $r < 0$, alors pour tout n : $u_n > u_{n+1}$ et la suite est strictement décroissante.*

Définition 6.4. Une **suite géométrique** de terme initial u_0 et de raison q est la suite définie de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = q u_n \end{cases}$$

Propriété 6.5 (facultatif)**.** *Soit (u_n) une suite géométrique de terme initial u_0 et de raison q :*

$$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = q u_n \end{cases}$$

Son n-ème terme est $u_n = q^n\,u_0$.

Propriété 6.6. *Soit* (u_n) *une suite géométrique de raison* q *et de terme initial* u_0 *positif. Notons que pour tout entier* n, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *est égale à la raison* q.

1) Si $q > 1$, *alors pour tout* n : $u_n < u_{n+1}$ *et la suite est strictement croissante.*

2) Si $q = 1$, *alors pour tout* n : $u_n = u_{n+1} = u_{n+2} = \dots$ *et la suite est constante.*

3) Si $q < 1$, *alors pour tout* n : $u_n > u_{n+1}$ *et la suite est strictement décroissante.*

7 Probabilités : Schéma de Bernoulli (2S)

7.1 Rappels

Définition 7.1. Une **expérience aléatoire** est une expérience vérifiant les deux conditions suivantes :

- elle comporte plusieurs issues envisageables.
- on ne peut prévoir l'issue lorsqu'on réalise l'expérience.

On se restreindra aux expériences comportant un nombre fini d'issues.
L'**univers** (noté Ω) de l'expérience aléatoire est l'ensemble des issues de cette expérience.
Un **événement** est un ensemble d'issues de l'expérience aléatoire.
Les **événements élémentaires** sont les événements réduits à une unique issue de l'expérience.

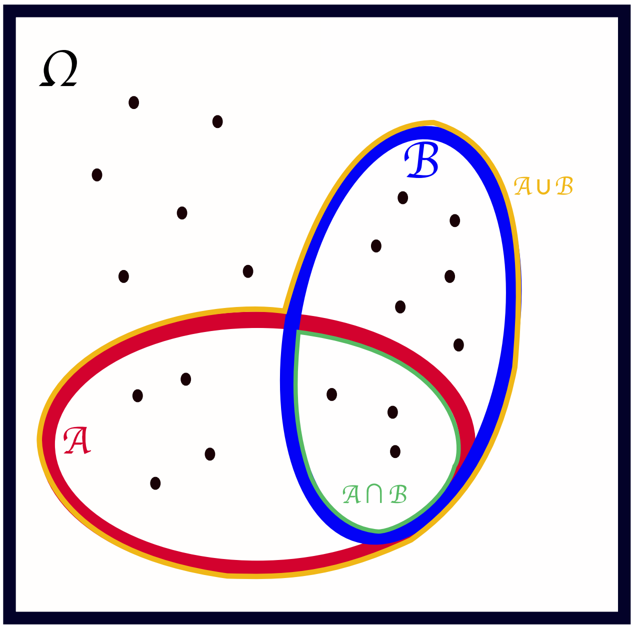
Exemple. Le jet d'un dé, tirage d'une carte dans un jeu de carte, tirage d'une boule dans une urne.

Définition 7.2. On appelle **événement contraire** d'un événement A, l'événement noté $\bar{A}$ qui contient l'ensemble des issues n'appartenant pas A.

Définition 7.3. Soient A et B deux événements d'une expérience aléatoire donnée.

- L'intersection des deux événements A et B est l'événement constitué des issues qui sont dans A et dans B, noté $A \cap B$.
- La réunion des deux événements A et B est l'événement constitué des issues de A ou de B (au sens large), noté $A \cup B$.
- On dit que A est inclus dans B, noté $A \subset B$ si toutes les issues de A sont aussi des issues B.

L'événement $A \cap B$ se réalise lorsque les deux événements à la fois se réalisent.
L'événement $A \cup B$ se réalise lorsqu'au moins un des deux événements se réalise.



Définition 7.4. Dans une expérience aléatoire, deux événements E et E' sont dit **incompatibles** s'ils ne partagent pas d'issue commune (i.e : leur intersection est vide).

Définition 7.5. Une (théorie de) **probabilité** associée à une expérience aléatoire est une application qui à un événement E associe un nombre réel, noté $\mathbb{P}(E)$ telle que :

1) $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$,
2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (il se passe certainement quelque chose),
3) Pour tous A et B deux événements incompatibles, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Étant donné un événement E, le nombre $\mathbb{P}(E)$ donne (mesure) les chances de réussite de E. Plus $\mathbb{P}(E)$ est proche de 1, plus l'événement E se réalisera.
La probabilité de l'événement vide $\emptyset$ est nul ($\mathbb{P}(\emptyset) = 0$). Moralement, lorsqu'on réalise une expérience aléatoire, il se passe toujours quelque chose.

