Notes de cours de Mathématiques en première ES/L

O. Lader

Table des matières

1 Pourcentages, taux d'évolution (4S)

Définition 1.1. Soit A une partie d'une population E. La **proportion des éléments de A par rapport à E** est

$$p = \frac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } E} = \frac{n_A}{n_E}$$

Lorsqu'on connait deux quantités parmi les trois termes p, n_A et n_E, on peut retrouver le troisième :

Propriété 1.2. *Soit $p = \frac{n_A}{n_E}$ la proportion de A dans E, alors on a :*

1. $n_A = p \times n_E$;
2. $n_E = \frac{n_A}{p}$.

Une proportion s'exprime souvent sous forme de pourcentage.
Un pourcentage est une façon d'exprimer un nombre comme une fraction de cent :

$$a\% = a\,\frac{1}{100} \quad \text{où } 0 \leq a \leq 100$$

Exemple. Dans une population de référence constitué de 400 personnes, on suppose que 56 personnes ont une particularité P. La proportion de personnes ayant la particularité P est $\frac{56}{400}$.
Pour exprimer cette **proportion** en un **pourcentage**, on peut procéder comme suit :

$$\frac{56}{400} = \frac{56 \times 100}{400 \times 100} = \frac{56}{4}\,\frac{1}{100} = 14\%$$

On peut retrouver le pourcentage, en complétant le tableau de proportionnalité suivant :

400	100	
56	$100 \times \frac{56}{400} = 14$	$\times \frac{56}{400}$

Le nombre 14 représente le nombre de personnes ayant la particularité P parmi 100 personnes.

1.1 Évolution

Définition 1.3. Une grandeur évolue d'une valeur initiale y_1 à une valeur finale y_2.

- La **variation absolue** est $y_2 - y_1$;
- La **variation relative** est $\frac{y_2 - y_1}{y_1}$;
- Le nombre $t = \frac{y_2 - y_1}{y_1}$ est le **taux d'évolution** de y_1 à y_2.

Le taux d'évolution est souvent exprimé en pourcentage :

— Si $t > 0$, on pose $p = t \times 100$, alors $t = p\%$ et on a une augmentation de $p\%$ de y_1 à y_2.

— Si $t < 0$, on pose $p = -t \times 100$, alors $t = -p\%$ et on a une diminution de $p\%$ de y_1 à y_2.

Exemple. La température en un lieu passe de $15^\circ C$ à $21^\circ C$ pendant la matinée. Le taux d'évolution de la température est $t = 0,4$ et la température a augmenté de 40%.

Propriété 1.4 (et définition)**.** *Faire évoluer une quantité y_1 d'un taux d'évolution t à y_2 revient à la multiplier par $1+t$:*

$$y_2 = (1+t)y_1$$

Le coefficient

$$c = 1+t = \frac{y_2}{y_1}$$

est appelé **coefficient multiplicateur**.

Exemple. Le prix d'un produit, égal à 12€, augmente de 3%.
Le taux d'évolution est égal à 0.03 et le coefficient multiplicateur est égal à $1+0,03$. Le prix après augmentation est alors 12×1.03€.

Définition 1.5. Soit x un nombre représentant par exemple un prix ou une quantité, soit p un pourcentage.

— Le nombre $\frac{p}{100} \times x$ représente les $p\%$ de x.

— **Augmenter** x de $p\%$ revient à lui ajouter $p\%$ de lui-même. Le résultat peut être écrit de la manière suivante :

$$x + \frac{p}{100} \times x = (1 + \frac{p}{100}) \times x$$

— **Diminuer** x de $p\%$ revient à lui retrancher $p\%$ de lui-même. Le résultat peut être écrit de la manière suivante :

$$x - \frac{p}{100} \times x = (1 - \frac{p}{100}) \times x$$

Le nombre $1 \pm \frac{p}{100}$ par lequel on multiplie x dans les deux cas précédent est appellé **coefficient multiplicatif**.

Considérons deux évolutions successives :

$$\begin{tikzcd}
\boxed{y_1} \arrow[r, bend right, "\times(1+t_1)"'] \arrow[rr, bend left, "\times(1+t)"] & \boxed{y_2} \arrow[r, bend right, "\times(1+t_2)"'] & \boxed{y_3}
\end{tikzcd}$$

D'après le propriété précédente, on a les trois relations suivantes :

$$y_2 = (1+t_1)y_1 \quad , \quad y_3 = (1+t_2)y_2 \quad \text{et} \quad y_3 = (1+t)y_1$$

D'où

Propriété 1.6. *Le coefficient multiplicateur de y_0 à y_2 est égale à produit des coefficients multiplicateurs successifs et on a la relation suivante entre les différents taux d'évolutions :*

$$t = (1+t_1) \times (1+t_2) - 1$$

Remarque. **Attention !** Si une quantité y_1 évolue d'une taux d'évolution t et ensuite du taux d'évolution $-t$ alors elle n'est en général plus égal à y_1.

Par exemple, considérons une paire de chaussures à 70 euros. On l'augmente de 10%, on obtient $70 \times (1 + \frac{10}{100}) = 77$. Pour revenir en arrière, on y arrive pas en diminuant de 10%. En effet, 77 diminué de 10% vaut $77 \times (1 - \frac{10}{100}) = 69.3$ qui est bien différent de 70 ! Le taux d'évolution *réciproque* qui permet de revenir à 70 euros est $t' = \frac{70-77}{77} \simeq -0.091 = -9.1\%$

Propriété 1.7 (et définition)**.** *Soit t le taux d'évolution de y_1 à y_2 et $c = 1 + t$ le coefficient multiplicateur.*

- *Le* **coefficient multiplicateur réciproque** *est $c' = \frac{1}{c}$;*
- *Le* **taux d'évolution réciproque** *est*

$$t' = \frac{1}{1+t} - 1$$

De plus, si on fait évoluer y_2 du taux d'évolution réciproque t', on revient à y_1 :

$$\begin{tikzcd} \boxed{y_1} \arrow[r, bend right, "\times c"'] & \boxed{y_2} \arrow[l, bend right, "\times \frac{1}{c}"'] \end{tikzcd}$$

2 Fonctions du second degré (3S)

- Forme canonique d'une fonction polynôme de degré deux. La mise sous forme canonique n'est pas un attendu du programme.
- Équation du second degré, discriminant.
- Signe du trinôme.

Définition 2.1. Une fonction **polynôme de degré deux** (ou un trinôme du second degré) est une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont des nombres réels donnés tel que $a \neq 0$.
Les trois réels a, b et c sont les coefficients de la fonction f. De plus, a est appelé le coefficient dominant.

Par abus de langage, on se permet d'identifier la fonction f avec l'expression algébrique $ax^2 + bx + c$.

Exemples. Quelques exemples des fonctions polynômes du second degré :

- $f(x) = 1043x^2 + 12564x - 1954$,
- $f(x) = (x - 1)(x + 2)$,
- $f(x) = (x + 1)^2$.

Les fonctions suivantes ne sont pas des fonctions polynômes du second degré :

- $f(x) = x + 1$,
- $f(x) = x^3 + x + 1$,
- $f(x) = (x + 1)^2 - x^2$.

Remarque. On peut définir la notion de fonction polynôme de degré n ainsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Par exemple, $x+12$ est une fonction polynôme de degré un et $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ est une fonction polynôme de degré 4.

Exercice 1. Développer chacune des expressions suivantes et ordonner les polynômes obtenues dans l'ordre des puissances décroissantes de x ou de t.

1. $P(x) = (4x^2 + 3x - 1) + (-x^2 + 2x + 1)$;
2. $P(x) = (4x^2 + 3x - 1) - (-x^2 + 6x + 10)$;
3. $P(x) = (x + 1)(x + 2) - x(x + 4)$;
4. $P(x) = (2x + 3)(5x + 4) + 1$;
5. $P(t) = (2t + 3)(5t - 4) - 1$;
6. $P(x) = (x + 1)^2 + (x - 1)^2$;
7. $P(x) = x(3x + 2)^2 - (3x - 2)^2$;
8. $P(x) = (x - \frac{1}{3})^2 + (x - \frac{1}{3})(x + \frac{1}{3})$;
9. $P(t) = \frac{t-5}{3} + \frac{2-t}{6} - t^2$.

Parmi ces polynômes lesquels sont de degré deux ?

2.1 Forme canonique

Propriété-Définition 2.2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ une fonction polynôme du second degré $(a \neq 0)$. Il existe de nombre réels α et β tels que pour tout nombre réels x, on a*

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

L'écriture $a(x-\alpha)^2 + \beta$ est la **forme canonique** *du trinôme $ax^2 + bx + c$.*

Démonstration. Soit x un nombre réel, comme a est non nul, on a

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + 2\frac{b}{2a}x) + c$$

Posons, $\alpha = \frac{-b}{2a}$, alors

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 - 2\alpha x) + c$$

Dans la parenthèse, à l'ajout de α^2 près, on voit apparaître une identité remarquable :

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2) + c - a\alpha^2$$

Posons $\beta = c - a\alpha^2$, alors

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 - \alpha)^2 + \beta$$

□

Remarque. Il peut être intéressant de retenir le principe de la démonstration au lieu de la propriété. Un exemple d'application :

$$x^2 + x + 1 = \left(x^2 - 2\left(\frac{-1}{2}\right)x + \left(\frac{-1}{2}\right)^2\right) + 1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^2 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$$

Avec cette écriture, comme $(x+\frac{1}{2})^2 \geq 0$, on note que $f(x) = x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4}$ quel que soit le nombre réel x et on a égalité lorsque $x = \frac{-1}{2}$ $(f(\frac{-1}{2}) = \frac{3}{4})$.

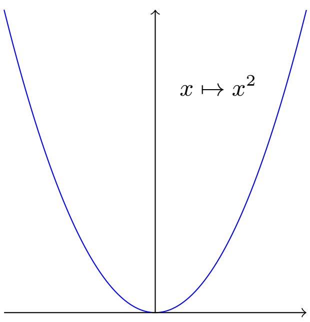
Propriété 2.3. *Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par l'une des 3 formes suivantes :*

- *forme* **développée** *: $f(x) = ax^2 + bx + c$;*
- *forme* **canonique** *: $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$;*
- *forme* **factorisée** *: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ ou $f(x) = a(x - x_1)^2$;*

avec $a \neq 0$, est une fonction polynôme du second degré.

2.2 Sens de variation

A l'aide de la forme canonique, nous allons déterminer les variations d'un trinôme. Avant rappelons un cas particulier : Le graphe de la fonction carré, $f(x) = x^2$ est le suivant :



et le tableau de variation de la fonction carrée est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = x^2$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Exercice 2. 1. Tracer le graphe des fonctions :
- $f(x) = x^2 + 2$,
- $f(x) = x^2 - 2$,
- $f(x) = (x-1)^2$,
- $f(x) = (x+3)^2$.

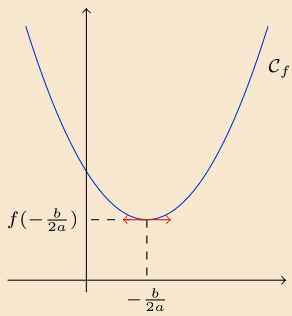
Remarquer qu'on peut toutes les obtenir à partir de translation de la courbe de la fonction carrée.

2. Comparer le graphe de la fonction $f(x) = (x-1)^2 + 4$ et $g(x) = -(x-1)^2 + 4$ et $h(x) = -3(x-1)^2 + 4$.

En toute généralité, on remarque qu'on peut estimer l'allure de la courbe du trinôme $ax^2 + bx + c$ à partir de la forme canonique $a(x-\alpha)^2 + \beta$. En effet, avec la forme canonique, suivant le signe de a, on déduit que β est un minimum ou un maximum ainsi que l'orientation de la parabole. En résumé,

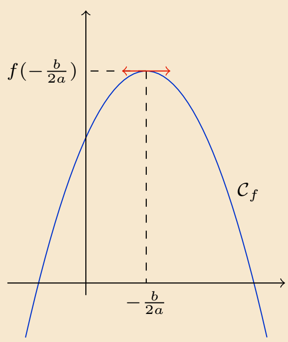
Propriété 2.4. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré. Les variations du trinôme f sont données par les tableaux suivants :*
- *Si $a > 0$,*

x	$-\infty$	$\alpha = \frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\beta = f(\frac{-b}{2a})$	$\nearrow$



Le fonction f admet un minimum en $-\frac{b}{2a}$.
- *Si $a < 0$,*

x	$-\infty$	$\alpha = \frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\beta = f(\frac{-b}{2a})$	$\searrow$



Le fonction f admet un maximum en $-\frac{b}{2a}$.

Lorsque le coefficient dominant a est positif la parabole est tournée vers le haut et lorsqu'il est négatif, elle est tournée vers le bas.

