Cours de spécialité mathématiques en Terminale ES

O. Lader

2014/2015

Deux exemples de systèmes linéaires à deux équations et deux variables :

$$\begin{cases} x + 3y & = 4 \\ 3x + y & = 6 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} 2a + 3b & = 1 \\ 3a - b & = -4 \end{cases}$$

Les résoudre.

Définition

Un **système linéaire** à deux inconnus et deux équations est de la forme suivante :

$$\begin{cases} ax + by & = c \\ a'x + b'y & = c' \end{cases}$$

où a, b, c, a', b' et c' sont des nombres réels fixés (des paramètres).

Un exemple de système à trois équations et trois inconnus :

$$\begin{cases} x - y + 3z &= 0 \\ x + y + 3z &= 0 \\ y + z &= 0 \end{cases}$$

Définition

Un **système linéaire** à trois équations et trois inconnus est de la forme suivante :

$$\begin{cases} a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13}\,z &= b_1 \\ a_{21}\,x + a_{22}\,y + a_{23}\,z &= b_2 \\ a_{31}\,x + a_{32}\,y + a_{33}\,z &= b_3 \end{cases}$$

où les a_{ij} et les b_i sont des nombres fixés.

Remarque

En toute généralité, on peut définir les **systèmes linéaires** à m équations et n inconnus.

La résolution des tels systèmes est assez fastidieuse comme on vient de le voir. Pour nous faciliter la tâche, nous allons utiliser un nouvel outil : les matrices.

Définition

Une **matrice** de dimension $n \times p$ est un tableau de nombres réels à n lignes et p colonnes :

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & & \dots & a_{2p} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & & \dots & a_{3p} \\
\vdots & & & & & & \vdots \\
a_{i1} & & & & \color{red}{a_{ij}} & & \vdots \\
\vdots & & & & & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & & \dots & a_{np}
\end{pmatrix}$$

On notera que le coefficient a_{ij} se trouve sur la i-ème ligne et la j-ème colonne [a].

a. Pour se souvenir qu'on prend d'abord en compte les lignes et ensuite les colonnes, on peut utiliser comme moyen mnémotechnique le terme "Lycos", qui dans la mythologie grecque est un fils de Poseidon.

Définition

Une matrice à une seule ligne est une **matrice ligne**.
Une matrice à une seule colonne est une **matrice colonne**.
Lorsque $n = p$, donc que le tableau est carré, alors la matrice est une **matrice carrée** de taille n.

Exemples

1. $M = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 101 \\ 11.3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$, matrice de taille 2×3 ;
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, matrice carrée de taille 2 ;
3. $B = \begin{pmatrix} -1 & 10 & 505 \\ 3 & 534 & 234 \\ 0 & -1 & 1001 \end{pmatrix}$, matrice carrée de taille 3 ;
4. $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, matrice colonne.

Définition

Dire que deux matrices sont égales signifie qu'elles ont le même format et les nombres qui occupent la même position sont deux à deux égaux.

Opération sur les matrices

Définition

Soit A et B deux matrices de même taille $n \times p$. La somme (resp. différence) de A et B la matrice, notée $A+B$ (resp. $A-B$), obtenue en additionnant (resp. en soustrayant) deux à deux chaque coefficients qui occupent la même position.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$. Alors

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 13 \end{pmatrix}$$

et

$$A-B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-5 & 2-6 \\ 3-7 & 4-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$$

Définition

Soit A une matrice de taille $n \times p$ et k un nombre réel. La matrice kA est la matrice obtenue en multipliant chaque coefficient de A par le nombre k.

L'opération la plus subtile sur les matrices est le produit. Quelques exemples et cas particuliers de produit de matrices :

1. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 2 + 1 \times 3 \\ 7 \times 2 + 9 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 41 \end{pmatrix}$;
2. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \times x + b \times y \\ c \times x + d \times y \end{pmatrix}$;
3. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \times x + b \times y & a \times z + b \times t \\ c \times x + d \times y & c \times z + d \times t \end{pmatrix}$;
4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2b + 3c \\ 4a + 5b + 6c \\ 7a + 8b + 9c \end{pmatrix}$