Propriété 7.6 (loi des grands nombres)**.** *Lors d'une expérience répétée n fois, les fréquences obtenues d'un événement E de l'expérience se rapprochent de la variable théorique $\mathbb{P}(E)$, la probabilité de l'événement E.*

(illustration avec un tableur)

Propriété 7.7. *Dans une expérience aléatoire, supposons que l'univers Ω se décompose en n issues : $x_1, \ldots, x_n$ (formellement, $\Omega = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Posons $p_i = \mathbb{P}(x_i)$ la probabilité que l'issue*

x_i se réalise. Alors,

$$p_1 + \ldots + p_n = 1$$

La somme des probabilités des issues possibles d'une expérience aléatoire vaut toujours un. Ce fait, peut être utilisé comme un premier test de vraisemblance d'une théorie de probabilité proposé pour étudier une expérience aléatoire !

Définition 7.8. Lorsque, dans une expérience aléatoire, toutes les issues élémentaires ont la même probabilité de se réaliser, on dit que l'expérience est **équiprobable**.

Exemple. Lancé d'un dé équilibré, lancé d'une pièce équilibrée.

Soit A un événement d'une expérience aléatoire, le nombre d'issues que contient A est appelé le cardinal de A et il est noté $\text{card}(A)$.

Propriété 7.9. *Lors d'une expérience aléatoire ayant n issues équiprobables :*

- *La probabilité de chaque événement élémentaire est $\frac{1}{n}$.*
- *La probabilité d'un événement A est*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{n} = \frac{\textit{nombre d'issues favorable à } A}{\textit{nombre d'issues possibles}}$$

Propriété 7.10. *La probabilité de l'événement contraire d'un événement A est :*

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

Propriété 7.11. *Soient A et B deux événements. Si $A \subset B$ alors, $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.*

Moralement, la propriété précédente nous dit que plus un événement contient d'issues plus il est probable.

Exemple. On considère l'expérience aléatoire du jet d'un dé. Soit A l'événement "le résultat est un multiple de trois" et B l'événement "le résultat est un nombre pair". On note que $A = \{3, 6\}$ et $B = \{2, 4, 6\}$, ainsi

- l'intersection de A et B est $A \cap B = \{6\}$.
- la réunion de A et B est $A \cap B = \{2, 3, 4, 6\}$.

Théorème 7.12. *Si A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire alors :*

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

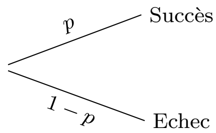
7.2 Schéma de Bernoulli

Définition 7.13. Soit $0 < p < 1$ un nombre réel. On considère l'expérience aléatoire qui comporte deux issues :

— S : le succès avec une probabilité p

— $\bar{S}$: l'échec (avec une probabilité $1 - p$)

Une telle expérience aléatoire est appelée une **expérience de Bernoulli** de paramètre p.



Exemples.

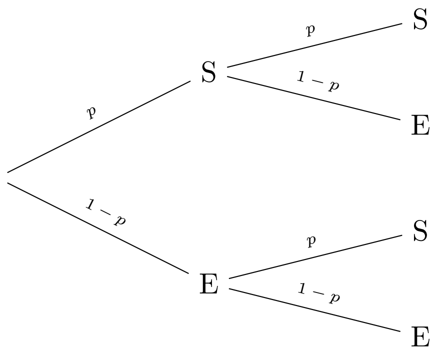
1) Le jet d'une pièce equilibré avec succès lorsqu'on obtient pile est une expérience de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
2) On tire au hasard une boule dans une urne avec 3 boules rouges et 2 boules bleues. On considère comme succès le fait de tirer une boule rouge. La probabilité de succès est $\frac{3}{5}$. Ainsi, cette expérience est une expérience de Bernoulli de paramètre $\frac{3}{5}$.

Définition 7.14. On appelle **schéma de n épreuves de Bernoulli** de paramètre p, toute expérience aléatoire consistant à répéter n fois de façon indépendante une même épreuve de Bernoulli de paramètre p.
À un tel schéma, on associe une variable aléatoire X égale au nombre de fois que l'expérience aléatoire s'est conclue par un succès sur les n répétitions.
On dit alors que X suit une loi binomiale de paramètres n et p.
Avec cette notation, l'événement "obtenir k succès" s'écrit "X = k" et donc :

$$P(X = k) \quad \overset{\text{def.}}{=} \quad P(\text{"obtenir k succès"})$$

Exemple. On lance 4 fois une pièce de monnaie équilibrée. Soit X le nombre de fois qu'on a obtenu pile sur les 4 lancers, alors X suit une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{1}{2}$.

Exemple. Voici l'arbre pondéré de probabilités associé à un schéma de deux épreuves.



On notera que $E = \bar{S}$, c'est-à-dire que l'événement E échec est l'événement contraire de l'événement S succès. D'où les probabilités $1 - p$ sur l'arbre.

Propriété 7.15. *Dans un shéma de Bernoulli, la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat.*

Exemple. Dans l'exemple précédent, la probabilité d'avoir un succès puis un échec est $P(SE) = p \times (1-p)$ et

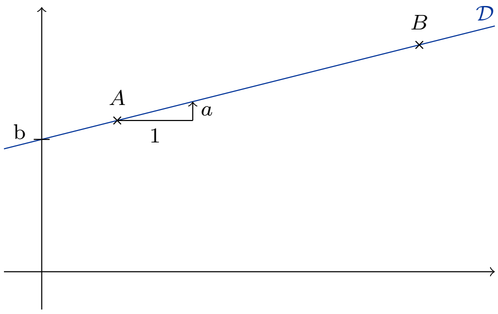
$P(SS) = p \times p = p^2$, $\quad P(ES) = (1-p) \times p \quad$ et $\quad P(EE) = (1-p) \times (1-p) = (1-p)^2$

8 Dérivation : Second degré (3S)

8.1 Rappels : Fonction affine

Définition 8.1. Soit a et b deux nombres réels. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = ax + b$ pour tout nombre réel x. On dit que f est une **fonction affine** et que le nombre a (devant x) est le **coefficient directeur de la droite** et le nombre b est l'**ordonnée à l'origine**.