Définition 2.5. Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ une fonction polynôme du second degré. Son graphe est appelé une **parabole**.

Le point $S(\frac{-b}{2a}; f(\frac{-b}{2a}))$ est le **sommet** de la parabole.

Propriété 2.6. *La droite verticale d'équation $x = \frac{-b}{2a}$ est un axe de symétrie de la parabole.*

2.3 Équation du second degré

Propriété 2.7. *Soit a et b deux nombres réels. Si $a \times b = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$.*

En d'autres termes, si le produit de deux nombres est nul alors nécessairement au moins un des facteurs est nul.

Exemple. Considérons l'équation $(x-1)(x-5) = 0$. Alors, d'après la propriété précédente, au moins un des facteurs est nul. C'est-à-dire :

$$\begin{array}{rcl} x-1=0 & \text{ou} & x-5=0 \\ x=1 & \text{ou} & x=5 \end{array}$$

D'autre part, si on développe le précédent produit, on a $(x-1)(x-5) = x^2 - 5x - x + 5 = x^2 - 6x + 5$. En résumé, on vient de voir que l'équation $x^2 - 6x + 5 = 0$ admet deux solutions $x = 1$ et $x = 5$.

Rappelons que :

- Pour tout nombre réel x, $x^2 > 0$. Ainsi l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solution si a est strictement négatif.
- D'autre part, le seul nombre dont le carré est 0 est 0 lui-même : $x^2 = 0$ implique que $x = 0$.
- Pour tout nombre réel x, $(-x)^2 = x^2$. Ainsi, si x est un nombre tel que $x^2 = a$ alors $(-x)^2 = a$ aussi.

Plus précisément :

Propriété 2.8. *Soit a un nombre réel. Distinguons trois cas :*

1. *Si $a > 0$, alors l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions $x = \sqrt{a}$ et $x = -\sqrt{a}$.*
2. *Si $a = 0$, alors l'équation $x^2 = 0$ admet une unique solution $x = 0$.*
3. *Si $a < 0$, alors l'équation $x^2 = a$ n'admet pas de solution.*

Exemples.

1. $x^2 = 9$ admet deux solutions $x = \sqrt{9} = 3$ et $x = -3$.
2. $x^2 = 7$ admet deux solutions $x = \sqrt{7}$ et $x - \sqrt{7}$.
3. $x^2 = 0$ admet une unique solution $x = 0$.
4. $x^2 = -9$ n'admet pas de solution, car un nombre au carré est toujours positif.

Définition 2.9. Une équation du second degré, d'inconnue x, est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$, où a, b et c sont des nombres réels tels que a soit non nul.

Dans une équation du second degré, les nombres a, b et c sont des paramètres, c'est-à-dire qu'ils sont déterminés à l'avance et l'objet de la résolution est de déterminer les valeurs que x peut prendre.

Définition 2.10. Une solution de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ est appelée une **racine** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Soit $ax^2 + bx + c = 0$ une équation du second degré, nous avons vu dans la section précédente que si l'on pose $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = c - \frac{b^2}{4a}$, on a $ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)^2 + \beta$. Ainsi, le nombre réel x est solution de l'équation du second degré si et seulement si

$$a(x-\alpha)^2 + \beta = 0 \iff a(x-\alpha)^2 = -\beta \iff 4a^2(x-\alpha)^2 = b^2 - 4ac \iff (2ax - 2a\alpha)^2 = b^2 - 4ac$$

D'autre part, le nombre $b^2 - 4ac$ admet une racine carrée si et seulement s'il est positif.
Distinguons deux cas :

- Si $b^2 - 4ac < 0$, l'équation du second degré n'admet pas de solution.
- Si $b^2 - 4ac \geq 0$, alors les solutions $X^2 = b^2 - 4ac$ sont $X = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$. Ainsi, x est solutions de l'équation du second degré si et seulement si

$$2ax - 2a\alpha = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \iff x = \frac{-b + \pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En résumé, on vient de voir la propriété suivante :

Propriété-Définition 2.11. *Soit $ax^2 + bx + c = 0$ une équation du second degré. Le nombre $b^2 - 4ac$ est appelé le* **discriminant** *de l'équation et est noté Δ. De plus, on a*

- *Si $\Delta < 0$, l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de solution.*
- *Si $\Delta = 0$, l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ admet une unique solution $x_0 = \frac{-b}{2a}$.*
  Dans ce cas, on dit que x_0 est une racine double.
- *Si $\Delta > 0$, l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions :*

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Propriété 2.12 (Factorisation du trinôme)**.** *Soit $ax^2 + bx + c = 0$ une équation du second degré.*

- *Supposons que le discriminant Δ est supérieur ou égal à zéro. Posons*

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

  les racines, alors

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- *Supposons que $\Delta = 0$, alors $x_0 = \frac{-b}{2a}$ est l'unique racine et $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$.*

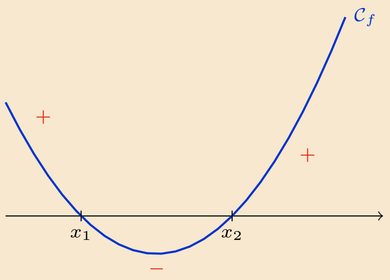
Remarque. Lorsque le discriminant est strictement négatif, on ne peut pas réaliser une telle factorisation.
Exemple. Résolvons $x^2 - 5x + 6 = 0$. On trouve $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$.

2.4 Signe d'un polynôme du second degré

Propriété 2.13. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction polynôme du second degré, définie par $f(x) = ax^2 + bx + x$ pour tout nombre réel x. Distinguons trois cas :*

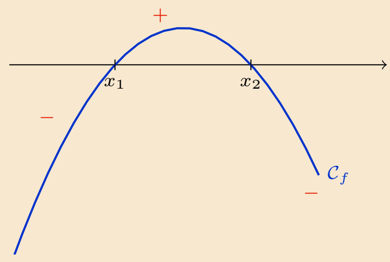
- *Si $\Delta > 0$, alors $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ et*

$a > 0$



x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

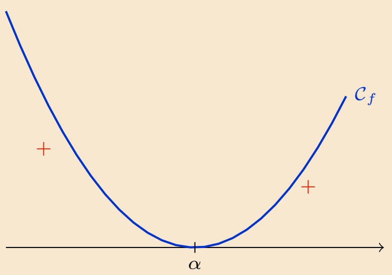
$a < 0$



x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

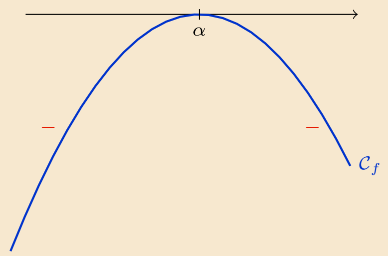
- *Si $\Delta = 0$, alors*

$a > 0$



x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

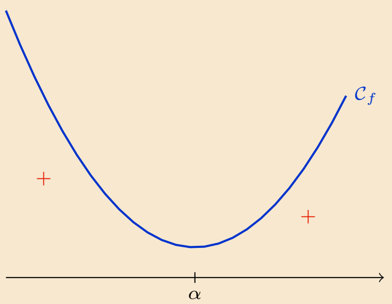
$a < 0$



x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

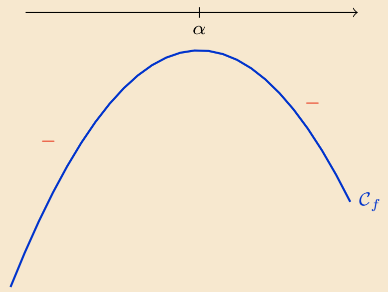
- *Si $\Delta < 0$, alors*

$a > 0$



x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

$a < 0$



x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	

Algorithmique : les polynômes du second degré

1. Voici l'algorithme qui demande les coefficients d'un polynôme de degré 2 et affiche le discriminant :

   Variables : a, b et c sont des nombres
   Entrées : Saisir a, b et c
   Traitement :
   $\Delta = b^2 - 4ac$.
   Sortie : Afficher Δ

   Le programme associé :

   Casio :
   ```
   "A":?→ A
   "B":?→ B
   "C":?→ C
   B^2 - 4×A×C→D
   D ◢
   ```

   Texas Instrument :
   ```
   Prompt A
   Prompt B
   Prompt C
   B^2 - 4×A×C→D
   Disp D
   ```

2. Voici l'algorithme qui demande les coefficients d'un polynôme de degré 2 et affiche le nombre de racines :

   Variables : a, b et c sont des nombres
   Entrées : Saisir a, b et c
   Traitement :
   $\Delta = b^2 - 4ac$.
   Si $\Delta < 0$ **alors**
   Afficher "pas de racines"
   Fin Si
   Si $\Delta = 0$ **alors**
   Afficher "Une racine"
   Fin Si
   Si $\Delta > 0$ **alors**
   Afficher "Deux racines"
   Fin Si

   Le programme associé :

   Casio :
   ```
   "A":?→ A
   "B":?→ B
   "C":?→ C
   B^2 - 4×A×C→D
   If D<0
   Then "Pas de racine"
   IfEnd
   If D=0
   Then "Une racine"
   IfEnd
   If D>0
   Then "Deux racines"
   IfEnd
   ```

   Texas Instrument :
   ```
   Prompt A
   Prompt B
   Prompt C
   B^2 - 4×A×C→D
   If D<0
   Disp "Pas de racine"
   End
   If D=0
   Disp "Une racine"
   End
   If D>0
   Disp "Deux racines"
   End
   ```

3 Statistiques descriptives (2S)

- Caractéristiques de dispersion : Variance, écart-type. On utilise la calculatrice ou un logiciel pour les déterminer.
- Utiliser de façon appropriée les deux couples usuels (moyenne, écart-type) et (médiane, écart interquartile).
- Étudier une série statistique ou mener une comparaison pertinente de deux séries statistiques à l'aide d'un logiciel ou d'une calculatrice.

Définition 3.1. Dans une population (ou un échantillon), on considère un caractère X qui prend différents états, aux quels on associe des nombres $x_1, \dots, x_k$.

- L'**effectif** d'une valeur x_i est le nombre de fois qu'il a cette valeur dans notre population, on le note n_i.
- L'**effectif total** est le nombre d'individus de la population (ou d'élément de l'échantillon), il est noté N.
- La **fréquence** d'une valeur x_i est le quotient de l'effectif n_i par l'effectif total N, il est noté f_i. Formellement, on a
$$f_i = \frac{n_i}{N}$$
En déplaçant l'entier N de l'autre côté de l'équation, on note que $n_i = f_i N$.
- On représente ainsi la série statistique :

X	x_1	...	x_k	Total
Effectifs	n_1	...	n_k	N = Effectif total
Fréquences	f_1	...	f_k	1

La collection de données (x_i, n_i) est appelée une **série statistique** (à une variable).

Définition 3.2. Soit (x_i, n_i) une série statistique. On définit les **effectifs cumulés** (et les fréquences cumulées) de la manière suivante :

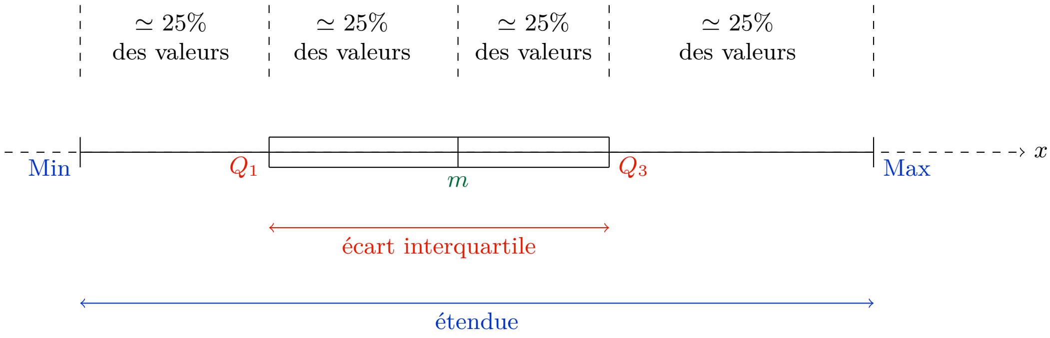
X	x_1	x_2	x_3	...	x_k	Total
Effectifs	n_1	n_2	n_3	...	n_k	N = Effectif total
Effectifs cumulés	n_1	$n_1 + n_2$	$n_1 + n_2 + n_3$	...	$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = N$	
Fréquences	f_1	f_2	f_3	...	f_k	1
Fréquences cumulés	f_1	$f_1 + f_2$	$f_1 + f_2 + f_3$	...	$f_1 + f_2 + \ldots + f_k = 1$	

Définition 3.3. Soit (x_i, n_i) une série statistique.