1 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 & 12 & 14 \\ -1 & -2 & -3 \\ 44 & 47 & 33 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1\times10+2\times(-1)+3\times44 & 1\times12+2\times(-2)+3\times47 & 1\times14+2\times(-3)+3\times33 \\ 4\times10+5\times(-1)+6\times44 & 4\times12+5\times(-2)+6\times47 & 4\times14+5\times(-3)+6\times33 \\ 7\times10+8\times(-1)+9\times44 & 7\times12+8\times(-2)+9\times47 & 7\times14+8\times(-3)+9\times33 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 140 & 149 & 107 \\ 299 & 320 & 239 \\ 458 & 491 & 371 \end{pmatrix}.$$

Définition

En toute généralité, on peut [a] calculer le produit d'une matrice A de taille $n \times p$ avec une matrice B de taille $p \times q$. L'élément sur la i-ème ligne et la j-ème colonne de $A \times B$ est obtenue en faisant la somme des biproduits des éléments de la i-ème ligne de A en allant de la gauche vers la droite avec les éléments de la j-ème colonne de B en allant du haut vers le bas.

a. On notera que pour calculer le produit $A \times B$, il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B.

Nous allons définir deux matrices particulières :

Définition

La matrice nulle de taille $n \times p$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls.

Par exemple la matrice nulle de taille 2×1 est $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On peut vérifier qu'on a : $A \times I = A$ et $I \times A = A$.

Définition

La **matrice identité** (ou unité) I_n de taille n est la matrice carré de taille n qui contient des 1 sur la première diagonale et des zéros ailleurs.

Un exemple, la matrice identité de taille 3 est $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Propriété

Pour toute matrice carrée A de taille n, on a

$$A \times I_n = A \qquad \textit{et} \qquad I_n \times A = A$$

où I_n est la matrice identité de taille n.

Remarque

Attention ! Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.On note que

$$A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, **avec les matrices,** $A \times B \neq B \times A$.

Définition (et propriété)

Soit A une matrice carré d'ordre n. Lorsqu'il existe une matrice A' carrée d'ordre n telle que $A' \times A = I_n$ ou $A \times A' = I_n$, on dit que la matrice A est **inversible** et on note $A' = A^{-1}$.

On admet que lorsque l'inverse A^{-1} existe, on a $A \times A^{-1} = I_n = A^{-1} \times A$.

Faisons maintenant le lien avec les systèmes linéaires.

Exemple

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 18 \end{pmatrix}$.

Notons que,

$$A \times X = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 4x + 7y \end{pmatrix}$$

Ainsi, l'**égalité matricielle** $A \times X = B$ équivaut au **système linéaire** :

$$\begin{cases} 2x + 3y & = 5 \\ 4x + 7y & = 18 \end{cases}$$

Si l'on résout le système, on note que les solutions sont $x = 1$ et $y = 2$, c'est-à-dire $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Or, on peut vérifier que

$$X = A^{-1} \times B$$

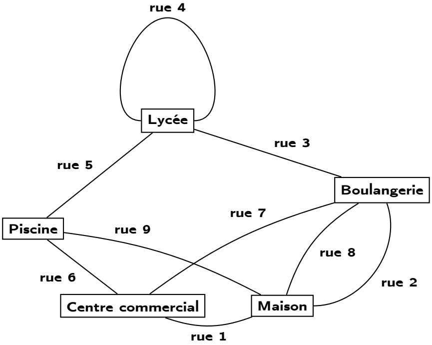
Propriété

Soit A une matrice carrée qui admet une matrice inverse A^{-1}. Le système d'équations linéaires correspondant à $A \times X = B$ admet pour unique solution $X = A^{-1} \times B$.

Exercice

`Activité 3 page 277`

Un exemple de graphe :



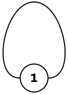
Définition

Un **graphe** est la donnée d'un ensemble de *sommets* et d'un ensemble d'*arêtes* qui relient deux sommets.

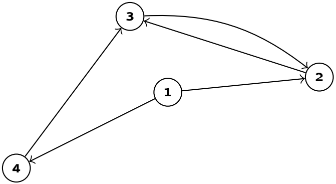
Quelques vocabulaires supplémentaires :

Définition

- L'**ordre** du graphe est le nombre de ses sommets.
- Une **boucle** est une arête reliant un sommet à lui-même.



- Deux sommets reliés par une arête sont dits **adjacents**.
- Un graphe **simple** est un graphe sans boucle et tel qu'entre deux sommets, il y a *au plus une* arête.
- Un **graphe orienté** est un graphe tel que *ses arêtes ont un sens de parcours*. On parle aussi d'*arcs* au lieu d'arêtes dans un graphe orienté.