Soit (O, I, J) un repère du plan. Graphiquement, on a



La droite $\mathcal{D}$ passe par le point $(0;\ b)$.

Propriété 8.2. *Soit x_A et x_B deux nombres distints. Alors, le coefficient directeur est égale au taux d'accroissement :*

$$a = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

8.2 Tangente à une parabole

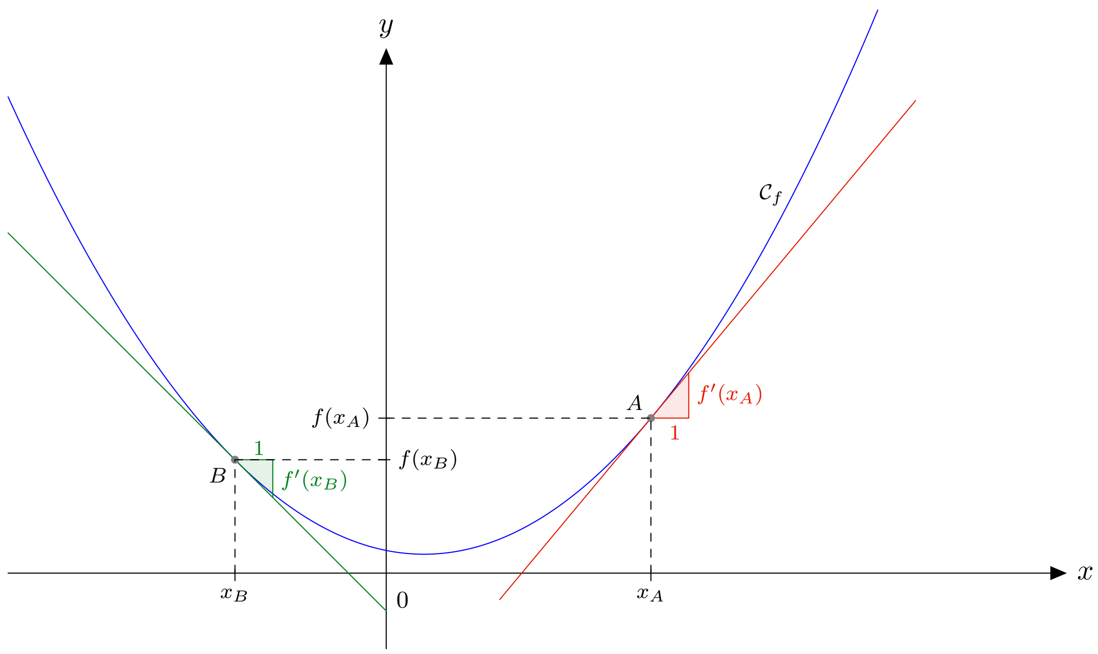
On rappelle qu'une fonction **polynôme de degré deux** (ou un trinôme du second degré) est une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont des nombres réels donnés tel que $a \neq 0$.
Les trois réels a, b et c sont les coefficients de la fonction f. De plus, a est appelé le coefficient dominant.

Exemple. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2.1x^2 - 15x + \frac{5}{2}$ est une fonction polynôme du second degré.

Définition 8.3. Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$, notons $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère et $A(x_A;\, y_A)$ un point de la courbe $\mathcal{C}$ (c'est-à-dire $y_A = f(x_A)$).
On appelle **tangente au point A à la courbe $\mathcal{C}$**, la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(x_A)$.



Cette illustration permet de se convaincre davantage qu'il y a une relation entre le signe de la dérivée f' (la pente) et les variations de la fonction f elle-même. Plus triviallement, si la pente est positive ($f'(x) > 0$) alors la fonction "monte" (est croissante) et inversément si la pente est négative ($f'(x) < 0$) alors la fonction "descend" (est décroissante).

8.3 Fonction dérivée

Définition 8.4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction polynôme du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$.
On appelle **fonction dérivée** de f notée f', la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f'(x) = 2a\,x + b$$

Soit x_0 un nombre réel quelconque alors $f'(x_0)$ est appelé le **nombre dérivée de f en** x_0.

Exemples.
- Soit $f(x) = 3x^2 + 4x + 5$ fonction polynôme du second degré, alors $f'(x) = 2 \times 3\,x + 4 = 6x + 4$;
- Soit $f(x) = -4.2x^2 + 5.21x - 12.12$ fonction polynôme du second degré, alors $f'(x) = 2 \times (-4.2)x + 5.21 = -8.4\,x + 5.21$.

La fonction dérivée f' d'une fonction f permet d'étudier les variations de cette dernière.

