Terminale STMG

O. Lader

Table des matières

Nom :

Interrogation 1 : Indice et taux d'évolution

mercredi 17 septembre 2014

Exercice 1. Le tableau incomplet suivant donne le nombre annuel de visiteurs du Panthéon, à Paris, ainsi que quelques indicateurs, pour les années 2007 à 2011.
Les indices sont établis en choisissant la base 100 pour 2008.

Année	2007	2008	2009	2010	2011
Production	499		629	695	
Indice	91	100		127	133
Taux d'évolution	$\times$	$t_1 = 9.82\ \%$	$t_2 = 14.78\%$	$t_3 =$	$t_4 = 5.10\%$

(t_1 est le taux d'évolution de 2007 à 2008 et ainsi de suite.)

1. Compléter le tableau en arrondissant les productions et les indices à l'unité et les taux d'évolutions en pourcentages au centième de pour-cent.

2. Calculer le taux d'évolution globale T de 2007 à 2011.

3. Calculer le produit suivant $(1 + t_1) \times (1 + t_2) \times (1 + t_3) \times (1 + t_4) - 1$. Que remarque-t-on ? Justifier.

Exercice 2 (exercice 77 page 22)**.** Un village isolé perd, sur trois périodes de dix années successives, 20% de sa population, puis 10% de sa population et enfin 30% de sa population.

1. Calculer le taux d'évolution de la population du village sur ces 30 années.

2. À l'issue de ces 30 ans, le village compte 126 habitants.
   Combien y avait-il d'habitants 30 ans plus tôt ?

Exercice 3. On a pu lire, dans le livre *Voici venu le temps du monde fini* d'Albert Jacquard, l'affirmation suivante :
"Un accroissement d'une population de 2% par an peut sembler bien faible, il correspond pourtant à un doublement en 35 ans, donc à un quadruplement en 70 ans, à une multiplication par 7 en moins d'un siècle."
Les affirmations de l'auteur sont-elles exactes ? Justifier la réponse.

Devoir maison 1 : Taux d'évolution

pour le 10 octobre 2014

Exercice 1. Évolution de la construction de logements sociaux dans un pays de l'Europe :

Année	Nombre de logements	Taux d'évolution annuel de la construction	Taux d'évolution de la construction par rapport à 2008
2008	45 618		
2009	40 690		
2010	41 907		
2011	36 604		
2012	38 123		
2013	34 745		

1. a) Compléter le tableau précédent (résultats arrondis à 0.01%).
   b) Lire le taux d'évolution du nombre de logements sociaux construits de 2008 à 2013.
2. Calculer le taux d'évolution annuel moyen, arrondi à 0.1% près, du nombre de logements sociaux construits de 2008 à 2013.
3. Compte tenu de la pénurie de logements, le ministre de la "Cohésion sociale" de ce pays s'est engagé à créer chaque année, pour les 5 ans à venir, 40% de logements supplémentaires.
   a) Calculer le nombre de logements sociaux qui devraient être construits chaque année de 2014 à 2018 (arrondir au nombre entier le plus proche), puis le nombre total de logements construits sur ces 5 ans.
   b) Calculer le taux d'évolution du nombre du nombre de logements sociaux qui devraient être construits de 2014 à 2018.

Exercice 2 (Les sms en France)**.** L'extrait de feuille de calcul suivant donne partiellement le nombre de SMS interpersonnels émis par téléphone en France lors des années 2001 à 2007. Le format d'affichage sur la plage de cellules B3 :H3 est un format numérique à zéro décimale.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
2	Nombre de SMS interpersonnels (en millions)	3 234	5 877	8 410		12 712	15 023	17 546
3	Indice	100	182	260	335		465	543

1. a) Calculer le nombre de millions de SMS interpersonnels émis au cours de l'année 2004 (arrondir à l'unité).
   b) Calculer l'indice de l'année 2005 (arrondir à l'unité).
2. Donner une formule qui, entrée dans la cellule C3, permet par recopie vers la droite d'obtenir la plage de cellules C3 :H3.
3. Dans cette question, les résultats seront arrondis à 1%.

a) Donner le taux d'évolution global du nombre de SMS interpersonnels émis de l'année 2001 à l'année 2007.

b) Calculer le taux d'évolution moyen annuel du nombre de SMS interpersonnels émis de l'année 2001 à l'année 2007.

Devoir maison 1 : Taux d'évolution

corrigé

Exercice 1. Évolution de la construction de logements sociaux dans un pays de l'Europe :

Année	Nombre de logements	Taux d'évolution annuel de la construction	Taux d'évolution de la construction par rapport à 2008
2008	45 618		
2009	40 690	-10.80%	-10.80%
2010	41 907	2.99%	-8.13%
2011	36 604	-12.65%	-19.76%
2012	38 123	4.15%	-16.43%
2013	34 745	-8.86%	-23.83%

1. a) (Compléter le tableau précédent (résultats arrondis à 0.01%).)
   b) D'après le tableau, le taux d'évolution du nombre de logements sociaux construits de 2008 à 2013 est de -23.83%.
2. Le taux d'évolution annuel moyen, arrondi à 0.1% près, du nombre de logements sociaux construits de 2008 à 2013 est
$$t_m = (1 - \frac{23.83}{100})^{1 \div 5} - 1 \simeq -0.053 = -5.3\%$$
3. Compte tenu de la pénurie de logements, le ministre de la "Cohésion sociale" de ce pays s'est engagé à créer chaque année, pour les 5 ans à venir, 40% de logements supplémentaires.
   a) Le nombre de logements sociaux qui devraient être construits chaque année de 2014 à 2018 (arrondir au nombre entier le plus proche) est donnée dans le tableau suivant :

Année	2014	2015	2016	2017	2018
Nombre de logements	$34\,745 \times 1.4 \simeq 48\,643$	68 100	95 340	133 476	186 867

   Ainsi, le nombre total de logements construits sur ces 5 ans est de
$$48\,643 + 68\,100 + 95\,340 + 133\,476 + 186\,867 \simeq 532\,427$$
   b) Le taux d'évolution du nombre du nombre de logements sociaux qui devraient être construits de 2014 à 2018 est $1.4^4 - 1 \simeq 2.84$ soit 284%.

Exercice 2. L'extrait de feuille de calcul suivant donne partiellement le nombre de SMS interpersonnels émis par téléphone en France lors des années 2001 à 2007. Le format d'affichage sur la plage de cellules B3 :H3 est un format numérique à zéro décimale.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
2	Nombre de SMS interpersonnels (en millions)	3 234	5 877	8 410	**10 834**	12 712	15 023	17 546
3	Indice	100	182	260	335	**393**	465	543
4	Indice à 10-2 près (= C2 * $B3 / $B2)	100	181,73	260,05	335,00	393,07	464,53	542,55
5	Indice à 10-2 près (= C2 * B5 / B2)	100	181,73	260,06	335,01	393,09	464,55	542,57

1. a) Comme les lignes 2 et 3 du tableau précédent forment un tableau de proportionnalité, le nombre de millions de SMS interpersonnels émis au cours de l'année 2004 est

$$335 \times \frac{3\,234}{100} \simeq 10\,834$$

à l'unité près.

b) De même, l'indice de l'année 2005 est

$$12\,712 \times \frac{100}{3\,234} \simeq 393$$

à l'unité près.