- Un **graphe complet** est un graphe dont tous les sommets sont reliés deux à deux par une unique arête.

Définition

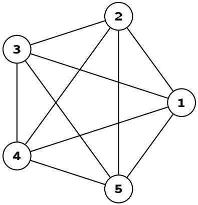
Le **degré** d'un sommet est égal au *nombre d'arêtes* issues de ce sommet.

Propriété

La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale au double du nombre total d'arêtes.

Remarque

Dans un graphe complet d'ordre n (avec n sommets), le degré d'un sommet est égal à $n - 1$.
Voici le graphe complet d'ordre 5 :



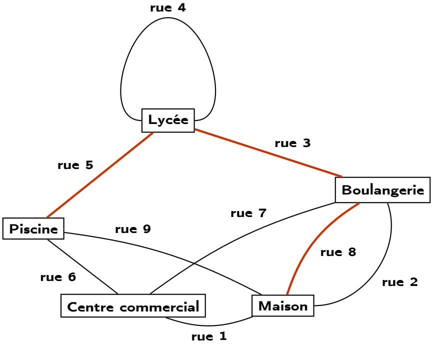
Exercice

Exercices 40, 42, 46, 50 pages 282-283

Définition

Dans un graphe, une **chaîne** (ou un chemin) est une suite d'arêtes mise bout à bout. La **longueur d'une chaîne** est le nombre d'arêtes constituant la chaîne.
Dans le cas, où les arêtes ont été prises *une seule fois* et que les *extrémités coïncident*, la chaîne est un **cycle**.

Dans une chaîne, on peut prendre plusieurs fois la même arête. Un exemple de chaîne :



La chaîne est représentée en rouge.

Définition

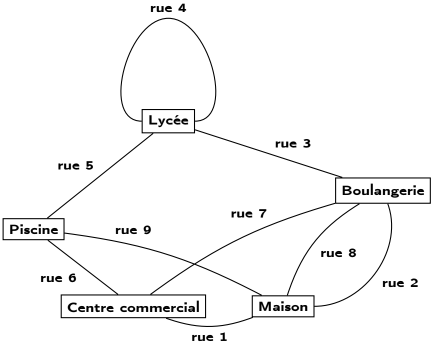
Un graphe est **connexe** lorsque, pour chaque paire de sommets, il *existe au moins une chaîne* reliant les deux sommets.

En d'autres termes, lorsque un graphe est connexe, il est "d'un seul tenant".

Définition

Une **chaîne Eulérienne** est une chaîne composée de toutes les arêtes du graphe, chacune prise **une** seule fois.
Si, de plus, la chaîne revient à son sommet d'origine, la chaîne Eulérienne est un **cycle Eulérien**.

Une chaîne eulérienne est une chaîne qui permet de parcourir toutes les arêtes du graphe sans faire de demi-tour (c'est-à-dire, reprendre une arête déjà parcouru).



Exemple

Le graphe donné en introduction de ce chapitre admet une chaîne Eulérienne. La voici
Maison - Boulangerie - Lycée - Lycée - Piscine - Centre commercial - Boulangerie - Maison - Piscine

Exercice

`Exercice 52 page 283`

Théorème (admis)

Un graphe admet **un cycle eulérien** *si, et seulement si, ce graphe est connexe et tous ses sommets sont de degré pair.*
Dans le cas d'un graphe connexe ayant seulement deux sommets A et B de degré impair, on obtient une chaîne eulérienne entre A et B.

Matrice d'adjacence

Nous allons faire un lien avec le chapitre précédent sur les matrices.

Définition

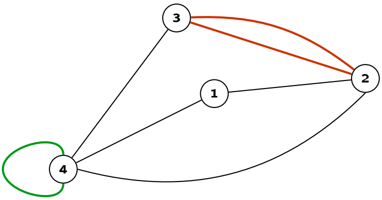
Soit G un graphe d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n. La **matrice d'adjacence** du graphe G est la matrice carrée A de taille n :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & & \dots & a_{2p} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & & \dots & a_{3p} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{i1} & & & & \color{red}{a_{ij}} & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

où $\color{red}{a_{ij}}$, le coefficient sur la i-ème ligne et j-ème colonne, est égal au nombre d'arêtes reliant les sommets i et j.
Lorsque i et j ne sont pas adjacents, alors $a_{ij} = 0$.
Si le graphe G est orienté, a_{ij} est le nombre d'arêtes allant du sommet i vers le sommet j.