- La **médiane** m est un nombre qui permet de couper l'ensemble des valeurs en deux parties égales : mettant d'un côté une moitié de l'effectif où les valeurs prisent sont inférieurs ou égales à m et de l'autre côté l'autre moitié de l'effectif où les valeurs prisent sont supérieurs ou égales à m.
(La médiane n'est pas unique, pour résoudre le problème lorsque n est impair, on prend le milieu).
- On note Q_1 le **premier quartile**, la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 25% des valeurs lui soient inférieures ou égales.
On note Q_3 le **troisième quartile**, la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 75% des valeurs lui soient inférieures ou égales.

- Le différence entre le troisième quartile et le premier quartile $Q_3 - Q_1$ est appelée **écart interquartile**. C'est un critère de dispersion de la série.
- La différence entre le maximum et le minimum Max - Min est appelée **l'étendue** de la série statistique.

Diagramme en boîte :



3.1 La moyenne et la variance

Dans cette section, on se donne $(x_i; n_i)_{i=1...k}$ une série statistique.

Définition 3.4. On note $\bar{x}$ la **moyenne** de la série statistique :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{N}(n_1 x_1 + \ldots + n_k x_k) \\ &= f_1\, x_1 + \ldots + f_k\, x_k \end{aligned}$$

Définition 3.5. La notation suivante

$$\sum_{i=1}^{k} x_i$$

signifie : faire la somme pour i allant de 1 à k des éléments x_i.

Une autre utilisation du symbole de sommation :

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{k} n_i x_i\right)$$

Définition 3.6.
- La **variance** de la série statistique est :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{N}\left(n_1(x_1 - \bar{x})^2 + \ldots + n_k(x_k - \bar{x})^2\right) \\ &= \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \bar{x})^2\right) \end{aligned}$$

C'est la moyenne quadratique de la série centrée (i.e : où l'on a retranché la moyenne).
- L'**écart type** de la série statistique est la racine carrée de la variance :

$$\sigma = \sqrt{V}$$

Propriété 3.7. *On peut aussi calculer la variance à l'aide des fréquences f_i :*

$$V = f_1(x_1 - \bar{x})^2 + \ldots + f_k(x_k - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - \bar{x})^2$$

Soit (x_i, n_i) une série statistique, notons que

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{N}\left(n_1(x_1-\bar{x})^2 + \ldots + n_m(x_m-\bar{x})^2\right) \\
&= \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{n} n_i(x_i-\bar{x})^2\right) \\
&= \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{n} n_i(x_i^2 - 2\bar{x}x_i + \bar{x}^2)\right) \\
&= \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{n} n_i x_i^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} n_i x_i + \bar{x}^2 \sum_{i=1}^{n} n_i\right) \\
&= \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{n} n_i x_i^2 - 2\bar{x}\bar{x} + \bar{x}^2 N\right) \\
&= \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{n} n_i x_i^2\right) - \bar{x}^2
\end{aligned}$$

D'où,

Propriété 3.8. *Soit (x_i, n_i) une série statistique, la variance V est égale à*

$$V = \frac{1}{N}\left(n_1x_1^2 + \ldots + n_kx_k^2\right) - \bar{x}^2$$

Cette expression signifie que la variance est la moyenne des carrés moins le carré de la moyenne.

Remarque. En utilisant le symbole de sommation, la précédente propriété se réécrit :

$$V = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2\right) - \bar{x}^2$$

Hors programme

Propriété 3.9. *Une série statistique partagé en p sous-séries disjointes de moyennes et d'effectifs respectifs $(\bar{x}_1, n_1), (\bar{x}_2, n_2), \ldots, (\bar{x}_p, n_p)$ a pour moyenne :*

$$\bar{x} = \frac{1}{n_1 + \ldots + n_p}\left(n_1\bar{x}_1 + \ldots + n_p\bar{x}_p\right)$$

Moralement, la propriété précédente, nous dit qu'il est possible de calculer la moyenne d'une série statistique en plusieurs étapes. Il faut cependant faire attention aux effectifs à prendre en compte. Voici un exemple.

Exemple.

<table>
<tr><td>X</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>10</td><td>Total</td></tr>
<tr><td>Effectifs</td><td>2</td><td>1</td><td>3</td><td>4</td><td>1</td><td>3</td><td>7</td><td>N = 21</td></tr>
<tr><td>Sous-effectif total</td><td colspan="3">6</td><td colspan="2">5</td><td colspan="2">10</td><td>21</td></tr>
<tr><td>Sous-moyenne</td><td colspan="3">$\frac{2\times1+1\times2+3\times3}{6}=\frac{13}{6}$</td><td colspan="2">$\frac{4\times4+1\times5}{5}=\frac{21}{5}$</td><td colspan="2">$\frac{3\times6+7\times10}{9}=\frac{88}{10}$</td><td></td></tr>
</table>

Le moyenne de la série statistique est :

$$\bar{x} = \frac{1}{21}\left(2\times1+1\times2+3\times3+4\times4+1\times5+3\times6+7\times10\right)=\frac{122}{21}$$

D'autre part, on remarque

$$\bar{x} = \frac{1}{6+5+9}\left(6\times\frac{13}{6}+5\times\frac{21}{5}+9\times\frac{88}{10}\right)=\frac{122}{21}$$

4 Suites numériques (1,5S)

Exercice 3. On donne les quatres listes de nombres suivantes :

A : 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 B : 1 ; 3 ; 9 ; 27 ; 81 C : 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 D : 3 ; 6 ; 11 ; 18 ; 27

1. Indiquer comment chacune est construite.
2. Donner les deux nombres suivants de chaque liste.
3. Pour quelles listes est-il possible de trouver le vingtième nombre de la liste sans calculer tous ceux qui le précèdent ?

Définition 4.1. Une **suite numérique** u est une fonction définie sur $\mathbb{N}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$n \longmapsto u_n := u(n)$$

On note cette suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Une suite de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la donnée pour tout entier naturel n d'un nombre réel noté u_n. Un dit que u_n est le n-ème terme de la suite (u_n).

Exemples.

- $(u_n) = (0, 1, 2, 3, 4, \ldots)$, c'est-à-dire pour tout n : $u_n = n$.
- $(u_n) = (0, 2, 4, 6, 8, \ldots)$, c'est-à-dire pour tout n : $u_n = 2n$.
- $(u_n) = (0, 1, 4, 9, 25, 36, \ldots)$, c'est-à-dire pour tout n : $u_n = n^2$.
- $(u_n) = (1, 5, 25, 125, \ldots)$, c'est-à-dire pour tout n : $u_n = 5^n$.

Rappelons que l'ensemble des entiers naturels peut être parcouru en partant de zéro et en avançant successivement de un :

$$0, \quad 1, \quad 2 = 1 + 1, \quad 3 = 2 + 1, \quad \ldots$$

Revenons à la suite des nombres pairs :

$$(u_n) = (0, 2, 4, 6, 8, \ldots, 2n, \ldots)$$

On note qu'un terme (disons u_n) de la suite est égale à son précédent plus 2 (c'est-à-dire $u_{n-1} + 2$). Les termes de la suite vérifient donc la relation suivante :

$$u_n = u_{n-1} + 2$$

On notera que cette relation n'a pas de sens pour $n = 0$. Il nous faut un point de départ pour construire la suite (dans le cas de la suite des nombres pairs : $u_0 = 0$).

Définition 4.2. Soit $f : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction quelconque. En ne considérant que les images par les entiers naturels, on peut définir la suite (u_n) :

$$u_n = f(n)$$

pour tout entier naturel n.

Définition 4.3. Une suite est **définie par récurrence** quand elle est définie par la donnée de :

- son premier terme u_0 (ou u_1 en général).
- d'une relation qui permet de calculer à partir de chaque terme le terme suivant :

$$u_{n+1} = g(u_n)$$

  pour tout entier naturel n et où $g : I \to \mathbb{R}$ est une fonction. Cette relation est appelée **relation de récurrence**

Exemple. Soit (u_n) la suite définie par récurrence ainsi :

$$\begin{cases} u_0 & = 1 \\ u_{n+1} & = 5u_n - 2 \end{cases}$$

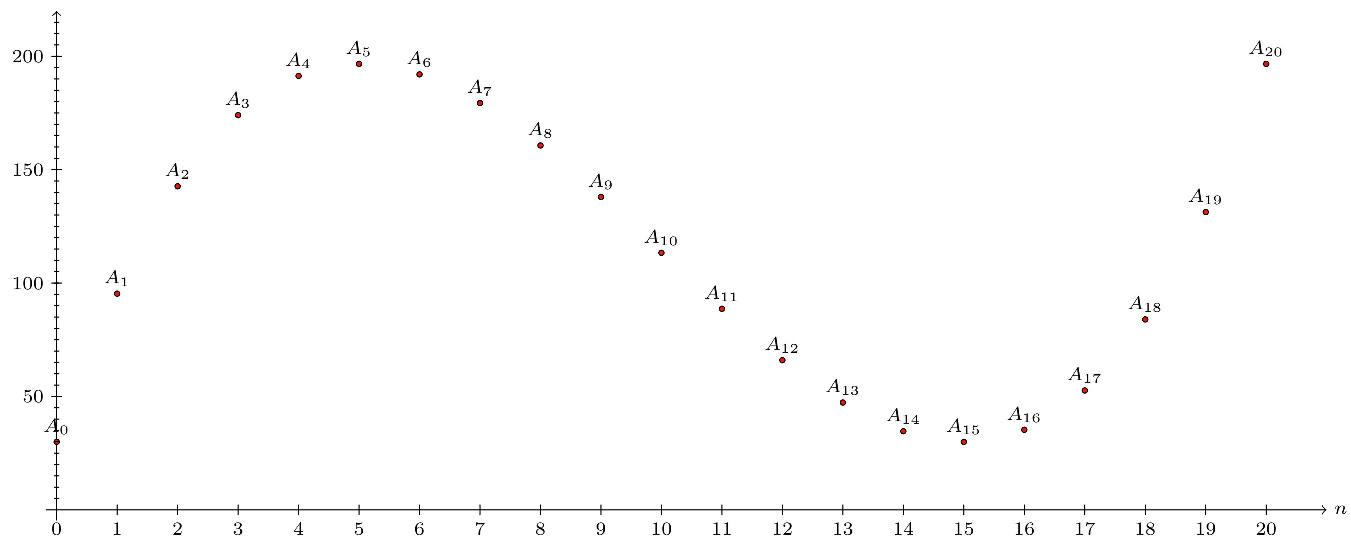
L'algorithme suivant permet d'obtenir le terme d'un rang donné de la suite (u_n) :

Variables : n, U et i sont des nombres
Saisir n
U prend la valeur 1
Pour i allant de 1 à n **faire**
    U prend la valeur $5 \times U - 2$
Fin Pour
Afficher U

Représentation graphique

Définition 4.4. Soit (u_n) une suite numérique. On se place dans le plan muni d'un repère, on peut alors associer à la suite l'ensemble des points $A(n; u_n)$, où n parcourant l'ensemble des entiers naturels. Cet ensemble de points est appelé **le nuage de points** associé à la suite (u_n).

Exemple. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{1}{3}n^3 - 10n^2 + 75n + 30$ pour tout entier naturel n. Voici le nuage de points associé à la suite (u_n) :



5 Fonctions de référence (1,5S)

- Les fonctions de référence : la fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ et la fonction cube $x \mapsto x^3$.

5.1 Rappels sur les fonctions

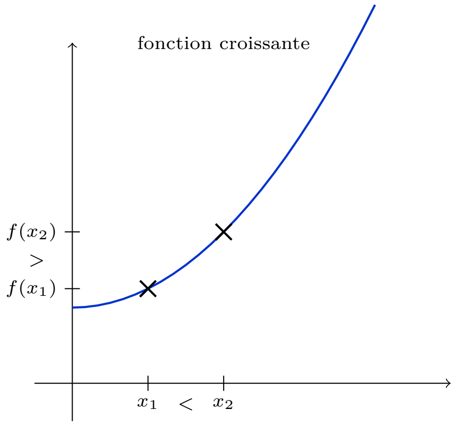
Définition 5.1. Soit $\mathcal{D}$ un intervalle ou une union d'intervalles de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.
On définit une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ si, à chaque nombre réel x de $\mathcal{D}$, on associe un unique nombre réel noté $f(x)$.
L'ensemble $\mathcal{D}$ est appelé le **domaine de définition** de la fonction f.
Le nombre $f(x)$ est appelé l'**image** de x par la fonction f.