2. La formule qui, entrée dans la cellule C3, permet par recopie vers la droite d'obtenir la plage de cellules C3 :H3 est

```
= C2 * $B3 / $B2
```

3. Dans cette question, les résultats seront arrondis à 1%.

a) Le taux d'évolution global du nombre de SMS interpersonnels émis de l'année 2001 à l'année 2007 est

$$T = \frac{17\,546 - 3\,234}{3\,234} \simeq 4.43 = 443\%$$

(à 1% près).

b) De 2001 à 2007, il y a eu 6 évolutions, d'où le taux d'évolution moyen annuel du nombre de SMS interpersonnels émis de l'année 2001 à l'année 2007 est

$$t_M = (1+T)^{1/6} - 1 \simeq (1+4.43)^{\frac{1}{6}} - 1 \simeq 0.33 = 33\%$$

Devoir sur table 1 : Indice et taux d'évolution

vendredi 3 octobre 2014

Exercice 1. *Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.*
Pour chaque question, quatre réponses sont proposées. Une seule des réponses proposées est correcte. On demande de cocher celle que vous pensez être correcte.
Le prix d'un produit A augmente de 5.4% la première année et augmente de 30% la seconde année.

1. À l'issue de la première année, le prix du produit a été multiplié par :

   a) 0.946 b) 1.540 c) 1.054 d) 0.094

2. À l'issue des deux années, le prix a augmenté de :

   a) 16.2% b) 37.02% c) 24.6% d) 35.4%

3. Le taux d'évolution annuel moyen sur les deux années est de :

   a) 16.2% b) 24.6% c) 17.7% d) 17.1%

4. Si le produit avait augmenté de 5.4% par an durant 6 ans, le taux d'évolution pour ces six années aurait été de :

   a) 32.4% b) 37.1% c) 38.3% d) 35.4%

Exercice 2. Un magasin de chaussures a fait 300 000 euros de chiffre d'affaires pour l'année 2001. Ce chiffre d'affaires a évolué les années suivantes selon le tableau ci-dessous. La deuxième ligne donne le chiffre d'affaires pour l'année, la troisième ligne donne le taux d'évolution par rapport à l'année précédente et la quatrième ligne donne l'indice base 100 par rapport à l'année 2002.

Année	2001	2002	2003	2004	2005
Chiffre d'affaires arrondi au millier d'euros	300 000	375 000	435 000		514 000
Taux d'évolution			+16%	+12.2%	+5.3%
Indice arrondi à l'unité		100	116		137

1. Calculer le chiffre d'affaires pour 2004 arrondi au millier d'euros.
2. Calculer les indices base 100 des années 2001 et 2004 arrondi à l'unité.
3. Calculer le taux d'évolution de 2001 à 2002.
4. Une estimation :
   a) Calculer le taux d'évolution global en pourcent de 2001 à 2005 arrondi à 0.1%.
   b) Calculer le taux d'évolution moyen en pourcent de 2001 à 2005 arrondi à 0.1%.
   c) Si le taux d'évolution du chiffre d'affaires de 2005 à 2006 était égal au taux d'évolution moyen, quel serait le chiffre d'affaires en 2006 (arrondi au millier d'euros) ?

Rappel : Soit A un sous-population d'une population E. On note n_A le nombre d'individus dans A et n_E le nombre d'individus dans E, alors la **proportion** de A dans E est

$$p = \frac{n_A}{n_E}.$$

On peut en déduire facilement les deux relations suivantes :

$$n_A = p \times n_E \qquad \text{et} \qquad n_E = \frac{n_A}{p}.$$

Exercice 3. Dans une station balnéaire, on a interrogé 600 touristes, français ou étrangers, sur leur séjour.
Tous ont répondu être, soit au camping soit à l'hôtel, soit en location.

- 10% des touristes sont logés à l'hôtel,
- 48 touristes étrangers sont à l'hôtel,
- 40% des touristes étrangers sont dans un camping,
- 40% des touristes étrangers ont choisi une location,
- Il y a deux fois plus de touristes français en camping qu'en location.

1. Déterminer le nombre de touristes logés à l'hôtel.
2. Montrer que le nombre de touristes étrangers interrogés est 240.
3. En déduire le nombre de touristes français interrogés.
4. Montrer que le nombre de touristes français en location est 116.
5. Montrer que le nombre de touristes en camping est 328.
6. Reproduire et compléter le tableau suivant :

	Camping	Location	Hôtel	Total
Français				
Étrangers			48	
Total				600

Devoir sur table 1 : Indice et taux d'évolution

corrigé

Exercice 1. *Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.*
Pour chaque question, quatre réponses sont proposées. Une seule des réponses proposées est correcte. On demande de cocher celle que vous pensez être correcte.
Le prix d'un produit A augmente de 5.4% la première année et augmente de 30% la seconde année.

1. À l'issue de la première année, le prix du produit a été multiplié par, réponse c), 1.054.
2. À l'issue des deux années, le prix a augmenté de, réponse b), 37.02%.
3. Le taux d'évolution annuel moyen sur les deux années est de, réponse d), 17.1%.
4. Si le produit avait augmenté de 5.4% par an durant 6 ans, le taux d'évolution pour ces six années aurait été de, réponse b), 37.1%.

Exercice 2. Un magasin de chaussures a fait 300 000 euros de chiffre d'affaires pour l'année 2001. Ce chiffre d'affaires a évolué les années suivantes selon le tableau ci-dessous. La deuxième ligne donne le chiffre d'affaires pour l'année, la troisième ligne donne le taux d'évolution par rapport à l'année précédente et la quatrième ligne donne l'indice base 100 par rapport à l'année 2002.

Année	2001	2002	2003	2004	2005
Chiffre d'affaires arrondi au millier d'euros	300 000	375 000	435 000	488 000	514 000
Taux d'évolution		+25%	+16%	+12.2%	+5.3%
Indice arrondi à l'unité	80	100	116	130	137

1. Le chiffre d'affaires pour 2004 arrondi au millier d'euros est $435\,000 \times 1.122 \simeq 488\,000$ euros.
2. Les indices base 100 des années 2001 et 2004 arrondi à l'unité sont $\frac{300\,000 \times 100}{375\,000} = 80$ et $\frac{488\,000 \times 100}{375\,000} \simeq 130$.
3. Le taux d'évolution de 2001 à 2002 est $\frac{375\,000 - 300\,000}{300\,000} = 0.25 = 25\%$.
4. Une estimation :
   a) Le taux d'évolution global en pourcent de 2001 à 2005 arrondi à 0.1% est $\frac{514\,000 - 300\,000}{300\,000} \simeq 0.713 = 71.3\%$.
   b) Le taux d'évolution moyen en pourcent de 2001 à 2005 arrondi à 0.1% est $(1+0.713)^{1 \div 4} - 1 \simeq 14.4\%$.
   c) Si le taux d'évolution du chiffre d'affaires de 2005 à 2006 était égal au taux d'évolution moyen, le chiffre d'affaires en 2006 serait de $514\,000 \times 1.144 \simeq 588\,000$ euros arrondi au millier d'euros.