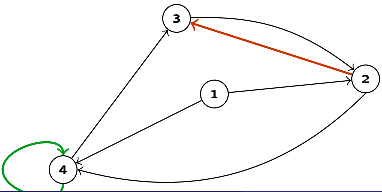
Exemples

1. La matrice d'adjacence du graphe :



est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. La matrice d'adjacence du graphe orienté :



est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarques

- Dans un graphe non orienté, la somme des termes d'une ligne (ou d'une colonne) de la matrice d'adjacence est égale au degré du sommet associé à la ligne (ou colonne).
- La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique par rapport à la première diagonale.
- La matrice composée de 1, sauf la diagonale composée de 0, est la matrice d'un *graphe complet*.
- Soit G un graphe orienté, alors la somme des éléments de la matrice d'adjacence est égale au nombre d'arêtes.

Exercice

`Exercices 55, 58 page 284`

Théorème

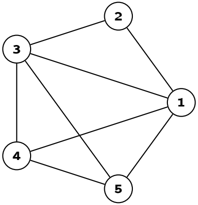
Soit G un graphe et A sa matrice d'adjacence et p un entier.
Soit $M = A^p$ la puissance p-ème de A :

$$A^p = \underbrace{A \times \ldots \times A}_{p \text{ fois}}$$

L'élément m_{ij} de la matrice A^p est **égal au nombre de chaînes de longueur** p **reliant le sommet** i **au sommet** j.

Exemple

Considérons le graphe suivant :



Sa matrice d'adjacence est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Combien y a-t-il de chemins de longueur 3 allant du sommet 1 au sommet 2 ?
Avec un peut de méthode, on peut voir qu'il y en a 7 en tout. Les voici :

1 - 2 - 1 - 2

1 - 2 - 3 - 2

1 - 3 - 1 - 2

1 - 4 - 1 - 2

1 - 4 - 3 - 2

1 - 5 - 1 - 2

1 - 5 - 3 - 2

On peut le vérifier à l'aide de la matrice d'adjacence :

$$A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 9 & 9 \\ 7 & 2 & 7 & 4 & 4 \\ 9 & 7 & 8 & 9 & 9 \\ 9 & 4 & 9 & 6 & 7 \\ 9 & 4 & 9 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

et le coefficient sur la première ligne et deuxième colonne est bien 7.

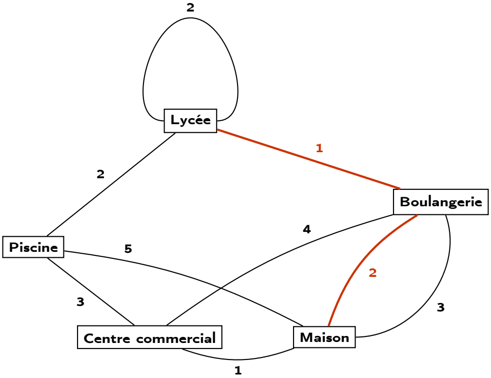
Exercice

Exercices 62, 66, 71, 73, 75 pages 284-287

Définition

Un graphe est dit **étiqueté** lorsque ses arêtes sont affectées d'étiquettes. Elles peuvent être des nombres, des symboles, des lettres, etc.

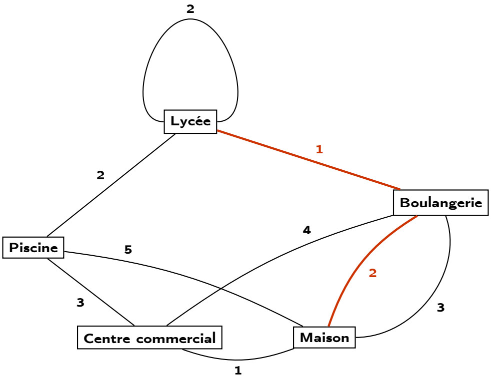
Au lieu d'indiquer les noms des rues sur une carte routière, on pourrait indiquer les distances(en km) :



Un tel graphe est un graphe pondéré.

Définition

- Un **graphe pondéré** est un graphe étiqueté dont les étiquettes sont des nombres positifs, appelé *poids* de cette arête.
- Le **poids d'une chaîne** d'un graphe pondéré est la somme des poids des arêtes qui la composent.
- Une **plus courte chaîne** (ou chemin) entre deux sommets est, parmi toutes les chaînes qui les relient, une chaîne de poids minimal.
  Le poids de cette plus courte chaîne définit la distance entre les deux sommets.