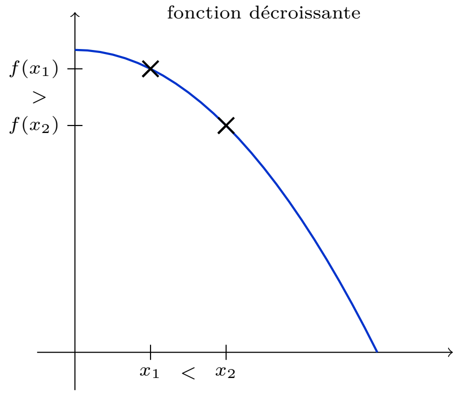
Définition 5.2. Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et on se place dans le plan muni d'un repère. On appelle **courbe représentative** de la fonction f le lieu géométrique des points $M(x; y)$ tels que $y = f(x)$ et x appartient à $\mathcal{D}$.

Définition 5.3. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est

1. **croissante** si pour tous $x_1 \leq x_2$, on a $f(x_1) \leq f(x_2)$.
   Dans ce cas, on note que f *conserve l'ordre*.
2. **strictement croissante** si pour tous $x_1 < x_2$, on a $f(x_1) < f(x_2)$.
3. **décroissante** si pour tous $x_1 \leq x_2$, on a $f(x_1) \geq f(x_2)$.
   Dans ce cas, on note que f *renverse l'ordre*.
4. **strictement décroissante** si pour tous $x_1 < x_2$, on a $f(x_1) > f(x_2)$.

Graphiquement :





5.2 Les fonctions de référence

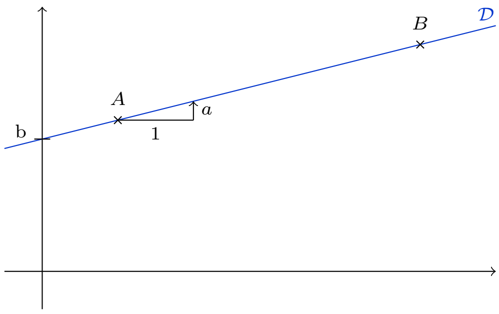
Les fonctions affines

Propriété 5.4. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$, alors*

- *si $a = 0$, la fonction f est constante égale à b ;*
- *si $a < 0$, la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$;*
- *si $a > 0$, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*

On rappelle que le nombre a (devant x) est le **coefficient directeur de la droite** et le nombre b est l'**ordonnée à l'origine** de la fonction affine f.

Soit (O, I, J) un repère du plan. Graphiquement, on a



La droite $\mathcal{D}$ passe par le point $(0;\ b)$.

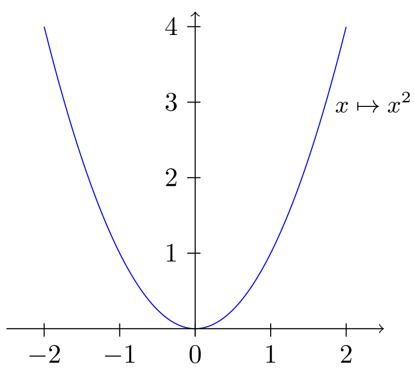
De plus, soit deux points distincts A et B de la droite $\mathcal{D}$, le coefficient directeur est égale au taux d'accroissement :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A}$$

La fonction carré

Définition 5.5. La **fonction carré** est définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2$ soit $f(x) = x^2$.

Voici le graphe de la fonction carré :



Propriété 5.6. *Le graphe de la fonction carrée est une parabole dont l'axe des ordonnées est un axe de symétrie. Formellement, on a $(-x)^2 = x^2$ pour tout nombre réel x.*

Le tableau de variation de la fonction carré :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) = x^2$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Propriété 5.7.

- *Quel que soit le nombre x, $x^2 \geq 0$.*
- *Quels que soient les nombres a, b, on a*

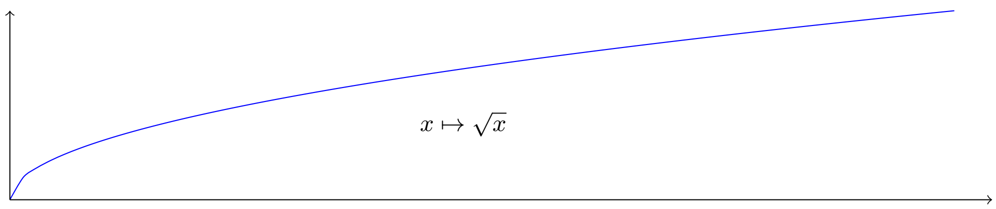
$$\begin{aligned} (a\,b)^2 &= a^2\,b^2 \\ (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ a^2 - b^2 &= (a+b)(a-b) \end{aligned}$$

- *Le fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.*

Propriété 5.8. *Soit a un nombre réel. Considérons l'équation $x^2 = a$:*

- *Si $a < 0$ alors $x^2 = a$ n'admet pas de solution (Le carré d'un nombre est toujours positif).*
- *Si $a = 0$ alors $x^2 = a$ admet une unique solution 0.*
- *Si $a > 0$ alors $x^2 = a$ admet deux solutions $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.*

La racine carrée



Propriété 5.9.

- *La fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$.*
- *Pour tout $x \leq 0$: $\sqrt{x}$ est le nombre tel que si on l'élève au carré on obtient x :*

$$x = (\sqrt{x})^2$$

- *Pour tout $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$, on a*

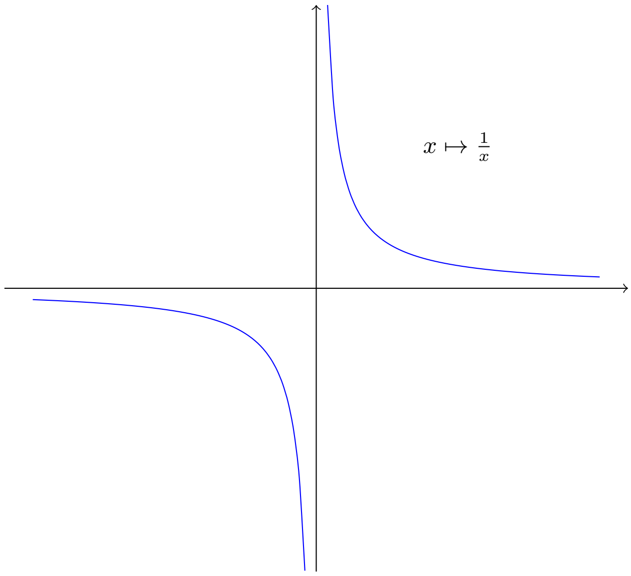
$$\sqrt{x_1\,x_2} = \sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$$

et

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} = \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}}$$

- *La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.*

Fonction inverse



(le graphe de la fonction inverse est une hyperbole)

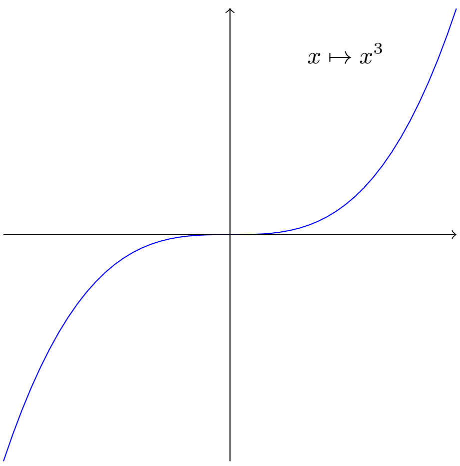
Propriété 5.10.

- *La fonction inverse* $f(x) = \frac{1}{x}$ *est définie sur* $]-\infty; 0[$ *et sur* $]0; +\infty[$.
- *Le fonction inverse est strictement décroissante sur* $]-\infty; 0[$ *et est strictement décroissante sur* $]0; +\infty[$.

La fonction cube

Définition 5.11. La **fonction cube** est définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^3$ soit $f(x) = x^3$.

Voici le graphe de la fonction cube :



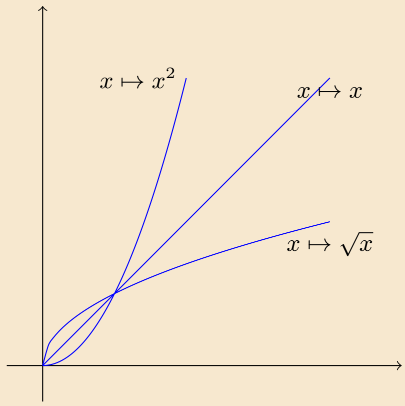
Propriété 5.12.

- *La fonction cube* $f(x) = x^3$ *est définie sur* $\mathbb{R}$.

- *Quel que soit le nombre* x, x^3 *est de même signe que* x *(car* $x^3 = \underbrace{x^2}_{\geq 0} x$*).*
- *Le fonction cube est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.

Comparaison de la racine carrée et de la fonction carrée

Propriété 5.13. *Graphe de* $x \mapsto x$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x^2$.



On a

- *Pour tout* $0 < x < 1$: $x^2 < x < \sqrt{x}$,
- *Pour tout* $1 < x$: $\sqrt{x} < x < x^2$.

Démonstration. ... □

Remarque. $\sqrt{0} = 0 = 0^2$ et $\sqrt{1} = 1 = 1^2$.

6 Variables aléatoires, loi de probabilités, espérance

Variable aléatoire : espérance, variance, écart-type. Répétitions d'expériences identiques.

6.1 Rappels

Définition 6.1. Une **expérience aléatoire** est une expérience vérifiant les deux conditions suivantes :

- elle comporte plusieurs issues envisageables.
- on ne peut prévoir l'issue lorsqu'on réalise l'expérience.

On se restreindra aux expériences comportant un nombre fini d'issues.
L'**univers** (noté Ω) de l'expérience aléatoire est l'ensemble des issues de cette expérience.
Un **événement** est un ensemble d'issues de l'expérience aléatoire.
Les **événements élémentaires** sont les événements réduits à une unique issue de l'expérience.

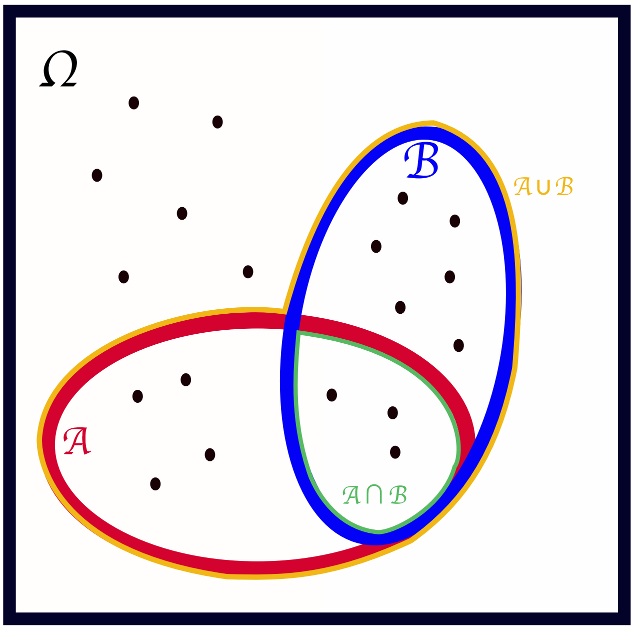
Exemple. Le jet d'un dé, tirage d'une carte dans un jeu de carte, tirage d'une boule dans une urne.

Définition 6.2. On appelle **événement contraire** d'un événement A, l'événement noté $\bar{A}$ qui contient l'ensemble des issues n'appartenant pas à A.

Définition 6.3. Soient A et B deux événements d'une expérience aléatoire donnée.

- L'intersection des deux événements A et B est l'événement constitué des issues qui sont dans A et dans B, noté $A \cap B$.
- L'union des deux événements A et B est l'événement constitué des issues de A ou de B (au sens large), noté $A \cup B$.
- On dit que A est inclus dans B, noté $A \subset B$ si toutes les issues de A sont aussi des issues de B.

L'événement $A \cap B$ se réalise lorsque les deux événements à la fois se réalisent.
L'événement $A \cup B$ se réalise lorsqu'au moins un des deux événements se réalise.



Définition 6.4. Dans une expérience aléatoire, deux événements E et E' sont dit **incompatibles** s'ils ne partagent pas d'issue commune (i.e : leur intersection est vide).

Définition 6.5. Une (théorie de) **probabilité** associée à une expérience aléatoire est une application qui à un événement E associe un nombre réel, noté $\mathbb{P}(E)$ telle que :

1. $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$,
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (il se passe certainement quelque chose),
3. Pour tous A et B deux événements incompatibles, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Étant donné un événement E, le nombre $\mathbb{P}(E)$ donne (mesure) les chances de réussite de E. Plus $\mathbb{P}(E)$ est proche de 1, plus l'événement E se réalisera.
La probabilité de l'événement vide $\emptyset$ est nul ($\mathbb{P}(\emptyset) = 0$). Moralement, lorsqu'on réalise une expérience aléatoire, il se passe toujours quelque chose.