Propriété 8.5. *Soit $a < b$ deux nombres et $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction polynôme du second degré.*

1) Si $f'(x) < 0$ sur l'intervalle $[a; b]$, alors f est décroissante sur $[a; b]$.

x	a		b
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$f(a)$	$\searrow$	$f(b)$

2) Si $f'(x) > 0$ sur l'intervalle $[a;\, b]$, alors f est croissante sur $[a;\, b]$.

x	a		b
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$f(a)$	$\nearrow$	$f(b)$

8.4 Rappel : Tableau de signe d'une fonction affine

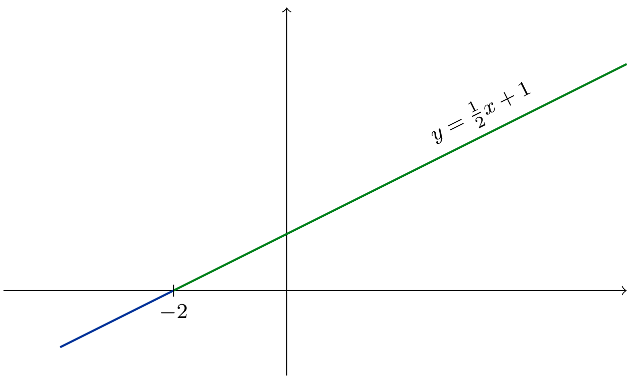
Commençons par détailler deux exemples :

Exemples. 1) Signe de $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

Dans un premier temps, résolvons l'équation $f(x) = 0$:

$$\frac{1}{2}x + 1 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{x}{2} = -1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = -1 \times 2 = -2$$

Ainsi, $f(x) = 0$ admet une unique solution $x = -2$. Voici le graphe de la fonction affine f :



Soit $x \leq -2$, alors

$$\begin{aligned}
&x \leq -2 \\
&\frac{1}{2}x \leq \frac{1}{2} \times (-2) \\
&\frac{1}{2}x + 1 \leq -1 + 1 \\
&f(x) \leq 0
\end{aligned}$$

D'où $f(x) \leq 0$ si $x \in]-\infty;\ -2]$ et de même, $f(x) \geq 0$ si $x \in [2;\ +\infty]$. En résumé, on a le tableau de signe suivant :

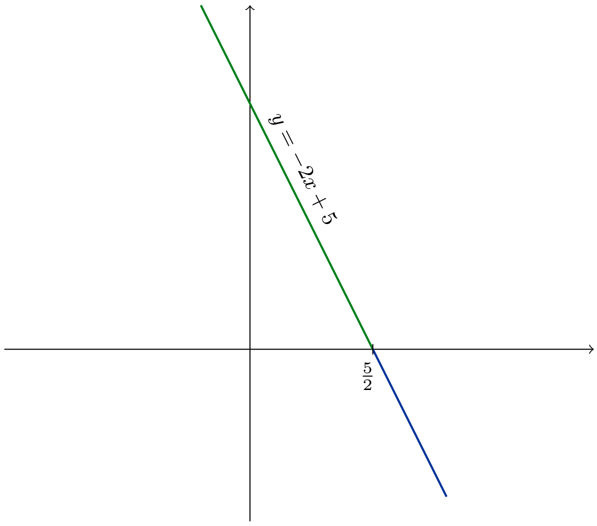
x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$\frac{1}{2}x+1$	$-$	0	$+$

Dans cet exemple, on notera que le coefficient directeur de $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ est égal à $\frac{1}{2}$ qui est un nombre positif !

2) Signe de $f(x) = -2x + 5$.
Dans un premier temps, résolvons l'équation $f(x) = 0$:

$$-2x + 5 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -2x = -5 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}$$

Ainsi, $f(x) = 0$ admet une unique solution $x = \frac{5}{2}$. Voici le graphe de la fonction affine f :



Soit $x \leq \frac{5}{2}$, alors

$$\begin{aligned}
&x \leq \frac{5}{2}\\
&-2x \geq -2\frac{5}{2} - 2 < 0\\
&-2x + 5 \geq -5 + 5\\
&f(x) \geq 0
\end{aligned}$$

Remarque : Lorsqu'on multiplie une équation par un nombre négatif, l'inégalité change de sens !

On note donc que $f(x) \leq 0$ si $x \in]-\infty;\ \frac{5}{2}]$ et de même $f(x) \leq 0$ si $x \in [\frac{5}{2};\ +\infty]$. En résumé, on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$-2x+5$	$+$	0	$-$

Dans ce second exemple, le coefficient directeur de $f(x) = -2x + 5$ est égal à -2 qui est un nombre négatif !

Plus généralement,

Propriété 8.6. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$ pour tout x dans $\mathbb{R}$ où $a \neq 0$.*

1) L'équation $a\,x + b = 0$ admet une unique solution $x = \frac{-b}{a}$.