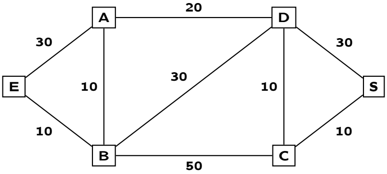


Exemple

Dans le graphe précédent, le plus court chemin de la maison au lycée est en rouge.

Attention ! On verra qu'une plus courte chaine ne passe pas nécessairement par le moins d'arêtes possibles. Il faut bien distinguer le poids d'une chaine (la somme des étiquettes) et sa longueur (le nombre d'arêtes parcourues)

Considérons le graphe pondéré suivant :



Quelle est le plus court chemin de l'entrée E à la sortie S ? Dans l'exemple précédent, on peut envisager de tester tous les chemins sans boucle de E à S mais la méthode la plus adaptée est d'appliquer l'algorithme de Dijkstra.

Définition

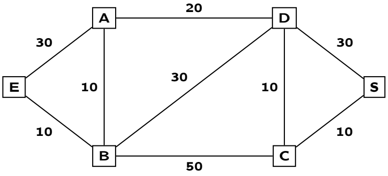
Algorithme de Dijkstra

Entrée : G un graphe pondéré connexe non orienté avec un sommet E (entrée) et un sommet S (sortie).
Initialisation :
  On affecte *définitivement* le poids 0 à l'entrée (début) E.
  On attribue *provisoirement* aux sommets adjacents à E le poids des arêtes qui le relient à E.
  On attribue *provisoirement* aux autres sommets du graphe le poids ∞.
Tant que' il y a des sommets avec un poids provisoire (et que le poids du sommet S est provisoire)
  Parmi les sommets de poids provisoire, choisir un des sommets de poids le plus faible. On le note T
  Attribuer à T son poids *définitivement*
  Pour tous les sommets T' voisin de T dont le poids est encore provisoire **faire**
    On pose p la somme du poids de T et du poids de l'arête de T à T'
    Si p $<$ poids de T' **alors**
      Remplacer le poids de T' par p
      Marquer "p (T)" au-dessus de l'arête T' pour marquer la provenance de cette dernière affectation et son nouveau poids.
    Fin si
  Fin pour
Fin tant que

Remarque

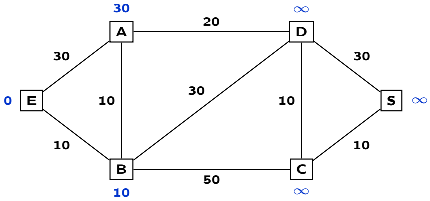
- Une page web avec une animation pour suivre pas à pas les étapes de l'algorithme : `http://yallouz.arie.free.fr/terminale_cours/graphes/dijkstra.php`
- L'algorithme a été trouvé par Edsger Wybe Dijkstra, mathématicien et informaticien

Appliquons l'algorithme de Dijkstra à l'exemple précédent :



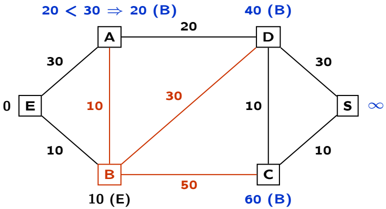
Appliquons l'algorithme de Dijkstra à l'exemple précédent :

- L'initialisation



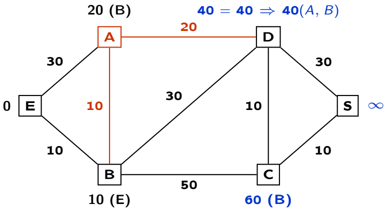
Appliquons l'algorithme de Dijkstra à l'exemple précédent :

- L'initialisation
- 1) On choisit l'arête de poids minimal : B



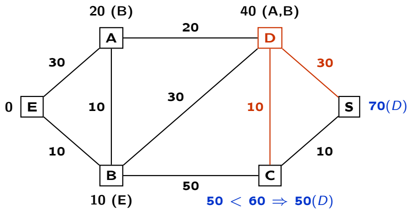
Appliquons l'algorithme de Dijkstra à l'exemple précédent :

- L'initialisation
- 1) On choisit l'arête de poids minimal : B
- 2) On choisit l'arête de poids minimal : A