Propriété 6.6 (loi des grands nombres)**.** *Lors d'une expérience répétée n fois, les fréquences obtenues d'un événement E de l'expérience se rapprochent de la variable théorique $\mathbb{P}(E)$, la probabilité de l'événement E.*

(illustration avec un tableur)

Propriété 6.7. *Dans une expérience aléatoire, supposons que l'univers Ω se décompose en n issues : $x_1, \ldots, x_n$ (formellement, $\Omega = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Posons $p_i = \mathbb{P}(x_i)$ la probabilité que l'issue x_i se réalise. Alors,*

$$p_1 + \ldots + p_n = 1$$

La somme des probabilités des issues possibles d'une expérience aléatoire vaut toujours un. Ce fait, peut être utilisé comme un premier test de vraisemblance d'une théorie de probabilité proposé pour étudier une expérience aléatoire !

Définition 6.8. Lorsque, dans une expérience aléatoire, toutes les issues élémentaires ont la même probabilité de se réaliser, on dit que l'expérience est **équiprobable**.

Exemple. Lancé d'un dé équilibré, lancé d'une pièce équilibrée.

Soit A un événement d'une expérience aléatoire, le nombre d'issues que contient A est appelé le cardinal de A et il est noté $\text{card}(A)$.

Propriété 6.9. *Lors d'une expérience aléatoire ayant n issues équiprobables :*

- *La probabilité de chaque événement élémentaire est $\frac{1}{n}$.*
- *La probabilité d'un événement A est*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{n} = \frac{\textit{nombre d'issues favorable à } A}{\textit{nombre d'issues possibles}}$$

Propriété 6.10. *La probabilité de l'événement contraire d'un événement A est :*

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

Propriété 6.11. *Soient A et B deux événements. Si $A \subset B$ alors, $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.*

Moralement, la propriété précédente nous dit que plus un événement contient d'issues plus il est probable.

Exemple. On considère l'expérience aléatoire du jet d'un dé. Soit A l'événement "le résultat est un multiple de trois" et B l'événement "le résultat est un nombre pair". On note que $A = \{3, 6\}$ et $B = \{2, 4, 6\}$, ainsi

- l'intersection de A et B est $A \cap B = \{6\}$.
- l'union de A et B est $A \cap B = \{2, 3, 4, 6\}$.

Théorème 6.12. *Si A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire alors :*

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

6.2 Variable aléatoire et loi de probabilité

Définition 6.13. Soit une expérience aléatoire dont l'univers est l'ensemble Ω.
Une **variable aléatoire** est une fonction définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On la note X.

Une variable aléatoire est une application qui à toute issue de l'expérience associe un nombre.

Exemple. Considérons l'expérience aléatoire qui consiste à lancer deux dés. L'univers Ω est

$$\{(1,1),(1,2),\dots,(6,5),(6,6)\},$$

l'ensemble de tous les couples de nombres de un à six. L'univers Ω est de cardinal $6\times 6=36$. On peut alors définir la variable aléatoire X qui est égale à la somme des résultats des deux dés. Si après avoir jeter les deux dés, on obtient un 2 et un 3, la variable aléatoire X vaut alors $2+3=5$. Les valeurs que X peut prendre sont $1+1=2, 1+2=3, 4, \dots, 12$.
La probabilité que la somme X soit égale à 12 est égale à la probabilité d'avoir deux 6, ainsi, formellement on a

$$\mathbb{P}(X=12)=\mathbb{P}(\text{“obtenir deux six"})=\frac{1}{36}$$

La probabilité que la somme X soit égale à 4 est un peu plus compliqué. Énumérons toutes la façons d'obtenir 4 :

$$4=1+3=2+2=3+1$$

d'où $\mathbb{P}(X=4)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$. De même, on calcul les probabilités suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=2) &= \frac{1}{36}\\
\mathbb{P}(X=3) &= \frac{2}{36}=\frac{1}{18}\\
\mathbb{P}(X=4) &= \frac{3}{36}=\frac{1}{12}\\
\mathbb{P}(X=5) &= \frac{4}{36}=\frac{1}{9}\\
\mathbb{P}(X=6) &= \frac{5}{36}\\
\mathbb{P}(X=7) &= \frac{6}{36}=\frac{1}{6}\\
\mathbb{P}(X=8) &= \frac{5}{36}\\
\mathbb{P}(X=9) &= \frac{4}{36}=\frac{1}{9}\\
\mathbb{P}(X=10) &= \frac{3}{36}=\frac{1}{12}\\
\mathbb{P}(X=11) &= \frac{2}{36}=\frac{1}{18}\\
\mathbb{P}(X=12) &= \frac{1}{36}
\end{aligned}$$

On pourrait résumé ses données dans un tableau de la manière suivante :

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Définition 6.14. Une variable aléatoire X est définie sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire.
Notons $E=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par X.
La **loi de probabilité** de X est la fonction qui à chaque x_i de E lui associe sa probabilité notée $\mathbb{P}(X=x_i)$.
On peut la représenter sous forme d'un tableau de valeurs :

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$\mathbb{P}(X=x_i)$	$\mathbb{P}(X=x_1)$	$\mathbb{P}(X=x_2)$	$\dots$	$\mathbb{P}(X=x_n)$

6.3 Espérance et variance

Définition 6.15. Une variable aléatoire X est définie sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire.
Notons $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par X.
La loi de probabilité de X associe à chaque x_i de E sa probabilité $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$.

- L'**espérance** mathématique de la loi de probabilité de X est la moyenne de la série des x_i pondérés par p_i ; on la note

$$\mathbb{E}(X) = p_1x_1 + \ldots + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i$$

- La **variance** de la loi de probabilité de X est la variance de la série des x_i pondérés par p_i, on la note

$$\begin{aligned} V(X) &= p_1\Big(x_1 - \mathbb{E}(X)\Big)^2 + p_2\Big(x_2 - \mathbb{E}(X)\Big)^2 + \ldots + p_n\Big(x_n - \mathbb{E}(X)\Big)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{p} p_i\Big(x_i - \mathbb{E}(X)\Big)^2 \end{aligned}$$

- L'**écart type** de la loi de probabilité de X est l'écart type de la série x_i pondérés par p_i ; on le note

$$\sigma(X) = \sqrt{V(x)}$$

Propriété 6.16. *Une variable aléatoire X est définie sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire. Soit a et b deux nombres réels. Considérons la nouvelle variable aléatoire $Y = aX + b$. L'espérance, la variance et l'écart-type de Y se déduisent de ceux de X ainsi :*

1. $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$;
2. $V(aX + b) = a^2V(X)$;
3. $\sigma(Y) = |a|\sigma(X)$.

Démonstration. … □

6.4 Modèle de la répétition

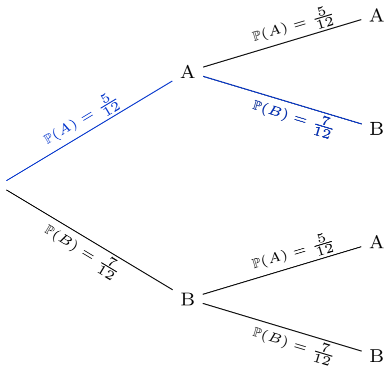
Définition 6.17. Deux expériences aléatoires sont considérées comme **identiques et indépendantes** si elles ont les même issues et les mêmes probabilités pour chaque issue, et si la réalisation de l'une ne modifie pas les probabilités des issues de l'autre.

Typiquement, une expérience aléatoire qu'on réitère une seconde fois, alors la seconde occurrence de l'expérience est identique et indépendante de la première. Par exemple, si l'on jette un dé deux fois, les résultats du premier et du second lancé sont deux expériences identiques et indépendantes.

Exemple. Considérons une urne qui contient 5 boules rouges et 7 boules bleues. La première expérience consiste à tirer une boule, ensuite on remet la boule et ensuite la seconde expérience consiste à tirer encore une fois une boule. Ainsi, comme il y a remise, les deux expériences sont identiques et indépendantes. Considérons les événements :

- A : "on tire une boule rouge"
- B : "on tire une boule bleue"

Voici l'arbre pondéré de probabilité :



probabilité d'avoir A puis B : $\frac{5\times7}{12\times12} = \frac{5}{12} \times \frac{7}{12} = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$

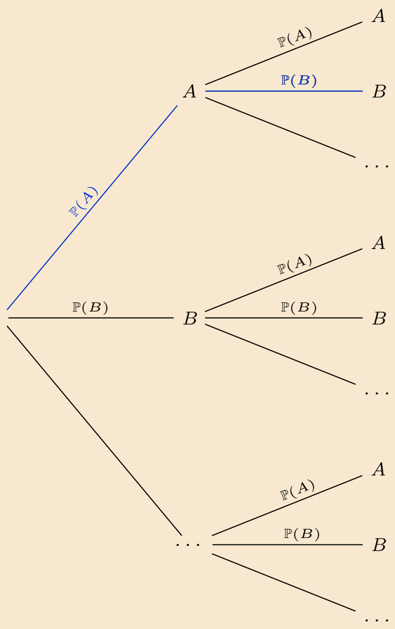
Considérons l'événement A se réalise au premier tirage (c'est-à-dire, on tire une boule rouge) et B se réalise au deuxième tirage (c'est-à-dire, on tire une boule bleue). On note qu'il y a 12×12 façons de tirer deux boules successivement (avec remise) et qu'il a 5×7 façons de tirer une boule rouge puis une boule bleu, d'où

$$\mathbb{P}(A; B) = \frac{5 \times 7}{12 \times 12} = \frac{5}{12} \times \frac{7}{12} = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

Propriété 6.18 (admise)**.** *Si A et B sont deux issues d'une expérience aléatoire, avec pour probabilités respectives $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$, alors, si l'on peut répéter l'expérience de façon indépendante, la probabilité d'obtenir A puis B est le produit de leurs probabilités :*

$$\mathbb{P}(A; B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

On peut représenter toutes les issues de l'expérience avec un arbre pondéré de probabilité :



probabilité d'avoir A puis B : $\mathbb{P}(A; B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$

Propriété 6.19. *Lorsqu'on répète n fois de façon indépendante une expérience aléatoire dont les issues A_1, A_2, ..., A_n ont pour probabilités respectives $\mathbb{P}(A_1)$, $\mathbb{P}(A_2)$, ..., $\mathbb{P}(A_n)$, alors la probabilité d'obtenir la suite d'issues $(A_1; A_2; \ldots; A_n)$ est le produit de leurs probabilités :*

$$\mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \times \ldots \times \mathbb{P}(A_n)$$

En d'autres termes, la probabilité d'un événement correspondant à un chemin $A_1 \to A_2 \to \ldots \to A_n$ sur l'arbre est obtenue en multipliant les probabilités portées par ses branches (i.e : les $\mathbb{P}(A_i)$).

Remarque. La probabilité d'un événement correspondant à plusieurs chemins dans l'arbre pondéré des probabilités est alors obtenue en ajoutant les probabilités des événements correspondants à chaque chemin, puisque ceux-ci sont incompatibles.

7 Nombre dérivé, fonction dérivée (2S)

Définition 7.1. Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points distincts du plan. On appelle taux d'accroissement de A vers B le nombre

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Propriété 7.2. *Soient $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = mx + p$, A et B deux points distincts de la droite. Le taux d'accroissement de A vers B est égal à m, le coefficient directeur de la droite $\mathcal{D}$.*

Exemples.

1. Soit $A(2, 4)$ et d la droite de coefficient directeur 4 passant par A. Connaissant, le coefficient directeur, on sait que l'équation réduite de la droite d est de la forme :

   $$y = 4x + p$$

   D'autre part, A appartient à d, doù

   $$4 = 4 \times 2 + p \quad \Rightarrow \quad p = 4 - 8 = -4$$

   Ainsi, d est d'équation $y = 4x - 4$.
2. Soit a un nombre réel, soit $M(a, a^2)$. Détmerinons l'équation de la droite d passant par M est de coefficient directeur $2a$. Alors, on a à nouveau

   $$y = 2ax + p$$

   et comme M appartient à d, on déduit que

   $$a^2 = 2a \times a + p \quad \Rightarrow \quad p = a^2 - 2a^2 = -a^2$$

   Ainsi, d est d'équation $y = 2ax - a^2$.

Définition 7.3. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I contenant le nombre a.
Dire que f est **dérivable en** a, c'est dire que lorsque h tend vers 0, le taux de variation de

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

tend vers un réel l, ce qu'on note $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = l$.
Dans ce cas, le nombre l est appelé **le nombre dérivé** de f en a et on le note $f'(a)$.