Rappel : Soit A un sous-population d'une population E. On note n_A le nombre d'individus dans A et n_E le nombre d'individus dans E, alors la **proportion** de A dans E est

$$p = \frac{n_A}{n_E}.$$

On peut en déduire facilement les deux relations suivantes :

$$n_A = p \times n_E \qquad \text{et} \qquad n_E = \frac{n_A}{p}.$$

Exercice 3. Dans une station balnéaire, on a interrogé 600 touristes, français ou étrangers, sur leur séjour.
Tous ont répondu être, soit au camping soit à l'hôtel, soit en location.

- 10% des touristes sont logés à l'hôtel,
- 48 touristes étrangers sont à l'hôtel,
- 40% des touristes étrangers sont dans un camping,
- 40% des touristes étrangers ont choisi une location,
- Il y a deux fois plus de touristes français en camping qu'en location.

1. Le nombre de touristes logés à l'hôtel est $10\% \times 600 = 60$.
2. On note que 100% - 40% - 40% = 20% des touristes étrangers sont à l'hôtel et ils sont 48. D'où, le nombre de touristes étrangers interrogés est $\frac{48}{0.2} = 240$.
3. Le nombre de touristes français interrogés est $600 - 240 = 360$.
4. Soit l le nombre de touristes français en location. Alors, le nombre de touriste français en camping est $2l$. Et ensemble, ils sont $l + 2l = 360 - 12$. Donc le nombre de touristes français en location est $l = \frac{360-12}{3} = 116$.
5. Le nombre de touriste étrangers en camping est 40% de 240 soit $0.4 \times 240 = 96$. D'où le nombre de touristes en camping est $96 + 232 = 328$.
6. Reproduire et compléter le tableau suivant :

	Camping	Location	Hôtel	Total
Français	232	116	12	360
Étrangers	96	96	48	240
Total	328	212	60	600

Devoir sur table du samedi : Taux d'évolution et dérivation

samedi 8 novembre 2014

Exercice 1. Le tableau suivant donne l'évolution du nombre de bénéficiaires de minima sociaux, en milliers.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Année	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
2	Nombre de bénéficiaires (en milliers)	3 258,7		3 425,4	3 513,1	3 494,2	3 334,2	3 297,5	3 502,7
3	Indice	97,74	99,39	102,74	105,37	104,80	100,00		

1. Entre 2002 et 2003, le nombre de bénéficiaires de minima sociaux a augmenté de 1,69%. Déterminer le nombre de bénéficiaires de minima sociaux en 2003 (arrondir à 0,1 millier près).
2. On affecte l'indice 100 à l'année 2007. Déterminer les indices des années 2008 à 2009 (les résultats seront arrondis au centième).
3. Parmi les formules ci-dessous, quelle formule destinée à être recopiée vers la droite, peut-on saisir dans la cellule H3 ?

   a) = H2*$G3/$G2 b) = H2*$G2/$G3 c) = H2*G3/G2 d) = H2*(G3-G2)/G2

4. Déterminer les taux d'évolution du nombre de bénéficiaires de minima sociaux entre 2007 et 2008, puis entre 2007 et 2009. Exprimer ces taux en termes de hausse ou de baisse en pourcentage (arrondir à 0.01% près).
5. Calculer le taux d'évolution global du nombre de bénéficiaires de minima sociaux de 2002 à 2009 au millième près.
6. Calculer le taux d'évolution annuel moyen de 2002 à 2009 au millième près.
7. Le gouvernement souhaite qu'en 2015, le nombre de bénéficiaires de minima sociaux ne dépasse pas 3 800 000.
   Si l'évolution moyenne est de 1,04% par an après 2009, cet objectif est-il réalisable ?

Exercice 2 (Fréquentation des salles de cinéma)**.**

Partie 1 : Étude du nombre de films vus au cinéma dans l'année.
Dans un lycée, on a demandé à chacun des 701 élèves de Première et Terminale le nombre de films vus au cinéma dans l'année. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-après.

Nombre de films	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Nombre d'élèves	5	10	15	30	30	30	60	67	90	85	70	60	60	40	20	10	5	8	6

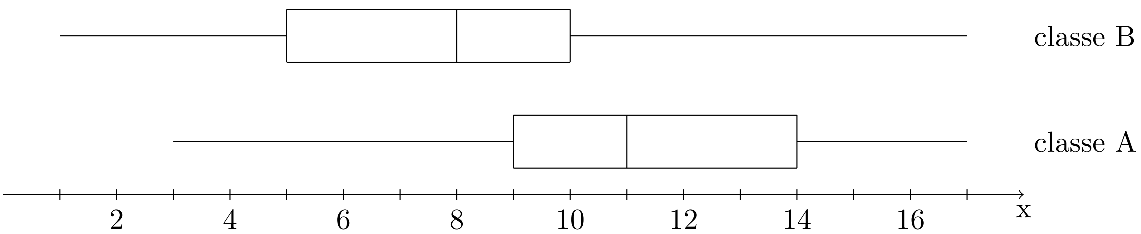
1. La moyenne de cette série est $\bar{x} \simeq 8,6$ et l'écart type est $\sigma \simeq 3,5$. Ces valeurs sont arrondies au dixième.
   a) Déterminer l'intervalle $[\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma]$.
   b) Vérifier que environ 95% des valeurs sont dans cet intervalle.

c) Interpréter le résultat par une phrase.

2. a) À l'aide de la calculatrice, donner la médiane, les premier et troisième quartiles de cette série.

   b) Interpréter la valeur du quartile Q_3.

Partie 2 : Comparaison du nombre de films vus dans l'année par les élèves de deux classes.
On considère deux classes de Première de cet établissement dont l'une est composée d'élèves ayant choisi l'option cinéma.
Ces classes, appelées A et B, ont le même effectif : 32 élèves.
On a représenté ci-dessous les diagrammes en boîte du nombre de films vus au cinéma dans l'année pour chacune de ces classes, en plaçant aux extrémités le maximum et le minimum.

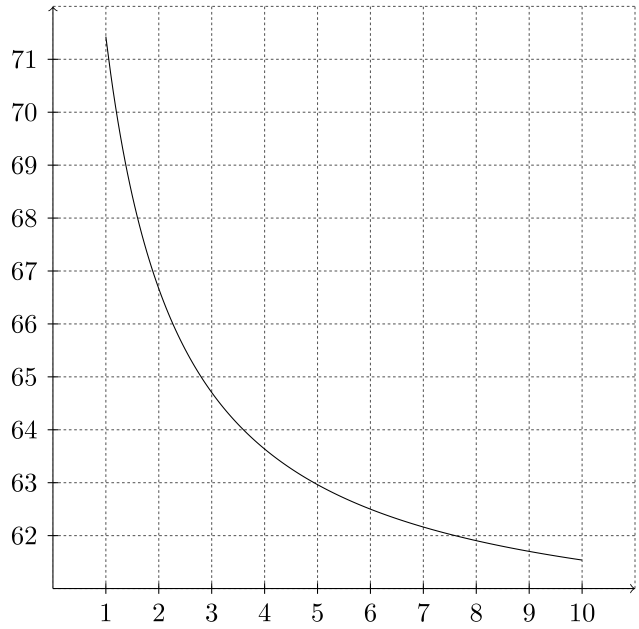


Dire si chaque affirmation suivante est vraie ou fausse et expliquer la réponse.