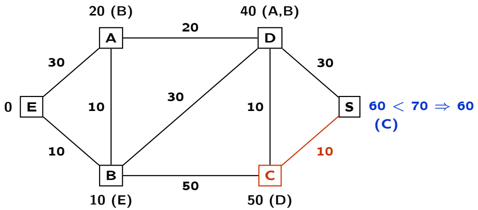
Appliquons l'algorithme de Dijkstra à l'exemple précédent :

- L'initialisation
- 1) On choisit l'arête de poids minimal : B
- 2) On choisit l'arête de poids minimal : A
- 3) On choisit l'arête de poids minimal : D



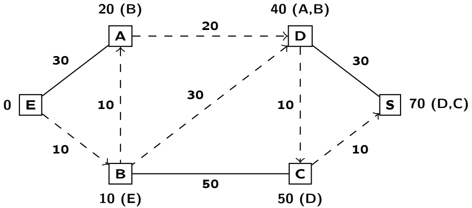
Appliquons l'algorithme de Dijkstra à l'exemple précédent :

- L'initialisation
- 1) On choisit l'arête de poids minimal : B
- 2) On choisit l'arête de poids minimal : A
- 3) On choisit l'arête de poids minimal : D
- 4) On choisit l'arête de poids minimal : C



Appliquons l'algorithme de Dijkstra à l'exemple précédent :

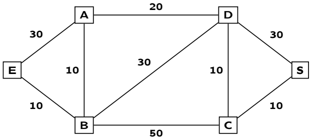
- L'initialisation
- 1) On choisit l'arête de poids minimal : B
- 2) On choisit l'arête de poids minimal : A
- 3) On choisit l'arête de poids minimal : D
- 4) On choisit l'arête de poids minimal : C
- On finit avec le sommet S.



On note qu'effectivement, le chemin le plus court du sommet E à S a pour poids 60 et il y a deux chemins possibles : $E - B - D - C - S$ ou $E - B - A - D - C - S$.

- Activité 3 page 289 question 4
- On considère le graphe connexe pondéré suivant :

Montrer que le chemin de poids minimal de A à H est $A - C - F - G - H$ de poids 12.



On peut aussi effectuer toutes les étapes de l'algorithme de Dijkstra sur un tableau comme suit :

Étape	E	A	B	C	D	S	Min
Initialisation	**0**	30 (E)	10 (E)	∞	∞	∞	B
Voisins de B	**0**	30 (B)	**10 (E)**	60 (B)	40 (B)	∞	A
Voisins de A	**0**	**30 (B)**	**10 (E)**	60 (B)	$40 < 40 \Rightarrow 40$ (B,A)	∞	D
Voisins de D	**0**	**30 (B)**	**10 (E)**	$50 < 60 \Rightarrow 50$ (D)	**40 (B,A)**	$70(D)$	C
Voisins de C	**0**	**30 (B)**	**10 (E)**	**50 (D)**	**40 (B,A)**	$60 < 70 \Rightarrow 60$ (C)	S
Le sommet S	**0**	**30 (B)**	**10 (E)**	**50 (D)**	**40 (B,A)**	**60 (C)**	

Remarque

Voici le lien vers une vidéo illustrant l'utilisation d'un tableau pour appliquer l'algorithme : `http://youtu.be/dS1Di2ZHl4k`
Quelques remarques sur la vidéo :

- les commentaires sont en anglais :
- "path" : chemin ;
- "node" : sommet ;
- "edge" : arête.
- Dans la colonne "unvisited", il répertorie les arêtes avec un poids provisoire et dans la colonne "visited", il répertorie les arêtes avec un poids définitif
- Avec la version de l'algorithme qu'on a vu précédemment, l'étape d'initialisation correspond dans la vidéo à l'étape d'initialisation plus l'étape "iteration 1".

Propriété

Si G est un graphe pondéré connexe et non orienté, l'algorithme de Dijkstra détermine une chaîne de poids minimal entre deux sommets du graphe.

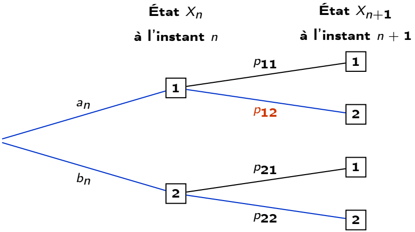
On va s'intéresser à l'évolution d'un système dans le temps qui peut prendre uniquement 2 états : 1 et 2.