2) Distinguons deux cas :

a) Si $a < 0$ alors,

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$a\,x + b$		$+$	0	$-$	

b) Si $a > 0$ alors,

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$a\,x + b$		$-$	0	$+$	

9 Loi binomiale (3S)

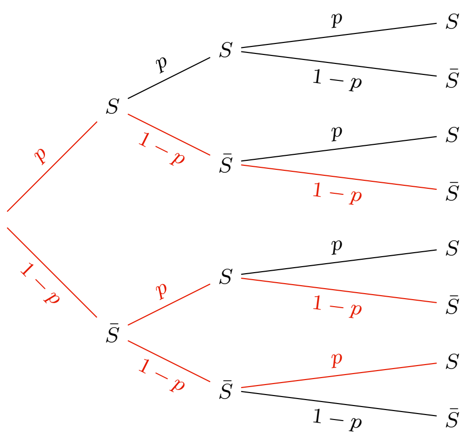
On rappelle qu'un **schéma de n épreuves de Bernoulli** de paramètre p est une expérience aléatoire consistant à répéter n fois de façon indépendante une même épreuve de Bernoulli de paramètre p.

Définition 9.1. Considérons une expérience de Bernoulli avec une probabilité p d'avoir un succès et donc $1-p$ d'avoir un échec. Si l'on répète n fois de manière indépendante la précédente expérience aléatoire, alors la variable aléatoire qui correspond au nombre de succès **suit une loi binomiale** de paramètres n et p.

Définition 9.2. On considère un schéma de n épreuves de Bernoulli, où n est non nul, représenté par un arbre pondéré de probabilités.
Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, on note $\binom{n}{k}$ le nombre de chemins de l'arbre réalisant k succès lors des n répétitions.
Par convention, on pose $\binom{0}{0} = 1$.

Exemples :

- $\binom{1}{1} = 1$;
- $\binom{2}{1} = 2$;
- $\binom{2}{0} = 0$;
- $\binom{3}{1} = 3$;



Propriété 9.3. *Pour tout entier $n \geq 0$, $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{n} = 1$.*

Dans un shéma de n épreuves de Bernoulli, compter les issues avec k succès ou celles avec $n-k$ échecs revient au même. D'où,

Propriété 9.4. *Pour tous entiers naturels n et k tels que $0 \leq k \leq n$, on a $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.*

Propriété 9.5 (Relation de Pascal). *Pour tous entiers naturels n et k tels que $1 \leq k < n$, on a*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Définition 9.6. Le triangle de Pascal :

$\binom{n}{k}$	0	1	2	3	4	5	6	7	$k-1$	k
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15 $+$	20	15	6	1			
7	1	7	21	$=$ 35	35	21	7	1		
$n-1$	$\vdots$								$\binom{n-1}{k-1}$ $+$	$\binom{n-1}{k}$
n	$\vdots$									$=$ $\binom{n}{k}$

Propriété 9.7. *Dans un schéma de n épreuves de Bernoulli de paramètre p, la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès a pour loi de probabilité :*

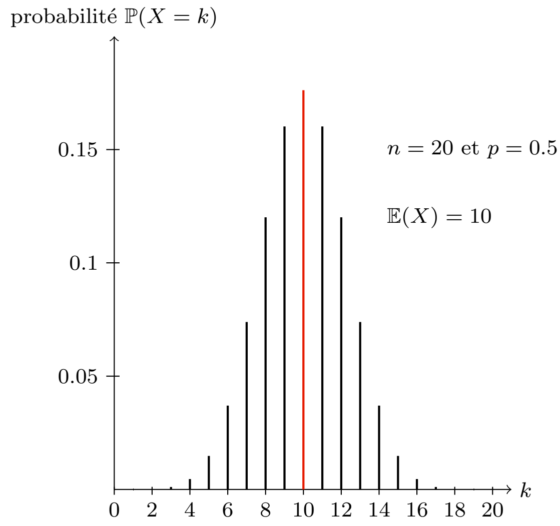
$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

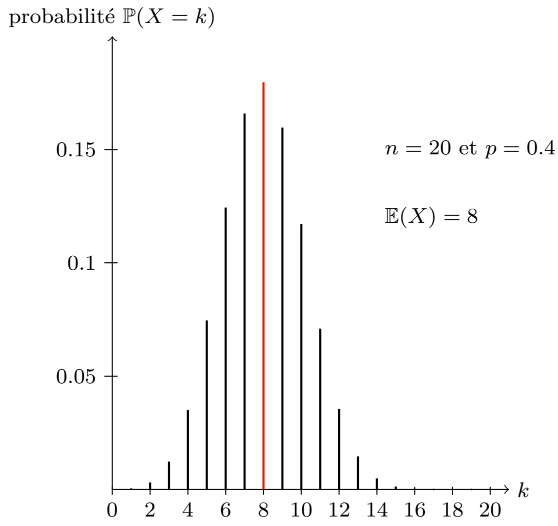
où k prend les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1, n$.
De plus,

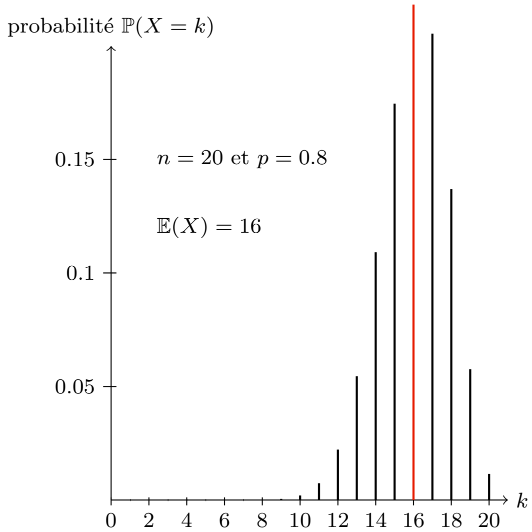
- *Son espérance est $\mathbb{E}(X) = np$;*