Exemple. La fonction f est la fonction carré, c'est-à-dire $f(x) = x^2$ pour tout nombre réel x.
Nous allons calculer le nombre dérivé de la fonction carré en 5 :
Commençons par calculer $f(5)$, $f(5 + h)$:

$$f(5) = 5^2, \qquad f(5 + h) = (5 + h)^2 = 25 + 10h + h^2$$

D'où, le taux de variation est

$$\frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \frac{25 + 10h + h^2 - 25}{h} = \frac{10h + h \times h}{h} = \frac{h(10 + h)}{h} = 10 + h$$

Ainsi, lorsque h tend vers 0, le taux de variation tend vers 10 :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim_{h \to 0} 10 + h = 10$$

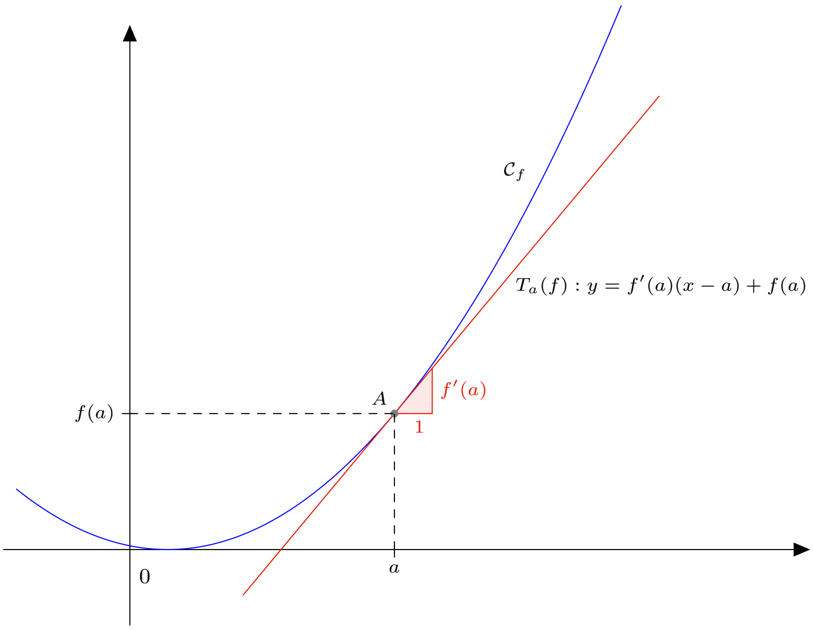
Moralement, dans l'expression $10 + h$ si on prend h de plus en plus petit, on se rapproche d'autant qu'on veut de 10, d'où à la limite lorsque h est très proche de 0, le nombre $10 + h$ s'identifie avec le nombre 10 lui même.

Définition 7.4. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en un point a de I, la **tangente à la courbe** $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a, notée $T_a(f)$, est la droite passant par le point A et dont le coefficient directeur est $f'(a)$.

Propriété 7.5. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en un point a de I, alors l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est :*

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Graphiquement :



7.1 Dérivée des fonctions de référence

Définition 7.6. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I, on dit que f est **dérivable sur I** si elle est dérivable en tout réel a de I.

Propriété 7.7.

f est dérivable sur :	$f(x) =$	$f'(x) =$
$\mathbb{R}$	c *(constante)*	*0*
	x	*1*
	x^2	$2x$
	x^3	$3x^2$
Soit n un entier relatif $\mathbb{R}$ *ou* $]-\infty;0[$ *ou* $]0;+\infty[$	x^n	nx^{n-1}
$]-\infty;0[$ *ou* $]0;+\infty[$	$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$
$]0;+\infty[$	$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

7.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Propriété 7.8.

u et v des fonctions définies et dérivables sur I.	*Si $f(x)$ s'écrit*	*alors f est dérivable sur I et $f'(x)$ est égal à*
Somme $u+v$	$f(x)=u(x)+v(x)$	$f'(x)=u'(x)+v'(x)$
Différence $u-v$	$f(x)=u(x)-v(x)$	$f'(x)=u'(x)-v'(x)$
Produit de u par un une constante c $c\,u$	$f(x)=c\,u(x)$	$f'(x)=c\,u'(x)$

En d'autres termes, la dérivée de la somme (ou de la différence) de deux deux fonctions dérivables est tout simplement égale à la somme (resp. la différence) des dérivées. De même, la dérivée d'une fonction multipliée par une constante c est égale à la constante fois la dérivée de la fonction. Formellement, on a

$$\begin{aligned}(u+v)' &= u'+v'\\ (u-v)' &= u'-v'\\ (c\,u)' &= c\,u'\end{aligned}$$

Démonstration. . . . □

Exemples.

- $f(x)=x^2+2x+3$: $f'(x)=2x+2$.
- $f(x)=-4x^3+123x^2+678678x$: $f'(x)=-12x^2+246x+678678$.
- $f(x)=\frac{3}{x}+\sqrt{4x}$: On note au préalable que $\sqrt{4x}=\sqrt{4}\sqrt{x}=2\sqrt{x}$, d'où $f'(x)=\frac{-3}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Produit, inverse et quotient

Propriété 7.9. *Soient $u,v : I\to\mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I alors,*

1. *la fonction $f : I\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=u(x)\times v(x)$ est dérivable et on a*

$$f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

2. *Si de plus la fonction v ne s'annulle pas sur I, alors*
   a) la fonction $f : I\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\frac{1}{v(x)}$ est dérivable et on a

$$f'(x)=\frac{-v'(x)}{[v(x)]^2}$$

   b) la fonction $f : I\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ est dérivable et on a

$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Remarque. Formellement, à nouveau, les identités précédentes sur les dérivées peuvent être écrites de la manière suivante :

$$\begin{aligned} (uv)' &= u'v + uv' \\ \left(\frac{1}{v}\right)' &= \frac{-v'}{v^2} \\ \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \end{aligned}$$

On note que la troisième formule se déduit des deux précédentes :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u \times \frac{1}{v}\right)' = u' \times \frac{1}{v} + u \times \frac{-v'}{v^2} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Démonstration. ... □

8 Suites de références et sens de variation des suites (2S)

8.1 Suites arithmétiques et géométriques

Définition 8.1. Une **suite arithmétique** de terme initial u_0 et de raison r est la suite définie de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$$

Propriété 8.2. *Soit (u_n) une suite arithmétique de terme initial u_0 et de raison r :*

$$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$$

Son n-ème terme est $u_n = r\,n + u_0$.

En fait, on peut montrer que si (u_n) est arithmétique de raison r, alors pour tous $n \geq m$, on a $u_n = (n-m)r + u_m$.

Définition 8.3. Une **suite géométrique** de terme initial u_0 et de raison q est la suite définie de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = qu_n \end{cases}$$

Propriété 8.4. *Soit (u_n) une suite géométrique de terme initial u_0 et de raison q :*

$$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = qu_n \end{cases}$$

Son n-ème terme est $u_n = q^n\,u_0$.

8.2 Sens de variation des suites

Définition 8.5. Une suite (u_n) est dite

- **croissante** si pour tout entier n, on a $u_n \leq u_{n+1}$.
- **décroissante** si pour tout entier n, on a $u_n \geq u_{n+1}$.
- **constante** si pour tout entier n, on a $u_n = u_{n+1}$.

Une suite est dite **monotone** si elle est soit croissante, soit décroissante, soit constante.

Propriété 8.6. *Soit (u_n) une suite.*

- *Si* (u_n) *est croissante, alors pour tous entiers* m, n, $m \leq n$ *implique* $u_n \leq u_m$.
- *Si* (u_n) *est décroissante, alors pour tous entiers* m, n, $m \leq n$ *implique* $u_n \geq u_m$.

Propriété 8.7. *Soit* (u_n) *une suite arithmétique de raison* r *et de terme initial* u_0. *Notons que pour tout entier* n, $u_{n+1} - u_n$ *est égale à la raison* r.

1. *Si* $r > 0$, *alors pour tout* n : $u_n < u_{n+1}$ *et la suite est strictement croissante.*
2. *Si* $r = 0$, *alors pour tout* n : $u_n = u_{n+1} = u_{n+2} = \dots$ *et la suite est constante.*
3. *Si* $r < 0$, *alors pour tout* n : $u_n > u_{n+1}$ *et la suite est strictement décroissante.*

Propriété 8.8. *Soit* (u_n) *une suite géométrique de raison* q *et de terme initial* u_0 *positif. Notons que pour tout entier* n, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *est égale à la raison* q.

1. *Si* $q > 1$, *alors pour tout* n : $u_n < u_{n+1}$ *et la suite est strictement croissante.*
2. *Si* $q = 1$, *alors pour tout* n : $u_n = u_{n+1} = u_{n+2} = \dots$ *et la suite est constante.*
3. *Si* $q < 1$, *alors pour tout* n : $u_n > u_{n+1}$ *et la suite est strictement décroissante.*

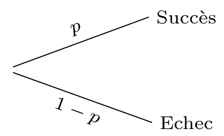
9 Schéma de Bernoulli, loi binomiale (2,5S)

9.1 Expérience de Bernoulli

Définition 9.1. Soit $0 < p < 1$ un nombre réel. On considère l'expérience aléatoire qui comporte deux issues :

- S : le succès avec une probabilité p
- $\bar{S}$: l'échec (avec une probabilité $1 - p$)

Une telle expérience aléatoire est appelée une **expérience de Bernoulli** de paramètre p.



Exemples.

1. Le jet d'une pièce équilibré avec succès lorsqu'on obtient pile est une expérience de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
2. On tire au hasard une boule dans une urne avec a boules rouges et b boules bleues. On considère comme succès le fait de tirer une boule rouge. La probabilité de succès est $\frac{a}{a+b}$. Ainsi, cette expérience est une expérience de Bernoulli de paramètre $\frac{a}{a+b}$.

Définition 9.2. Soit $p \in [0;\ 1]$. Une variable aléatoire X suit une **loi de Bernoulli** de paramètre p lorsque sa loi correspond à une expérience de Bernoulli :

k	0	1
$\mathbb{P}(X = k)$	$1 - p$	p

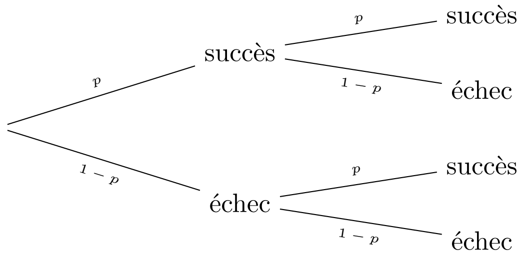
Propriété 9.3. *On considère une expérience de Bernoulli de paramètre p et X la variable aléatoire qui vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec. Alors la variable aléatoire X est :*

- *d'espérance $\mathbb{E}(X) = p$;*
- *de variance $V(X) = p(1 - p)$.*

9.2 Schéma de Bernoulli

Définition 9.4. On appelle **schéma de n épreuves de Bernoulli** de paramètre p, toute expérience aléatoire consistant à répéter n fois de façon indépendante une même épreuve de Bernoulli de paramètre p.

Exemple. Voici l'arbre pondéré de probabilités associé à un schéma de deux épreuves de Bernoulli.

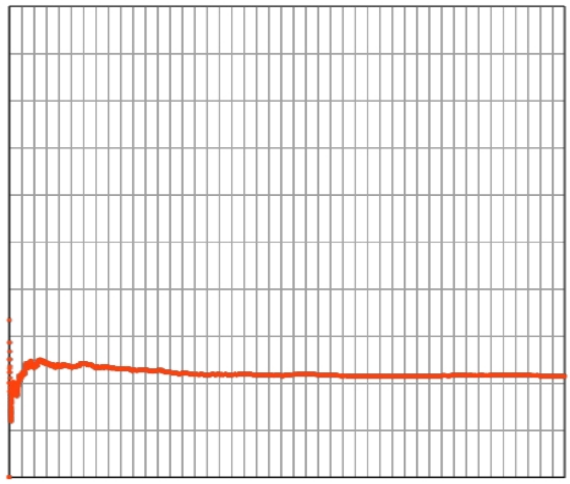


Exercice 4. On tire au hasard une boule dans une urne avec a boules rouges et b boules bleues, on la remet et on en tire une deuxième. Représenter un arbre avec toutes les issues. On pourra le comparer avec l'exemple précédent. Quel est la probabilité de tirer une boule rouge et ensuite une boule bleue ?