- A l'instant 0, la probabilité que le système se trouve à l'état 1 est a_0 et la probabilité que le système se trouve à l'état 2 est b_0.
- A l'instant n, la probabilité que le système se trouve à l'état 1 est a_n et la probabilité que le système se trouve à l'état 2 est b_n.

Notons X_n l'état dans lequel se trouve le système à l'instant n. Alors, le précédent point se réécrit ainsi :

$$P(X_n = 1) = a_n \qquad \text{et} \qquad P(X_n = 2) = b_n$$

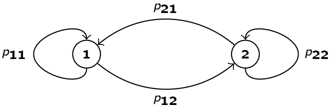
On suppose que l'état dans lequel le système va se trouver à l'instant $n+1$ (l'instant suivant) dépend uniquement de l'instant n. En d'autres termes, l'état futur du système est uniquement déterminé par son état présent. Un tel processus "sans mémoire" est appelé une **chaîne de Markov**.
Andreï Markov (1856-1922) était un mathématicien russe qui se spécialisa dans le calcul des probabilités dans les années 1900. Ses contributions dans se domaine ont été significative.
La précédente hypothèse peut être modélisée par un arbre :


État X_n
à l'instant n
État X_{n+1}
à l'instant $n+1$
a_n
b_n
1
2
p_{11}
p_{12}
p_{21}
p_{22}
1
2
1
2

Une autre représentation des probabilités de transition entre les états du système est possible par un arbre orienté pondéré :

Définition

Le graphe probabiliste du système à deux états est le graphe orienté et pondéré suivant :



Un arc $i \to j$ est pondéré par la probabilité conditionnelle, notée p_{ij}, de transition de l'état i à j.

À l'aide du précédent arbre, on déduit la propriété suivante.

Propriété

La somme des probabilités conditionnelles issues d'un état fixé vaut 1 :

- $p_{11} + p_{12} = 1$;
- $p_{21} + p_{22} = 1$.

Définition

La matrice M

$$M = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

dont le coefficient p_{ij} sur la i-ème ligne et j-ème colonne est la probabilité conditionnelle que le système passe de l'état i à l'état j l'instant suivant. La matrice M est appelée la **matrice de transition**.

La précédente propriété peut être reformulée ainsi

Propriété

Dans une matrice de transition, la somme des coefficients d'une ligne vaut 1.

Le nombre p_{12} est la probabilité que le système passe à l'état 2 sachant qu'il était à l'état 1 et le nombre p_{22} est la probabilité que le système passe à l'état 2 sachant qu'il était à l'état 2. Ainsi, à l'aide de ces deux probabilités conditionnelles, on déduit que la probabilité que le système se trouve à l'état 2 à l'instant $n + 1$ est

$$b_{n+1} = a_n \times p_{12} + b_n \times p_{22} \tag{B}$$

De même, la probabilité que le système se trouve à l'état 1 à l'instant $n + 1$ est

$$a_{n+1} = a_n \times p_{11} + b_n \times p_{21} \tag{A}$$

Ainsi, on note que quel que soit l'instant n,

$$
\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} a_n & b_n \end{bmatrix} \times M \\
= \quad & \begin{bmatrix} a_n & b_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \\
= \quad & \begin{bmatrix} a_n \times p_{11} + b_n \times p_{21} & a_n \times p_{11} + b_n \times p_{22} \end{bmatrix} \\
= \quad & \begin{bmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Propriété

Dans une chaîne de Markov à deux états et avec les notations précédentes, on pose :

$$P_n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \end{bmatrix}$$

la matrice ligne dont le coefficient sur le i-ème colonne est la probabilité que le système se trouve à l'état i à l'instant n. Alors,

$$P_{n+1} = P_n \times M$$

où M est la matrice de transition.

En particulier de la relation, précédente on déduit que

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_0 & b_0 \end{bmatrix} \times M \\
\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \end{bmatrix} \times M \\
&= \left(\begin{bmatrix} a_0 & b_0 \end{bmatrix} \times M\right) \times M \\
&= \begin{bmatrix} a_0 & b_0 \end{bmatrix} \times M^2 \\
\begin{bmatrix} a_3 & b_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \end{bmatrix} \times M \\
&= \left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \end{bmatrix} \times M^2\right) \times M \\
&= \begin{bmatrix} a_0 & b_0 \end{bmatrix} \times M^3
\end{aligned}$$

Ce fait peut être généralisé :

Propriété

Dans une chaîne de Markov à deux états et avec les notations précédentes, on a

$$\begin{bmatrix} a_n & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 \end{bmatrix} \times M^n$$

C'est-à-dire

$$P_n = P_0 \times M^n.$$

La probabilité que le système soit à l'état i à l'instant n se lit sur la i-ème colonne du produit de la matrice $\begin{bmatrix} a_0 & b_0 \end{bmatrix}$ *par la matrice de transition M à la puissance n.*

Remarque

Dans la formule précédente, on notera une analogie avec l'expression de u_n en fonction de n lorsque (u_n) est une suite géométrique : $u_n = u_0 \times q^n$.