1. Dans la classe A, environ la moitié des élèves a vu moins de 9 films au cinéma.
2. Dans la classe B, environ huit élèves ont vu 10 films ou plus au cinéma.
3. Au moins la moitié des élèves de la classe A a vu plus de films au cinéma que les trois-quarts des élèves de la classe B.

Exercice 3. Dans une entreprise créant des vestes de costume, le coût de production unitaire, exprimé en euros pour x vestes fabriquées, est donné par la fonction c définie par $c(x) = \frac{300x+200}{5x+2}$, pour x appartenant à $[1; 10]$.
Le tableau et le graphique suivants ont été obtenus sur tableur.

	A	B	C
1	x	c(x)	coût de x vestes
2	1	71,43	71,43
3	2	66,67	133,33
4	3	64,71	194,12
5	4	63,64	254,55
6	5	62,96	314,81
7	6	62,50	375,00
8	7	62,16	435,14
9	8	61,90	495,24
10	9	61,70	555,32
11	10	61,54	615,38



Déterminer à l'aide du tableau ou du graphique :

1. le coût de production unitaire de 6 vestes ;
2. le coût total de production de 6 vestes ;
3. le nombre de vestes fabriquées si le coût de production unitaire est de 61,90 €.
4. à partir de combien de vestes fabriquées le coût de production unitaire devient inférieur à 62 €.
5. le sens de variation de la fonction c.

Exercice 4. Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions f suivantes définies sur $[1; 10]$:

1. $f(x) = x^2$,
2. $f(x) = x^5$,
3. $f(x) = 2x^7 - 3x^2 - x + 12$,
4. $f(x) = x + \frac{3}{x}$

Devoir sur table du samedi : Taux d'évolution, Statistiques et dérivation

corrigé

Exercice 1. Le tableau suivant donne l'évolution du nombre de bénéficiaires de minima sociaux, en milliers.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Année	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
2	Nombre de bénéficiaires (en milliers)	3 258,7	3 313,8	3 425,4	3 513,1	3 494,2	3 334,2	3 297,5	3 502,7
3	Indice	97,74	99,39	102,74	105,37	104,80	100,00	98,90	105,05

1. Entre 2002 et 2003, le nombre de bénéficiaires de minima sociaux a augmenté de 1,69%. Ainsi, le nombre de bénéficiaires de minima sociaux en 2003 est
$$3\,258,7 \times (1 + \frac{1,69}{100}) \simeq 3\,313,8$$
à 0,1 millier près.
2. On affecte l'indice 100 à l'année 2007. L'indice de l'année 2008 est
$$3\,297,5 \times \frac{100}{3\,334,2} \simeq 98,9$$
et celui de 2009 est
$$3\,502,7 \times \frac{100}{3\,334,2} \simeq 105,05$$
au centième près.
3. La formule destinée à être recopiée vers la droite qu'on peut saisir dans la cellule H3 est

   a) = H2*$G3/$G2

4. Le taux d'évolution du nombre de bénéficiaires de minima sociaux entre 2007 et 2008 est
$$\frac{3\,297,5 - 3\,334,2}{3\,334,2} \simeq -0,0110 = -1,10\%$$
C'est-à-dire, le nombre de bénéficiaires de minima sociaux entre 2007 et 2008 a diminué de 1,10%. Entre 2007 et 2009, le taux d'évolution est
$$\frac{3\,502,7 - 3\,334,2}{3\,334,2} \simeq 0,0505 = 5,05\%$$
d'où le nombre de bénéficiaires de minima sociaux entre 2007 et 2009 a augmenté de 5,05%.
5. Le taux d'évolution global du nombre de bénéficiaires de minima sociaux de 2002 à 2009 est
$$T = \frac{3\,502,7 - 3\,258,7}{3\,258,7} \simeq 0,075$$
soit $7,5\%$.

6. Le nombre d'évolutions de 2002 à 2009 étant de 7, le taux d'évolution annuel moyen de 2002 à 2009 est
$$t_M = (1+T)^{\frac{1}{7}} - 1 \simeq 1.075^{\frac{1}{7}} - 1 \simeq 0.010$$
soit en moyenne une augmentation de 1% par an de 2002 à 2009.
7. Le gouvernement souhaite qu'en 2015, le nombre de bénéficiaires de minima sociaux ne dépasse pas 3 800 000.
Si l'évolution moyenne est de 1,04% par an après 2009, alors après $2015-2009 = 6$ augmentations de 1.04%, le nombre de bénéficiaires de minima sociaux en 2015 serait environ de
$$3\,502,7 \times 1,0104^6 \simeq 3\,727$$
milliers qui est inférieur à 3 800 milliers. Donc l'objectif est réalisable.

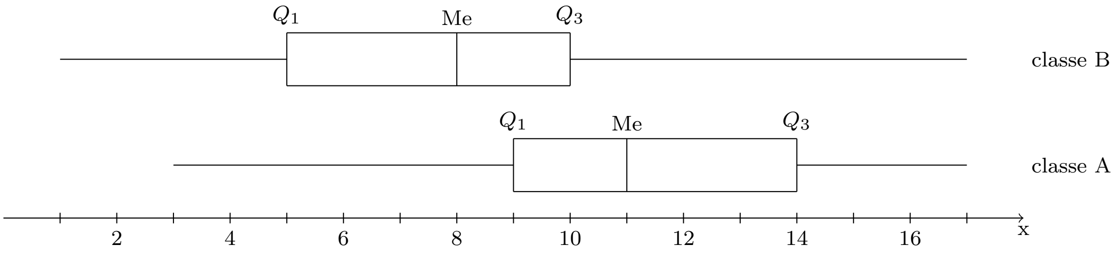
Exercice 2 (Fréquentation des salles de cinéma)**.**

Partie 1 : Étude du nombre de films vus au cinéma dans l'année.
Dans un lycée, on a demandé à chacun des 701 élèves de Première et Terminale le nombre de films vus au cinéma dans l'année. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-après.

Nombre de films	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Nombre d'élèves	5	10	15	30	30	30	60	67	90	85	70	60	60	40	20	10	5	8	6

1. La moyenne de cette série est $\bar{x} \simeq 8,6$ et l'écart type est $\sigma \simeq 3,5$. Ces valeurs sont arrondies au dixième.
   a) L'intervalle $[\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma]$ est $[1,6; 15,6]$.
   b) Les valeurs entre 1,6 et 15,6 sont au nombre de
   $$15+30+30+30+60+67+90+85+70+60+60+40+20+10+5 = 667$$
   Soit environ $\frac{667}{701} \simeq 95,1\%$ des valeurs sont dans l'intervalle.
   c) Environ 95% des élèves de Première et de Terminale ont regardé entre 2 et 15 films dans l'année.
2. a) À l'aide de la calculatrice, la médiane de la série statistique est $m = 9$, le premier quartile Q_1 est 6 et le troisième quartile Q_3 est 11.
   b) Par définition du troisième quartile, on a qu'au moins 75% des élèves ont regardé moins de 11 films dans l'année.