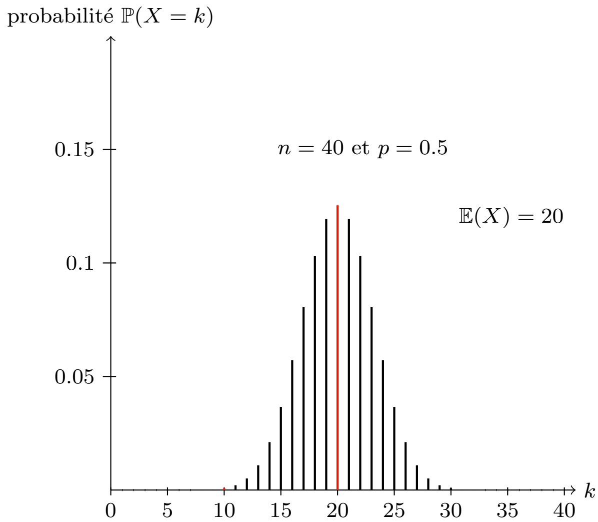
On dit que X suit une **loi binomiale de paramètres** *n* **et** *p notée $B(n;\ p)$.*

Exemples. Voici quelques exemples de répartition des probabilités $\mathbb{P}(X = k)$ lorsque X suit une loi binomiale.









Remarque. La probabilité maximale $\mathbb{P}(X = k)$ est atteinte pour le plus petit entier k supérieur ou égal à $\mathbb{E}(X) = n\,p$.

Définition 9.8 (Utilisation de la calculatrice)**.** Soit X une variable aléatoire qui suit une **loi binomiale** de paramètres n et p, alors

1) Avec une casio :
   - pour calculer $P(X = k)$, on utilise la commande : `Bpd(k,n,p)` ;
   - pour calculer $P(X \leq k)$, on utilise la commande : `Bcd(k,n,p)` ;
2) Avec une TI :
   - pour calculer $P(X = k)$, on utilise la commande : `Bpd(n,p,k)` ;
   - pour calculer $P(X \leq k)$, on utilise la commande : `Bcd(n,p,k)` ;

Remarque. On portera une attention particulière à l'ordre des paramètres suivant le modèle de calculatrice !

10 Dérivation, Troisième degré (3S)

Définition 10.1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction polynôme du troisième degré de la forme

$$f'(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

On appelle **fonction dérivée** de f notée f', la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f'(x) = 3a\,x^2 + 2b\,x + c$$

Soit x_0 un nombre réel quelconque alors $f'(x_0)$ est appelé le **nombre dérivée de f en x_0**.

La fonction dérivée f' d'une fonction f permet d'étudier les variations de cette dernière.

Propriété 10.2. *Soit $a < b$ deux nombres et $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction polynôme de degré trois.*

1) Si $f'(x) < 0$ sur l'intervalle $[a; b]$, alors f est décroissante sur $[a; b]$.

x	a		b
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$f(a)$	$\searrow$	$f(b)$

2) Si $f'(x) > 0$ sur l'intervalle $[a; b]$, alors f est croissante sur $[a; b]$.

x	a		b
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$f(a)$	$\nearrow$	$f(b)$

11 Échantillonnage et prise de décision (4S)

Définition 11.1. Un **échantillon** de taille n est obtenu en prélevant au hasard, *successivement et avec remise*, n éléments d'une population.

Remarque. Un exemple d'utilisation d'un échantillon est lors d'un sondage. La propriété de "remise" signifie qu'on s'autorise à interroger plusieurs fois la même personne. On ne cherche pas à se souvenir qui est-ce qu'on a interrogé.

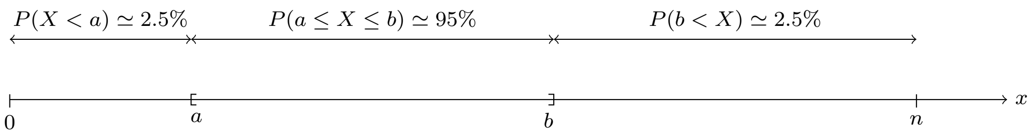
Propriété 11.2. *Soit une population dont une proportion p des éléments admet un caractère donné.*
Dans un échantillon de taille n prélevé dans cette population, l'effectif des éléments qui présentent ce caractère est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Définition 11.3. Soit X la loi binomiale qui correspond à la réalisation d'un échantillon de taille n dans une population ayant une proportion p d'éléments avec un caractère donné.
L'**intervalle de fluctuation** au seuil 95% de la fréquence observée est l'intervalle

$$\left[\frac{a}{b};\quad \frac{b}{n}\right]$$

où a est le plus entier tel que $P(X \leq a) > 0.025$ et b est le plus petit entier tel que $P(X \leq b) \geq 0.975$.