Voici un algorithme qui modélise la situation proposé dans l'exercice précédent avec $p = \frac{a}{a+b} = \frac{3}{10}$: (On note A l'évènement "on tire une boule rouge et ensuite une boule bleue").

```
VARIABLES
  X EST_DU_TYPE NOMBRE  // Représente le résultat du premier tirage
  Y EST_DU_TYPE NOMBRE  // Représente le résultat du second tirage
  i EST_DU_TYPE NOMBRE  // variable muette
  n EST_DU_TYPE NOMBRE  // nombre de fois qu'on reproduit l'expérience
  c EST_DU_TYPE NOMBRE  // compte le nombre de fois où l'évènement A s'est produit
  f EST_DU_TYPE NOMBRE  // fréquence de l'évènement A
  p EST_DU_TYPE NOMBRE  // paramètre de l'expérience de Bernoulli (ici p = a / (a+b) )
DEBUT_ALGORITHME
  c PREND_LA_VALEUR 0
  n PREND_LA_VALEUR 10000 // On va itérer 10000 fois l'expérience
  p PREND_LA_VALEUR 0.3
  POUR i ALLANT_DE 1 A n
    DEBUT_POUR
    X PREND_LA_VALEUR random()
    Y PREND_LA_VALEUR random()
    SI (X <= p et Y > p) ALORS  // Si on tire une boule rouge et ensuite une boule bleue
      DEBUT_SI
      c PREND_LA_VALEUR c + 1  // on incrémente le compteur c de 1
      FIN_SI
    f PREND_LA_VALEUR c / i    // on met à jour la fréquence
    TRACER_POINT (i,f)  // on place un point sur le graphique
    FIN_POUR
  AFFICHER "fréquence: "    // Affichage de la fréquence finale:
  AFFICHER f
  f PREND_LA_VALEUR p * (1-p)
  AFFICHER " =?= "
  AFFICHER f
FIN_ALGORITHME
```

Voici le graphe, de la fréquence en fonction du nombre de fois qu'on a répété l'expérience, tracé par algobox :



Xmin: 0 ; Xmax: 10000 ; Ymin: 0 ; Ymax: 1 ; GradX: 222 ; GradY: 0.1

Sur le graphique précédent, on note que la fréquence de l'issue un succès lors de la première expérience de Bernoulli et un échec lors de la seconde expérience se rapproche au fur et à mesure de $p(1-p) = \frac{3\times 7}{100} = 0,21$.

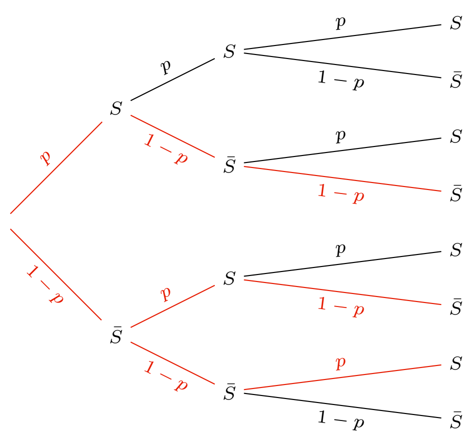
Généralisation : Soit $0 < p < 1$, on considère n expériences de Bernoulli et pour i allant de 1 à n, on définit X_i la variable aléatoire égale à 1 si lors de la i-ème expérience on a un succès et 0 si on a un échec. Soient $r_1, \dots, r_n$ n nombres égaux à 0 ou 1, supposons qu'il en a exactement m égaux à 1 (les $n-m$ autres sont égaux à 0) alors

$$\mathbb{P}(X_1 = r_1 \text{ et } \dots \text{ et } X_n = r_n) = \mathbb{P}(X_1 = r_1)\mathbb{P}(X_2 = r_2)\dots\mathbb{P}(X_n = r_n) = p^m(1-p)^{n-m}$$

Définition 9.5. On considère un schéma de n épreuves de Bernoulli, où n est non nul, représenté par un arbre pondéré de probabilités.
Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, on note $\binom{n}{k}$ le nombre de chemins de l'arbre réalisant k succès lors des n répétitions.
Par convention, on pose $\binom{0}{0} = 1$.

Exemples :

- $\binom{1}{1} = 1$;
- $\binom{2}{1} = 2$;
- $\binom{2}{0} = 0$;
- $\binom{3}{1} = 3$;



Propriété 9.6. *Pour tout entier* $n \geq 0$, $\binom{n}{0} = 1$ *et* $\binom{n}{n} = 1$.

Dans un shéma de n épreuves de Bernoulli, compter les issues avec k succès ou celles avec $n-k$ échecs revient au même. D'où,

Propriété 9.7. *Pour tous entiers naturels n et k tels que $0 \leq k \leq n$, on a* $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Propriété 9.8 (Relation de Pascal)**.** *Pour tous entiers naturels n et k tels que $1 \leq k < n$, on a*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Définition 9.9. Le triangle de Pascal :

$\binom{n}{k}$	0	1	2	3	4	5	6	7	$k-1$	k
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15 +	20 =	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
$n-1$	$\vdots$								$\binom{n-1}{k-1}$ +	$\binom{n-1}{k}$ =
n	$\vdots$									$\binom{n}{k}$

Propriété 9.10. *Dans un schéma de n épreuves de Bernoulli de paramètre p, la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès a pour loi de probabilité :*

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

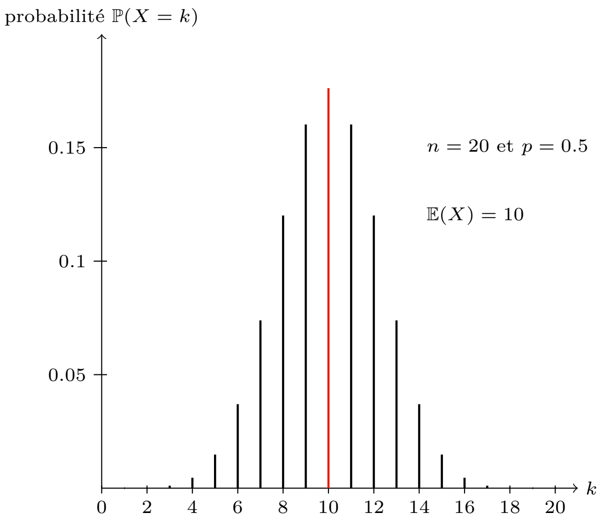
où k prend les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1, n$.
De plus,

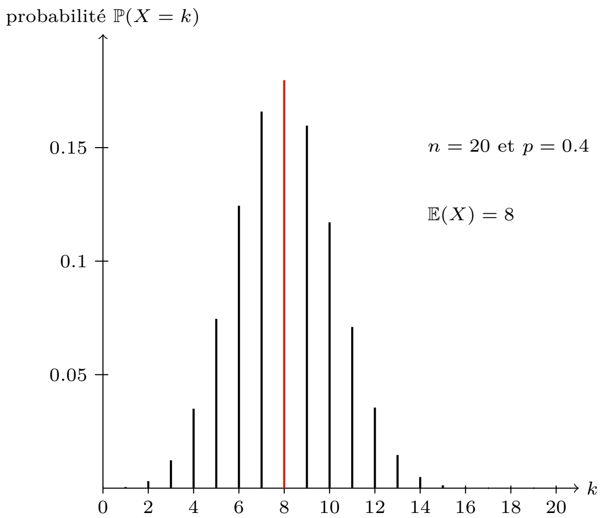
- *Son espérance est $\mathbb{E}(X) = np$;*

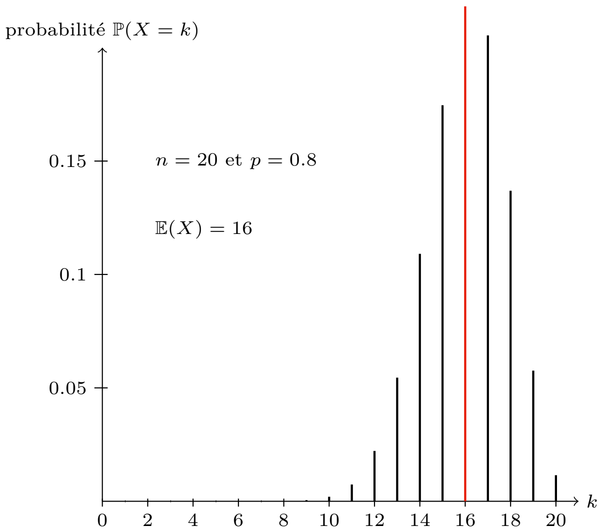
- *Sa variance est* $V(X) = np(1-p)$ *et son écart type* $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

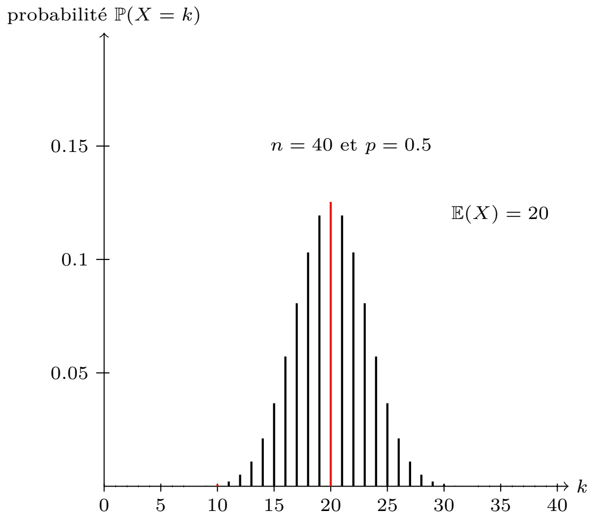
On dit que X *suit une* **loi binomiale de paramètres** n **et** p *notée* $\mathcal{B}(n;\ p)$.

Exemples. Voici quelques exemples de répartition des probabilités $\mathbb{P}(X = k)$ lorsque X suit une loi binomiale.









Remarque. La probabilité maximale $\mathbb{P}(X = k)$ est atteinte pour le plus petit entier k supérieur ou égal à $\mathbb{E}(X) = n\,p$.

Définition 9.11 (Utilisation de la calculatrice)**.** Soit X une variable aléatoire qui suit une **loi binomiale** de paramètres n et p, alors

1. Avec une casio :
   - pour calculer $P(X = k)$, on utilise la commande : `Bpd(k,n,p)` ;
   - pour calculer $P(X \leq k)$, on utilise la commande : `Bcd(k,n,p)` ;
2. Avec une TI :
   - pour calculer $P(X = k)$, on utilise la commande : `Bpd(n,p,k)` ;
   - pour calculer $P(X \leq k)$, on utilise la commande : `Bcd(n,p,k)` ;

Remarque.

- On portera une attention particulière à l'ordre des paramètres suivant le modèle de calculatrice !
- L'abréviation **Bpd** signifie en Anglais : Binomial Probability Distribution et **Bcd** signifie : Binomial Cumulative Probability.

10 Fonction dérivée et opérations sur les fonctions (2S)

10.1 Dérivée des fonctions de référence

Définition 10.1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I, on dit que f est **dérivable sur I** si elle est dérivable en tout réel a de I.

Propriété 10.2.

f est dérivable sur :	$f(x) =$	$f'(x) =$
$\mathbb{R}$	*c (constante)*	*0*
	x	*1*
	x^2	$2x$
	x^3	$3x^2$
Soit n un entier relatif $\mathbb{R}$ *ou* $]-\infty;0[$ *ou* $]0;+\infty[$	x^n	nx^{n-1}
$]-\infty;0[$ *ou* $]0;+\infty[$	$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$
$]0;+\infty[$	$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

10.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Propriété 10.3.

u et v des fonctions définies et dérivables sur I.	*Si $f(x)$ s'écrit*	*alors f est dérivable sur I et $f'(x)$ est égal à*
Somme $u+v$	$f(x) = u(x) + v(x)$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
Différence $u-v$	$f(x) = u(x) - v(x)$	$f'(x) = u'(x) - v'(x)$
Produit de u par un une constante c $c\,u$	$f(x) = c\,u(x)$	$f'(x) = c\,u'(x)$

En d'autres termes, la dérivée de la somme (ou de la différence) de deux deux fonctions dérivables est tout simplement égale à la somme (resp. la différence) des dérivées. De même, la dérivée d'une fonction multipliée par une constante c est égale à la constante fois la dérivée de la fonction. Formellement, on a

$$\begin{aligned} (u+v)' &= u'+v' \\ (u-v)' &= u'-v' \\ (c\,u)' &= c\,u' \end{aligned}$$

Démonstration. . . . □

Exemples.