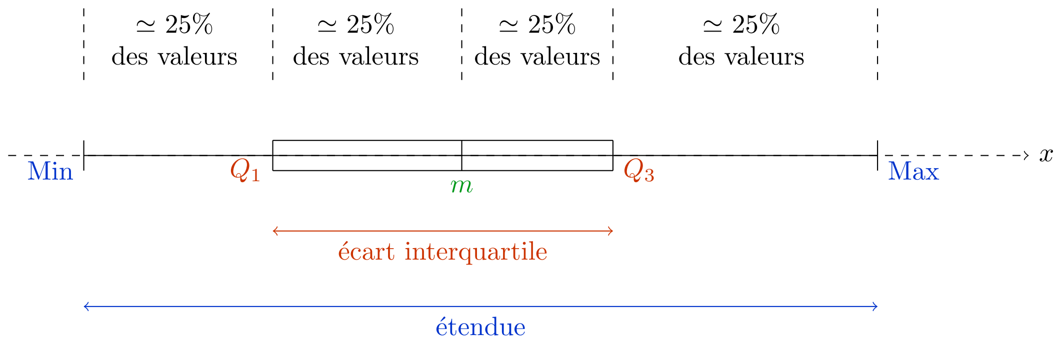
Partie 2 : Comparaison du nombre de films vus dans l'année par les élèves de deux classes.
On considère deux classes de Première de cet établissement dont l'une est composée d'élèves ayant choisi l'option cinéma.
Ces classes, appelées A et B, ont le même effectif : 32 élèves.
On a représenté ci-dessous les diagrammes en boîte du nombre de films vus au cinéma dans l'année pour chacune de ces classes, en plaçant aux extrémités le maximum et le minimum.



Considérons les affirmations suivantes :

1. Dans la classe A, environ la moitié des élèves a vu moins de 9 films au cinéma.
   Cette affirmation est **fausse** car la médiane n'est pas égale à 9 pour la classe A mais à 11.
2. Dans la classe B, environ huit élèves ont vu 10 films ou plus au cinéma.
   Cette affirmation est **vraie**, car le troisième quartile est 10, ainsi environ 8 (25% de 32) élèves de la classe B ont vu plus de 10 films.
3. Au moins la moitié des élèves de la classe A a vu plus de films au cinéma que les trois-quarts des élèves de la classe B.
   Cette affirmation est **vraie**. Comme la médiane de la classe A est 11, on déduit qu'au moins la moitié des élèves de la classe a vu plus de 11 films. D'autre part, au moins les trois-quarts des élèves de la classe B ont vu moins de $Q_3 = 10 < 11$ films. D'où l'affirmation.

Remarque. Un petit rappel sur les diagrammes en boite :



Exercice 3. Dans une entreprise créant des vestes de costume, le coût de production unitaire, exprimé en euros pour x vestes fabriquées, est donné par la fonction c définie par $c(x) = \frac{300x+200}{5x+2}$, pour x appartenant à $[1; 10]$.
Le tableau et le graphique suivants ont été obtenus sur tableur.

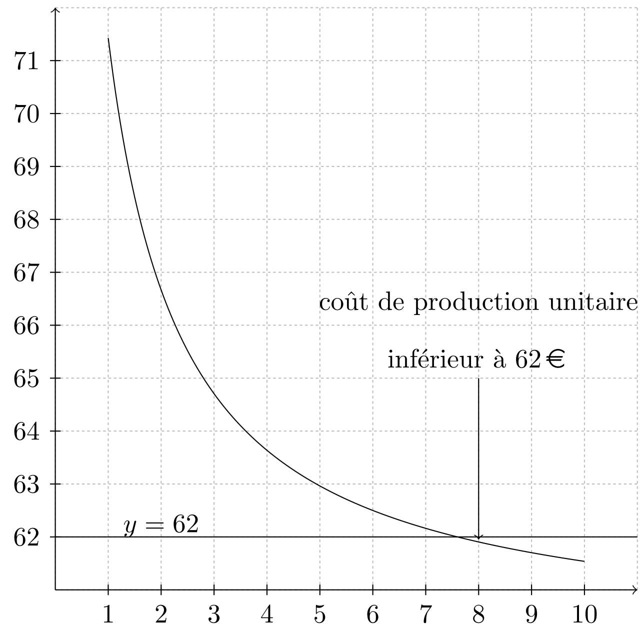
	A	B	C
1	x	c(x)	coût de x vestes
2	1	71,43	71,43
3	2	66,67	133,33
4	3	64,71	194,12
5	4	63,64	254,55
6	5	62,96	314,81
7	6	62,50	375,00
8	7	62,16	435,14
9	8	61,90	495,24
10	9	61,70	555,32
11	10	61,54	615,38

À l'aide du tableau ou du graphique, on a que

1. le coût de production unitaire de 6 vestes est $c(6) = 62,50$;

2. le coût total de production de 6 vestes est $6 \times c(6)$ et la valeur se trouve dans le cellule C7 du tableau, soit environ 375 € pour 6 vestes.
3. le nombre de vestes fabriquées, si le coût de production unitaire est de 61,90 €, est 8 (car $c(8) = 61,90$ d'après le tableau).

4. à partir de 8 vestes fabriquées le coût de production unitaire devient inférieur à 62 €. On peut le voir graphiquement :



5. la fonction c est décroissante (d'après le graphique).

Exercice 4. Considérons les fonctions f suivantes définies sur $[1; 10]$:
1. $f(x) = x^2$, alors sa dérivée est $f'(x) = 2x$.
2. $f(x) = x^5$, alors sa dérivée est $f'(x) = 5x^4$.
3. $f(x) = 2x^7 - 3x^2 - x + 12$, alors sa dérivée est $f'(x) = 14x^6 - 6x - 1$.
4. $f(x) = x + \frac{3}{x}$, alors sa dérivée est $f'(x) = 1 - \frac{3}{x^2}$.