Exemple. Lorsqu'on prélève un échantillon de taille n, il y a 95% de chance que la fréquence observée $f = \frac{X}{n}$ appartienne à l'intervalle de fluctuation $[\frac{a}{n};\ \frac{b}{n}]$:



Propriété 11.4. *Pour un échantillon de grande taille ($n \geq 30$) ayant une proportion du caractère p comprise entre 0.2 et 0.8, l'intervalle :*

$$[p - \frac{1}{\sqrt{n}};\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}]$$

est une bonne approximation de l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence observée f du caractère.

Propriété 11.5. *On considère une population dans laquelle on* **suppose** *que la proportion d'un caractère est p.*
On **observe** *f la fréquence de ce caractère dans un échantillon (une portion de la population) de taille n.*
Soit l'hypothèse : "la proportion de ce caractère dans la population est p".
*Soit $I = [p - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ l'intervalle de fluctuation de la fréquence à 95% dans les échantillons de taille n, alors l'***algorithme de décision** *est le suivant :*

- *Si la fréquence f de l'échantillon est l'intervalle I alors on accepte l'hypothèse que p soit fréquence de ce caractère dans la population entière.*
- *Si la fréquence f de l'échantillon n'est pas l'intervalle I alors on rejette l'hypothèse, p n'est pas la fréquence de ce caractère dans la population entière.*

Exercice 2 (exercice 65 page 253)**.** Un graphologue prétend être capable de déterminer le sexe d'une personne d'après son écriture dans 90% des cas.
Lisa, qui en doute, lui soumet 20 exemples d'écriture. Elle reconnaîtra sa compétence s'il réussit au moins 90% des identifications du sexe, soit au moins 18 sur les 20. Dans le cas contraire, elle le considérera comme menteur.

1) Quelle est la probabilité :
   a) que Lisa accepte l'affirmation du graphologue alors qu'il s'est prononcé 20 fois au hasard ?
   b) que Lisa rejette l'affirmation alors qu'elle est totalement fondée ? Quel inconvénient présente le test de Lisa ?
2) Sur quel nombre N (minimal) d'identifications réussies Lisa aurait-elle pu se fixer pour être en mesure de rejeter l'affirmation du graphologue avec un risque de se tromper inférieur à 4% ? Quel conseil pouvez-vous donner à Lisa pour que son test prenne en compte le hasard ?

Exercice 1 (corrigé)**.** Un graphologue prétend être capable de déterminer le sexe d'une personne d'après son écriture dans 90% des cas.
Lisa, qui en doute, lui soumet 20 exemples d'écriture. Elle reconnaîtra sa compétence s'il réussit au moins 90% des identifications du sexe, soit au moins 18 sur les 20. Dans le cas contraire, elle le considérera comme menteur.

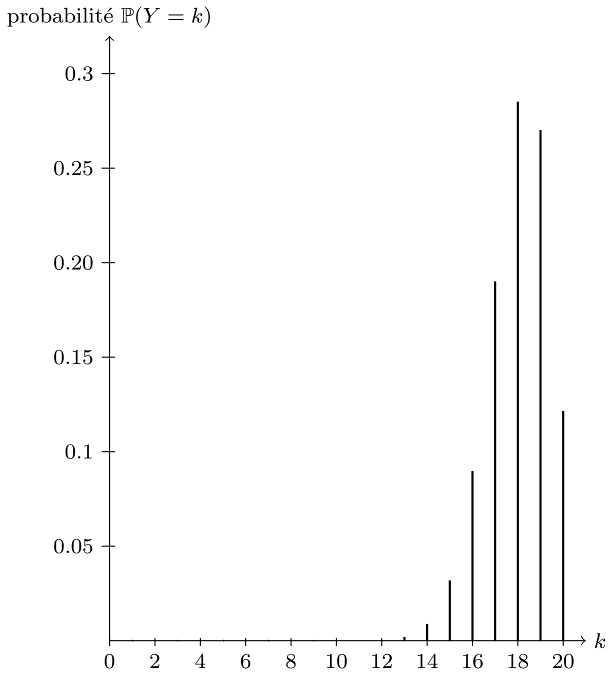
1) a) Supposons que le graphologue réponde au hasard et indépendamment pour chacun des 20 textes. Notons X le nombre réponses justes. Alors par hypothèse, la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0.5$. Lisa accepte l'affirmation du graphologue lorsqu'il répond correctement au moins 18 fois, c'est-à-dire lorsque l'événement $X \geq 18$ se réalise. Or,

$$\mathbb{P}(X \geq 18) = \mathbb{P}(X = 18) + \mathbb{P}(X = 19) + \mathbb{P}(X = 20)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq 18) &= \mathbb{P}(X=18)+\mathbb{P}(X=19)+\mathbb{P}(X=20)\\
&= \binom{20}{18}(\frac{1}{2})^{18}(\frac{1}{2})^{2}+\binom{20}{19}(\frac{1}{2})^{19}(\frac{1}{2})+\binom{20}{20}(\frac{1}{2})^{20}\\
&= \left(\binom{20}{18}+\binom{20}{19}+1\right)\frac{1}{2^{20}}\\
&= \frac{190+20+1}{2^{20}}\\
&= \frac{211}{1\,048\,576}\\
&\simeq 2\times 10^{-4}
\end{aligned}$$