- $f(x) = x^2 + 2x + 3$: $f'(x) = 2x + 2$.
- $f(x) = -4x^3 + 123x^2 + 678678x$: $f'(x) = -12x^2 + 246x + 678678$.
- $f(x) = \frac{3}{x} + \sqrt{4x}$: On note au préalable que $\sqrt{4x} = \sqrt{4}\sqrt{x} = 2\sqrt{x}$, d'où $f'(x) = \frac{-3}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Produit, inverse et quotient

Propriété 10.4. *Soient $u, v : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I alors,*

1. *la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = u(x) \times v(x)$ est dérivable et on a*

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

2. *Si de plus la fonction v ne s'annulle pas sur I, alors*
   a) *la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{v(x)}$ est dérivable et on a*

$$f'(x) = \frac{-v'(x)}{[v(x)]^2}$$

   b) *la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ est dérivable et on a*

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Remarque. Formellement, à nouveau, les identités précédentes sur les dérivées peuvent être écrites de la manière suivante :

$$\begin{aligned} (uv)' &= u'v + uv' \\ \left(\frac{1}{v}\right)' &= \frac{-v'}{v^2} \\ \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \end{aligned}$$

On note que la troisième formule se déduit des deux précédentes :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u \times \frac{1}{v}\right)' = u' \times \frac{1}{v} + u \times \frac{-v'}{v^2} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Démonstration. . . . □

11 Échantillonnage (1,5S)

Définition 11.1. Un **échantillon** de taille n est obtenu en prélevant au hasard, *successivement et avec remise*, n éléments d'une population.

Remarque. Un exemple d'utilisation d'un échantillon est lors d'un sondage. La propriété de "remise" signifie qu'on s'autorise à interroger plusieurs fois la même personne. Ce fait permet de garantir l'indépendance entre les résultats des différents « prélevements ». Ainsi, la loi de la variable aléatoire correpondant à l'effectif des éléments ayant le caractère suit une loi bien connue :

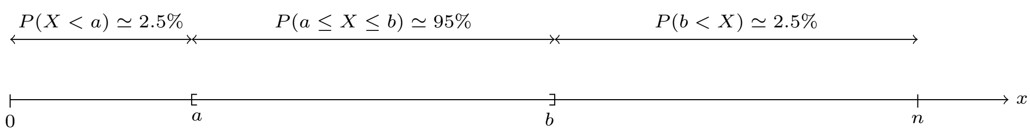
Propriété 11.2. *Soit une population dont une proportion p des éléments admet un caractère donné. Dans un échantillon de taille n prélevé dans cette population, l'effectif des éléments qui présentent ce caractère est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p.*

Définition 11.3. Soit X la loi binomiale qui correspond à la réalisation d'un échantillon de taille n dans une population ayant une proportion p d'éléments avec un caractère donné.
L'**intervalle de fluctuation** au seuil 95% de la fréquence observée est l'intervalle

$$\left[\frac{a}{b};\quad \frac{b}{n}\right]$$

où a est le plus entier tel que $P(X \leq a) > 0.025$ et b est le plus petit entier tel que $P(X \leq b) \geq 0.975$.

Exemple. Lorsqu'on prélève un échantillon de taille n, il y a 95% de chance que la fréquence observée $f = \frac{X}{n}$ appartienne à l'intervalle de fluctuation $[\frac{a}{n};\ \frac{b}{n}]$:



Propriété 11.4. *Pour un échantillon de grande taille ($n \geq 30$) ayant une proportion du caractère p comprise entre 0.2 et 0.8, l'intervalle :*

$$[p - \frac{1}{\sqrt{n}};\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}]$$

est une bonne approximation de l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence observée f du caractère.

Propriété 11.5. *On considère une population dans laquelle on* **suppose** *que la proportion d'un caractère est p.*
On **observe** *f la fréquence de ce caractère dans un échantillon (une portion de la population) de taille n.*
Soit l'hypothèse : "la proportion de ce caractère dans la population est p".
*Soit $I = [p - \frac{1}{\sqrt{n}};\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ l'intervalle de fluctuation de la fréquence à 95% dans les échantillons de taille n, alors l'***algorithme de décision** *est le suivant :*

- *Si la fréquence f de l'échantillon est l'intervalle I alors on accepte l'hypothèse que p soit la fréquence de ce caractère dans la population entière.*

- *Si la fréquence f de l'échantillon n'est pas l'intervalle I alors on rejette l'hypothèse, p n'est pas la fréquence de ce caractère dans la population entière.*

Exercice 5 (exercice 65 page 253)**.** Un graphologue prétend être capable de déterminer le sexe d'une personne d'après son écriture dans 90% des cas.
Lisa, qui en doute, lui soumet 20 exemples d'écriture. Elle reconnaîtra sa compétence s'il réussit au moins 90% des identifications du sexe, soit au moins 18 sur les 20. Dans le cas contraire, elle le considérera comme menteur.

1. Quelle est la probabilité :
   a) que Lisa accepte l'affirmation du graphologue alors qu'il s'est prononcé 20 fois au hasard ?
   b) que Lisa rejette l'affirmation alors qu'elle est totalement fondée ? Quel inconvénient présente le test de Lisa ?
2. Sur quel nombre N (minimal) d'identifications réussies Lisa aurait-elle pu se fixer pour être en mesure de rejeter l'affirmation du graphologue avec un risque de se tromper inférieur à 4% ? Quel conseil pouvez-vous donner à Lisa pour que son test prenne en compte le hasard ?

Exercice 1. Un graphologue prétend être capable de déterminer le sexe d'une personne d'après son écriture dans 90% des cas.
Lisa, qui en doute, lui soumet 20 exemples d'écriture. Elle reconnaîtra sa compétence s'il réussit au moins 90% des identifications du sexe, soit au moins 18 sur les 20. Dans le cas contraire, elle le considérera comme menteur.

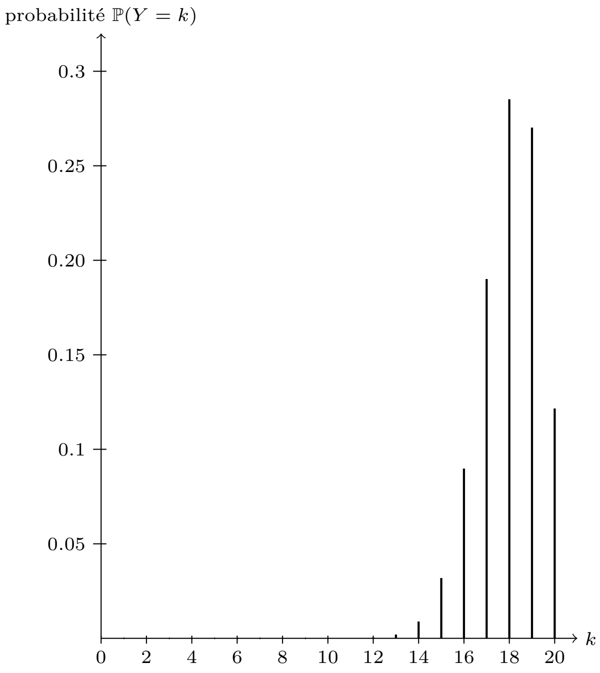
1. a) Supposons que le graphologue réponde au hasard et indépendamment pour chacun des 20 textes. Notons X le nombre réponses justes. Alors par hypothèse, la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0.5$. Lisa accepte l'affirmation du graphologue lorsqu'il répond correctement au moins 18 fois, c'est-à-dire lorsque l'événement $X \geq 18$ se réalise. Or,

$$\mathbb{P}(X \geq 18) = \mathbb{P}(X = 18) + \mathbb{P}(X = 19) + \mathbb{P}(X = 20)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq 18) &= \mathbb{P}(X = 18) + \mathbb{P}(X = 19) + \mathbb{P}(X = 20) \\
&= \binom{20}{18}(\frac{1}{2})^{18}(\frac{1}{2})^{2} + \binom{20}{19}(\frac{1}{2})^{19}(\frac{1}{2}) + \binom{20}{20}(\frac{1}{2})^{20} \\
&= \left(\binom{20}{18} + \binom{20}{19} + 1\right)\frac{1}{2^{20}} \\
&= \frac{190 + 20 + 1}{2^{20}} \\
&= \frac{211}{1\,048\,576} \\
&\simeq 2 \times 10^{-4}
\end{aligned}$$

D'où, la probabilité que Lisa accepte l'affirmation du graphologue est de 0,02%.
Remarque : On aurait aussi pu calculer $\mathbb{P}(X \geq 18) = 1 - \mathbb{P}(X < 18) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 17)$ en utilisant la commande Binomial Cumulative Distribution de la calculatrice.

   b) On suppose maintenant que le graphologue dit vrai. On note Y la variable aléatoire correspondant au nombre de réponses justes. Encore une fois, Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0.9$.
Lisa rejette l'affirmation lorsque l'événement $Y < 18$ se produit et $\mathbb{P}(Y < 18) = \mathbb{P}(Y \leq 17) \simeq 0.32 = 32\%$ à l'aide la calculatrice. Ainsi, si le graphologue dit vrai, la probabilité que Lisa rejette son affirmation après l'expertise des 20 exemples d'écriture est de 32%. Cette probabilité est conséquente ! Il y a presque une chance sur trois de rejette l'hypothèse qui est vraie.
L'inconvénient de la méthode de Lisa est de ne pas assez prendre en compte la fluctuation du nombre de bonnes réponses.



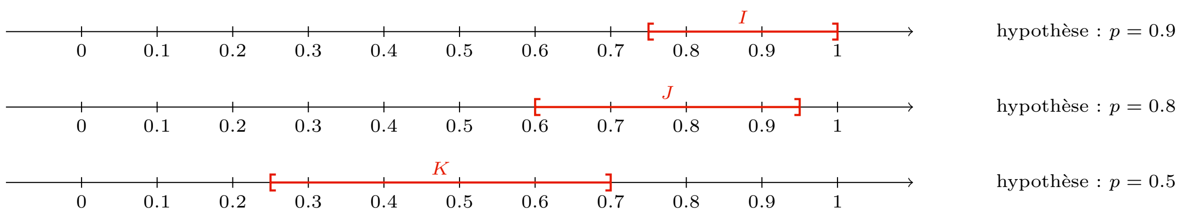
Le graphologue pourrait très bien réussir moins de 18 fois sur les 20.

2. À l'aide d'une table, on note que $\mathbb{P}(Y \leq 15) \simeq 3.19\%$ et $\mathbb{P}(Y \leq 16) \simeq 8.98\%$. Ainsi, le nombre minimal d'identifications réussies que Lisa devrait se fixer pour être en mesure de rejeter l'affirmation du graphologue avec un risque de se tromper inférieur à 4% est $N = 15$.
Lisa peut modifier son test en acceptant l'affirmation lorsque le graphologue réussi plus de 15 fois sur les 20.

Remarque :
Déterminons les intervalles de fluctuation sous les hypothèses $p = 0.9$, $p = 0.8$ et $p = 0.5$ associés à un échantillon de taille 20 :

- Sous l'hypothèse $p = 0.9$, l'intervalle de fluctuation au seuil 95% pour un échantillon de taille 20 est $I = [\frac{15}{20}; 1] = [0.75; 1]$.
- Sous l'hypothèse $p = 0.8$, l'intervalle de fluctuation au seuil 95% pour un échantillon de taille 20 est $J = [\frac{12}{20}; \frac{19}{20}] = [0.6; 0.95]$.
- Sous l'hypothèse $p = 5$, l'intervalle de fluctuation associé est $K = [\frac{5}{20}; \frac{14}{20}] = [0.25; 0.7]$.

Voici une illustration graphique des trois intervalles :



On note que la différence entre les deux intervalles de fluctuation I et J est relativement faible, en d'autres termes l'intervalle intersection $I \cap J = [0.75; 0.95]$ est relativement conséquence. D'autre part, avec un échantillon de taille 20, si la fréquence tombe dans l'intervalle $I \cap J$, on ne peut ni rejeter l'hypothèse $p = 0.8$ ni l'hypothèse $p = 0.9$ avec un risque de 5% d'erreur. Par contre, l'intervalle K est disjoint de l'intervalle I. Sur un échantillon de taille 20, on peut discriminer l'hypothèse $p = 0.9$ ou $p = 0.5$ ou les deux avec un risque de 5% d'erreur.

Si on voulait faire de même, avec les hypothèses $p = 0.9$ et $p = 0.8$, il suffit d'augmenter la taille de l'échantillon pour que les intervalles de fluctuation I et J soient disjoints. D'après l'avant dernière propriété, si $n \geq 30$, alors

$$J = [0.8 - \frac{1}{\sqrt{n}}; 0.8 + \frac{1}{\sqrt{n}}] \qquad \text{et} \qquad I = [0.9 - \frac{1}{\sqrt{n}}; 0.9 + \frac{1}{\sqrt{n}}]$$

On note que I et J sont disjoints si et seulement si $0.8 + \frac{1}{\sqrt{n}} < 0.9 - \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\frac{2}{\sqrt{n}} < 0.9 - 0.8 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2 < 0.1\sqrt{n} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 20 < \sqrt{n}$$

C'est-à-dire, en élevant au carré, comme n est positif, $20^2 = 400 < n$.
Donc, pour discriminer au moins une des deux hypothèses $p = 0.9$ ou $p = 0.8$ avec un risque de 5% d'erreur environ, il faut considérer un échantillon de taille supérieur à 400.