Devoir sur table 3 : Dérivation et statistique

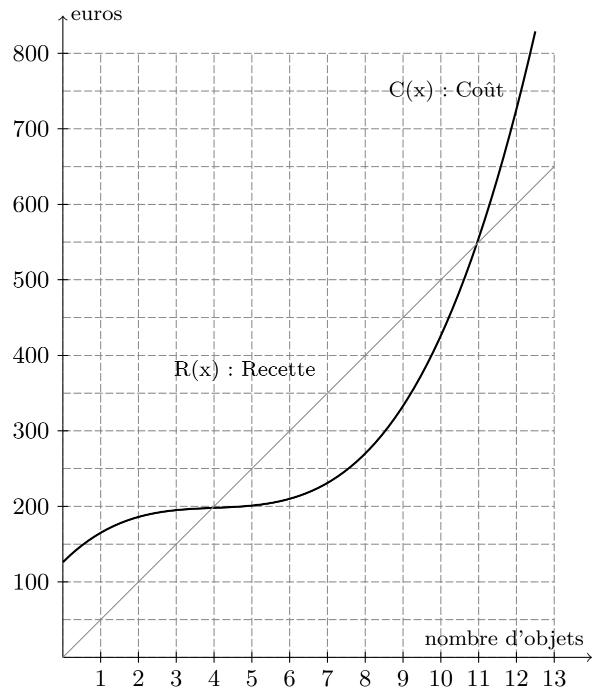
mercredi 3 décembre 2014

Exercice 1. Chaque jour, une petite entreprise fabrique x centaines de cartons d'emballage (x étant compris entre 0 et 12). Le coût tôtal de la fabrication journalière de ces cartons, en euros, est exprimé par

$$C(x) = x^3 - 12x^2 + 50x + 126$$

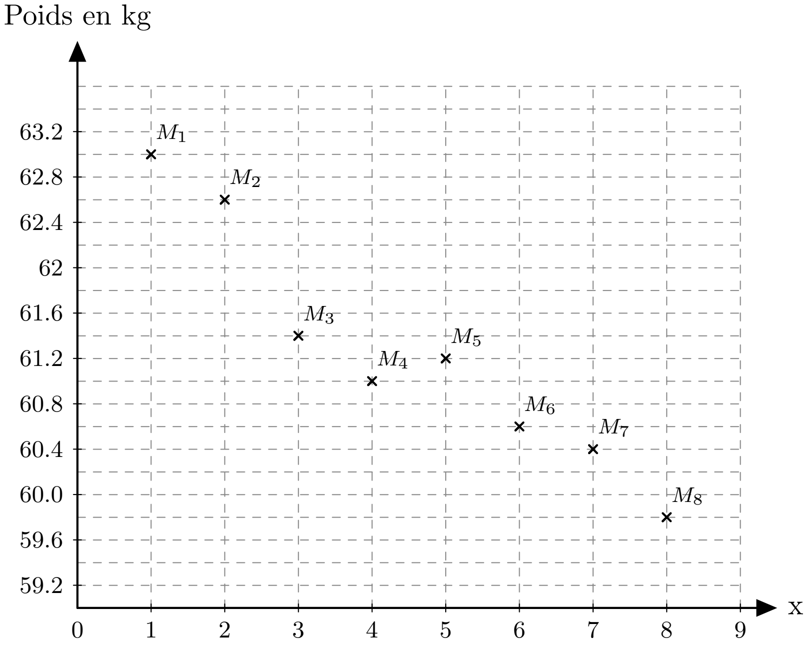
La recette journalière totale, en euros, pour x centaines de cartons vendues est donnée par la fonction R.
On donne ci-après un tableau de valeurs des fonctions C et R, ainsi qu'un tracé de leurs courbes représentatives dans le plan rapporté à un repère.

x	$C(x)$	$R(x)$
0	126	0
1	165	50
2	186	100
3	195	150
4	198	200
5	201	250
6	210	300
7	231	350
8	270	400
9	333	450
10	426	500
11	555	550
12	726	600



1. Calculer $C(0)$, montant des charges fixes.
2. À l'aide du tableau :
   a) Quel est le prix de vente de 100 cartons ?
   b) Exprimer $R(x)$ en fonction de x.
3. Établir, à partir du graphique, le tableau de variation de la fonction C.
4. Déterminer graphiquement l'intervalle auquel doit appartenir le nombre de cartons que l'entreprise doit fabriquer et vendre pour réaliser un bénéfice.
5. On suppose que tout carton fabriqué est vendu, et on note $B(x)$ le bénéfice journalier.
   a) Montrer que $B(x) = -x^3 + 12x^2 - 126$.
   b) Calculer $B'(x)$ et vérifier que $B'(x) = -3x(x - 8)$.
   c) Dresser le tableau de variations de la fonction bénéfice B.
   d) En déduire le nombre de cartons à fabriquer chaque jour pour réaliser le bénéfice maximal. Quel est ce bénéfice maximal ?

Exercice 2. Gaëlle entreprend de suivre un régime afin de perdre du poids, en suivant les conseils d'un nutritionniste. Elle se pèse à la fin de chaque semaine le même jour à la même heure et elle note l'évolution de son poids sur un graphique où le rang de la semaine est placé en abscisse et le poids en ordonnée.



1. Est-ce qu'un ajustement affine est envisageable ? Justifier.
2. Recopier et compléter le tableau suivant :

Rang de la semaine x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Poids y_i (en kg)								

3. Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage de points.
4. On admet que la droite d'équation $y = -0.42x + 63.14$ constitue un bon ajustement du nuage.
   a) Justifier que la droite passe par le point G.
   b) En utilisant l'équation de la droite d'ajustement, estimer son poids au bout de 9 semaines.
   c) Tracer la droite d'ajustement affine sur le graphe précédent.
   d) En utilisant l'équation de la droite d'ajustement, estimer le nombre de semaines de régime que Gaëlle devra suivre pour que son poids soit inférieur à 59kg.

Devoir sur table 3 : Dérivation et statistique

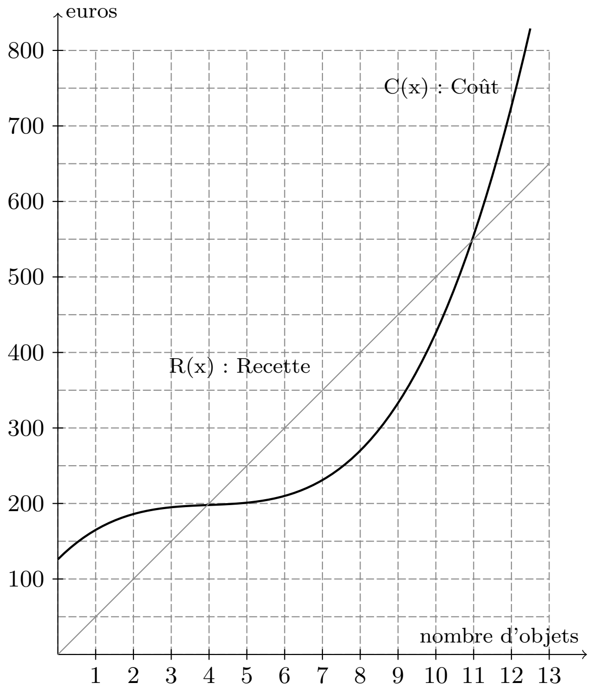
corrigé

Exercice 1. Chaque jour, une petite entreprise fabrique x centaines de cartons d'emballage (x étant compris entre 0 et 12). Le coût tôtal de la fabrication journalière de ces cartons, en euros, est exprimé par

$$C(x) = x^3 - 12x^2 + 50x + 126$$

La recette journalière totale, en euros, pour x centaines de cartons vendues est donnée par la fonction R.
On donne ci-après un tableau de valeurs des fonctions C et R, ainsi qu'un tracé de leurs courbes représentatives dans le plan rapporté à un repère.