Exercice

`ex 108 p 303 et ex 117 p 305.`

Ce qui a été vu précédemment pour deux états se généralise à davantage d'états.

Définition

Un **graphe probabiliste** est un graphe **orienté** et **pondéré** tel que :

- Ses sommets sont les états possibles du système ;
- Un arc $i \to j$ est pondéré par la probabilité conditionnelle, notée p_{ij}, de transition de l'état i à j.

À un tel graphe probabiliste, on associe la matrice carrée $M = [p_{ij}]$ de taille n, où n est l'ordre du graphe. La matrice M est appelée la **matrice de transition** du système.

Propriété

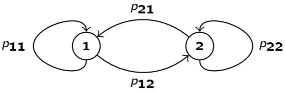
Dans une matrice de transition, la somme des coefficients d'une ligne vaut 1.

Exercice

ex 104 p 302.

Exemples

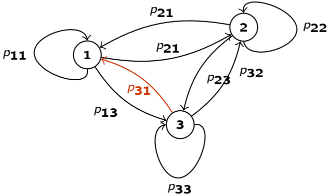
1. Graphe probabiliste d'ordre 2 :



La matrice de transition associée

$$M = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{12} \end{bmatrix}$$

2. Graphe probabiliste d'ordre 3 :



La matrice de transition associée

$$M = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{12} & p_{13} \\ \color{red}{p_{31}} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

Définition

On pose P_n la matrice dont le coefficient sur le i-ème colonne est la probabilité que le système se trouve à l'état i à l'instant n. Cette matrice représente la loi de probabilité du système à l'instant n est appelée **état probabiliste** à l'instant n.

Propriété

Soit n un entier naturel. Dans une chaîne de Markov, avec les notations précédentes, on a :

1. $P_{n+1} = P_n \times M$, *la loi de probabilité à l'instant $n+1$ (l'instant suivant) se déduit de la loi de probabilité à l'instant n et de la matrice de transition M.*
2. $P_n = P_0 \times M^n$.
3. $P_n = P_1 \times M^{n-1}$.

Exercice

`ex 105, 107 p 303.`

État stable

Exercice

`Activité 3 p 299.`

Définition

Un **état probabiliste** P est dit **stable** si $P = P \times M$, où M est la matrice de transition associée au graphe.

En fait, lorsqu'un état probabiliste P est stable, la probabilité qu'un système soit à l'état i à un instant donné est la même qu'à l'instant suivant. Dans une telle configuration, la loi de probabilité du système ne dépend plus de l'instant donné : elle est donc stable.

Propriété

Pour tout graphe probabiliste d'ordre 2 dont la matrice de transition M ne comporte pas de 0, l'état probabiliste $P_n = \begin{bmatrix} x_n & y_n \end{bmatrix}$ converge vers un unique état probabiliste $P = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$ indépendant de l'état initial.
Cet état stable P vérifie $P = PM$.
De plus,

$$x = \lim_{n \to +\infty} x_n \qquad \textit{et} \qquad y = \lim_{n \to +\infty} y_n.$$

Ce résultat est encore vrai avec trois états :

Propriété

Pour tout graphe probabiliste d'ordre 3 dont la matrice de transition M ne comporte pas de 0*, l'état probabiliste* $P_n = \begin{bmatrix} x_n & y_n & z_n \end{bmatrix}$ *converge vers un unique état probabiliste* $P = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ *indépendant de l'état initial.*
Cet état stable P vérifie $P = PM$.
De plus,

$$x = \lim_{n \to +\infty} x_n, \qquad y = \lim_{n \to +\infty} y_n \qquad \textit{et} \qquad z = \lim_{n \to +\infty} z_n.$$

Exercice

`Ex 110, 111, 113, 114 pp 304-305.`
`Ex 119, 120, 121 p 307.`