D'où, la probabilité que Lisa accepte l'affirmation du graphologue est de 0,02%.
Remarque : On aurait aussi pu calculer $\mathbb{P}(X \geq 18) = 1-\mathbb{P}(X<18) = 1-\mathbb{P}(X \leq 17)$ en utilisant la commande Binomial Cumulative Distribution de la calculatrice.

b) On suppose maintenant que le graphologue dit vrai. On note Y la variable aléatoire correspondant au nombre de réponses justes. Encore une fois, Y suit une loi binomiale de paramètres $n=20$ et $p=0.9$.
Lisa rejette l'affirmation lorsque l'événement $Y<18$ se produit et $\mathbb{P}(Y<18) = \mathbb{P}(Y \leq 17) \simeq 0.32 = 32\%$ à l'aide la calculatrice. Ainsi, si le graphologue dit vrai, la probabilité que Lisa rejette son affirmation après l'expertise des 20 exemples d'écriture est de 32%. Cette probabilité est conséquente ! Il y a presque une chance sur trois de rejette l'hypothèse qui est vraie.
L'inconvénient de la méthode de Lisa est de ne pas assez prendre en compte la fluctuation du nombre de bonnes réponses.



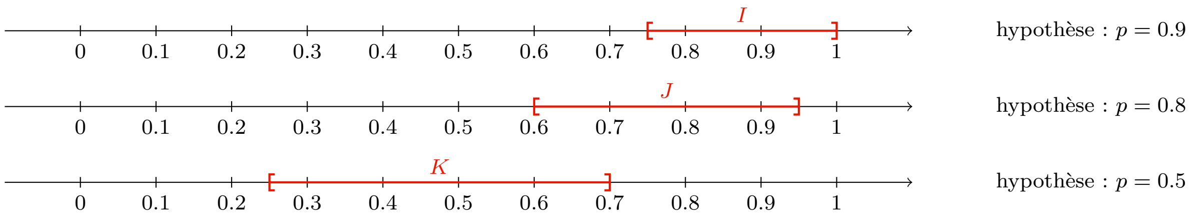
Le graphologue pourrait très bien réussir moins de 18 fois sur les 20.

2) À l'aide d'une table, on note que $\mathbb{P}(Y \leq 15) \simeq 3.19\%$ et $\mathbb{P}(Y \leq 16) \simeq 8.98\%$. Ainsi, le nombre minimal d'identifications réussies que Lisa devrait se fixer pour être en mesure de rejeter l'affirmation du graphologue avec un risque de se tromper inférieur à 4% est $N=15$.
Lisa peut modifier son test en acceptant l'affirmation lorsque le graphologue réussi plus de 15 fois sur les 20.

Remarque :
Déterminons les intervalles de fluctuation sous les hypothèses $p = 0.9$, $p = 0.8$ et $p = 0.5$ associés à un échantillon de taille 20 :

- Sous l'hypothèse $p = 0.9$, l'intervalle de fluctuation au seuil 95% pour un échantillon de taille 20 est $I = [\frac{15}{20}; 1] = [0.75; 1]$.
- Sous l'hypothèse $p = 0.8$, l'intervalle de fluctuation au seuil 95% pour un échantillon de taille 20 est $J = [\frac{12}{20};\ \frac{19}{20}] = [0.6; 0.95]$.
- Sous l'hypothèse $p = 5$, l'intervalle de fluctuation associé est $K = [\frac{5}{20};\ \frac{14}{20}] = [0.25; 0.7]$.

Voici une illustration graphique des trois intervalles :



On note que la différence entre les deux intervalles de fluctuation I et J est relativement faible : $I \cap J = [0.75; 0.95]$. C'est-à-dire, avec un échantillon de taille 20, si la fréquence tombe dans l'intervalle $I \cap J$, on ne peut ni rejeter l'hypothèse $p = 0.8$ ni l'hypothèse $p = 0.9$ avec un risque de 5% d'erreur. Par contre, l'intervalle K est disjoint de l'intervalle I. Sur un échantillon de taille 20, on peut discriminer l'hypothèse $p = 0.9$ ou $p = 0.5$ ou les deux avec un risque de 5% d'erreur.

Si on voulait faire de même, avec les hypothèses $p = 0.9$ et $p = 0.8$, il suffit d'augmenter la taille de l'échantillon pour que les intervalles de fluctuation I et J soient disjoints. D'après l'avant dernière propriété, si $n \geq 30$, alors

$$J = [0.8 - \frac{1}{\sqrt{n}}; 0.8 + \frac{1}{\sqrt{n}}] \qquad \text{et} \qquad I = [0.9 - \frac{1}{\sqrt{n}}; 0.9 + \frac{1}{\sqrt{n}}]$$

On note que I et J sont disjoints si et seulement si $0.8 + \frac{1}{\sqrt{n}} < 0.9 - \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\frac{2}{\sqrt{n}} < 0.9 - 0.8 \qquad \iff \qquad 2 < 0.1\sqrt{n} \qquad \iff \qquad 20 < \sqrt{n}$$

C'est-à-dire, en élevant au carré, comme n est positif, $20^2 = 400 < n$.
Donc, pour discriminer au moins une des deux hypothèses $p = 0.9$ ou $p = 0.8$ avec un risque de 5% d'erreur environ, il faut considérer un échantillon de taille supérieur à 400.