x centaines	coût $C(x)$	recette $R(x)$
0	126	0
1	165	50
2	186	100
3	195	150
4	198	200
5	201	250
6	210	300
7	231	350
8	270	400
9	333	450
10	426	500
11	555	550
12	726	600



1. Le montant des charges fixes est de $C(0) = 126$ euros.
2. À l'aide du tableau :
   a) Le prix de vente de 100 cartons est $R(1) = 50$ euros.
   b) $R(x) = 50x$.
3. À partir du graphique, le tableau de variation de la fonction C est

x	0	12
$C(x)$	126 ↗	726

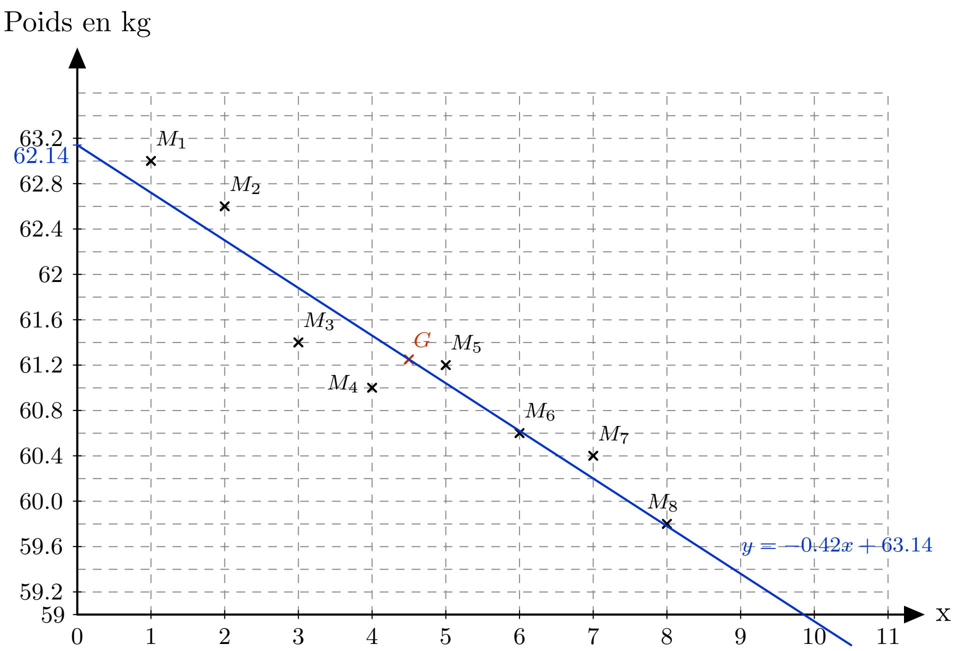
4. Le nombre de centaines de cartons que l'entreprise doit fabriquer et vendre pour réaliser un bénéfice est telle que le coût $C(x)$ soit inférieur à la recette $R(x)$. Graphiquement, pour réaliser un bénéfice le nombre de cartons doit être dans l'intervalle [400; 1100]. Déterminer graphiquement l'intervalle auquel doit appartenir le

5. On suppose que tout carton fabriqué est vendu, et on note $B(x)$ le bénéfice journalier.
   a) Soit x dans l'intervalle $[0; 12]$. Le bénéfice associé est égale à la recette moins le coût de production :
   $$B(x) = R(x) - C(x) = 50x - (x^3 - 12x^2 + 50x + 126) = -x^3 + 12x^2 - 126$$
   b) On a
   $$B'(x) = -3x^2 + 12 \times 2 \times x = -3x^2 + 24x = -3x(x - 8)$$
   c) Le tableau de variations de la fonction bénéfice B est

x	0		8		12
$-3x$		$-$		$-$	
$x-8$		$-$	0	$+$	
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$	-126	$\nearrow$	130	$\searrow$	-126

   d) Il faut fabriquer et vendre 800 cartons chaque jour pour réaliser un bénéfice maximal de 130 euros.

Exercice 2. Gaëlle entreprend de suivre un régime afin de perdre du poids, en suivant les conseils d'un nutritionniste. Elle se pèse à la fin de chaque semaine le même jour à la même heure et elle note l'évolution de son poids sur un graphique où le rang de la semaine est placé en abscisse et le poids en ordonnée.



1. Les points du nuage sont approximativement alignés, ainsi un ajustement affine est envisageable.
2. Recopier et compléter le tableau suivant :

Rang de la semaine x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Poids y_i (en kg)	63	62.6	61.4	61	61.2	60.6	60.4	59.8

3. On a $\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8}{8} = 4.5$ et

$$\bar{y} = \frac{63 + 62.6 + 61.4 + 61 + 61.2 + 60.6 + 60.4 + 59.8}{8} = 61.25$$

D'où, les coordonnées du point moyen G du nuage de points sont $(4.5;\ 61.25)$.

4. On admet que la droite d'équation $y = -0.42x + 63.14$ constitue un bon ajustement du nuage.
   a) Comme $-0.42 \times 4.5 + 63.14 = 61.25$, on en déduit que la droite d'ajustement affine passe par le point G.
   b) On peut estiemer son poids au bout de 9 semaines à $-0.42 \times 9 + 63.14 = 59.36$ kg.
   c) (Tracer la droite d'ajustement affine sur le graphe précédent.)
   d) Graphiquement, on estime que Gaëlle devra suivre pendant environ 10 semaines pour que son poids soit inférieur à 59 kg.

   Autre méthode : En utilisant l'équation de la droite d'ajustement, on cherche x le nombre de semaines tel que le poid $y = -0.42x + 63.14 \leq 59$:

$$\begin{aligned}
&-0.42x + 63.14 \leq 59\\
&-0.42x \leq 59 - 63.14\\
&-0.42x \leq -4.14\\
&x \geq \frac{-4.14}{-0.42}\\
&x \geq 9.86
\end{aligned}$$

   D'où, Gaëlle devra suivre son régime pendant environ 10 semaines pour que son poids soit inférieur à 59 kg.

Baccalauréat blanc

vendredi 19 décembre 2014

(corrigé)

Exercice 1. On a rassemblé dans une feuille de calcul les données concernant les déchets ménagers produits et recyclés en France pour les années 2001 à 2007.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
2	Masse de déchets ménagers produits (en milliers de tonne)	30 161	30 823	31 400	32 445	33 363	33 989	34 629	35 425	36 240	37 074	37 926	38 799
3	Indices	100,0	102,2	104,1	107,6	110,6	112,7	114,8					
4	Masse de déchets ménagers recyclés (en milliers de tonne)	4 124	4 426	4 670	4 935	5 365	5 661	5 964	6 340	6 739	7 164	7 615	8 095
5	Taux de recyclage	13,7%	14,4%	14,9%	15,2%	16,1%	16,7%	17,2%	17,9%	18,6%	19,3%	20,1%	20,9%

La plage de cellules B5 :H5 est au format "pourcentage à une décimale près".

1. Dans cette question, on s'intéresse aux déchets ménagers produits entre 2001 et 2007 (arrondis à 0.1% près).
   a) Le taux d'évolution de la masse de déchets ménagers produits entre 2001 et 2007 est $T = \frac{34\ 629-30\ 161}{30\ 161} \simeq 0.148$ soit 14.8%.
   b) Notons qu'il y a $2007-2001 = 6$ évolutions de 2001 à 2007, d'où le taux d'évolution annuel moyen de la masse de déchets ménagers produits entre 2001 et 2007 est
   $$t_M = \Big(1+T\Big)^{1/6} - 1 = \Big(1+0.148\Big)^{1/6} - 1 \simeq 0.023,$$
   soit une évolution moyenne de 2.3%.
   c) L'indice en 2004 est 107.6 à 0.1 près.
2. Dans cette section, on s'intéresse aux déchets ménagers recyclés entre 2001 et 2007.
   a) Le taux d'évolution de la masse de déchets ménagers recyclés entre 2001 et 2007 est $T = \frac{5\ 964-4\ 124}{4\ 124} \simeq 0.446$ soit 44.6%.
   b) De même, il y a 6 évolutions de 2001 à 2007, d'où le taux d'évolution annuel moyen de la masse de déchets ménagers recyclés entre 2001 et 2007 est
   $$t_M = \Big(1+T\Big)^{1/6} - 1 = \Big(1+0.446\Big)^{1/6} - 1 \simeq 0.063,$$
   soit une évolution moyenne de 6.3%.
3. On appelle "taux de recyclage" la proportion de déchets ménagers recyclés parmis les déchets ménagers produits.
   a) La formule qui entrée en cellule $B5$, permet, par recopie vers la droite, d'obtenir le contenu des cellules de B5 :H5 est

```
= B4 / B2
```

b) La valeur affichée dans la cellule H5 est 17.2%.

c) Supposons que l'évolution de la masse de déchets ménagers produits augmente à partir de 2007 chaque année de son taux moyen 2.3% et de même supposons que l'évolution de la masse de déchets ménagers recyclés augmente à partir de 2007 chaque année de son taux moyen 6.3%.
Nous avons calculé les différentes valeurs dans le précédent tableau jusqu'en 2012. On voit qu'en 2012, le taux de recyclage serait de 21.7% et donc l'objectif de 30% de recyclage ne semble pas réaliste.

Exercice 2. Calculons la dérivée de chacune des fonctions $f : [1;\ 10] \to \mathbb{R}$ suivantes :

$f(x) = 3x + 4$	$f'(x) = 3 \times 1 + 0 = 3$
$f(x) = 12x^7$	$f'(x) = 12 \times 7x^6 = 84x^6$
$f(x) = -x^3 + 2x^2 - 1$	$f'(x) = -3x^2 + 4x$
$f(x) = \frac{1}{x} + 2x^5$	$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + 10x^4$

Exercice 3. Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Dans cet exercice, pour chaque question trois réponses sont proposées, **une seule est correcte.** **Pour chaque question, indiquer sur la copie le numéro de la question ainsi que la lettre correspondant à la réponse choisie.**
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse incorrecte ou une absence de réponse n'apporte ni ne retire aucun point.
Soit f la fonction dérivable sur $[-3;\ 4]$ et définie par

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 3$$

On note f' la fonction dérivée de f sur $[-3;\ 4]$.
On donne le tableau de variation de la fonction f sur $[-3 :\ 4]$:

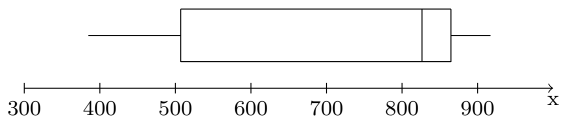
x	-3		-1		3		4
$f(x)$	-24	$\nearrow$ 0	8	$\searrow$ 0	-24	$\nearrow$	-17

1. La dérivée de la fonction f est $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$ (réponse b)).
2. Sur l'intervalle $[-3;\ 4]$, la fonction f' est de signe non constant (réponse c)). C'est dû au fait que d'après le tableau de variation la fonction f change de variation et ainsi la dérivée f' change de signe.
3. Le calcul de $f(-2)$ donne $(-2)^3 - 3(-2)^2 - 9(-2) + 3 = 1$.
4. L'équation $f(x) = 0$ admet sur l'intervalle $[-3;\ 4]$ deux solutions (réponse c)). Voir l'illustration dans le tableau de variation.

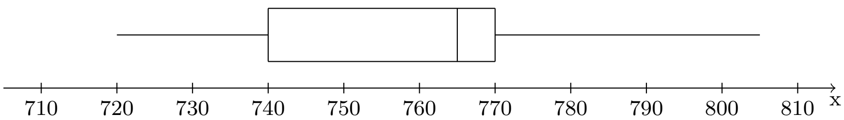
Exercice 4. Le tableau ci-dessous donne le nombre de naissances, en millier par an, en France métropolitaine entre 1901 et 1920.

Année	Nombres de naissances en milliers
1901	917,1
1902	904,4
1903	884,5
1904	877,1
1905	865,6
1906	864,7
1907	829,6
1908	849
1909	824,7
1910	828,1
1911	793,5
1912	801,6
1913	795,9
1914	757,9
1915	483
1916	384,7
1917	412,7
1918	472,8
1919	507
1920	838,1

1. a) La moyenne est $\bar{x} = 744.6$ milliers de naissances.
   b) L'écart type est $\sigma \simeq 174.5$ milliers de naissances.
   c) La médiane est Me $= 826.4$ milliers. Qu'il y a au moins dix années de 1901 à 1920 où il y a eu moins de 826.4 milliers de naissances par an et au moins dix années où il a eu plus de 826.4 milliers de naissances.
   d) Les premier et troisième quartile sont $Q_1 = 507$ millieurs et $Q_3 = 864.7$ milliers.
   e) L'étendue est égale à $\max - \min = 917.1 - 384.7 = 532.4$ milliers.
2. Voici le diagramme en boîte associé à cette série statistique :



3. Le diagramme ci-dessous représente le nombre annuel de naissances durant 20 ans de 1981 à 2000 en milliers, et arrondis à 5 milliers.



   a) La médiane est 765, le premier quartile $Q_1 = 740$ et le troisième quartile $Q_3 = 770$ de cette deuxième série entre 1981 et 2000.
   b) L'étendue de cette deuxième série est $805 - 720 = 85$.
4. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier la réponse.
   a) L'affirmation : "Entre 1981 et 2000, le nombre annuel de naissances est supérieur à 770 000 pendant plus de 16 ans." est fausse. C'est une mauvaise interprétation du troisième quartile. Notons que le nombres d'années de 1981 à 2000 est de 20, ainsi 75% de 20, nous donne 15. Ainsi en revenant à la définition du troisième quatile, on déduit que pendant au moins 15 années le nombre annuel de naissances était **inférieur** à 770 000.
   b) L'affirmation : "L'étendue du nombre annuel de naissances est plus de 5 fois plus élevée entre 1901 et 1920." est vraie, car $5 \times 85 = 425 < 532.4$.
5. Quel contexte historique pourrait justifier la différence d'étendue entre les deux séries. La première guerre mondiale de 1914 à 1918 explique en partie la différence d'étendue.

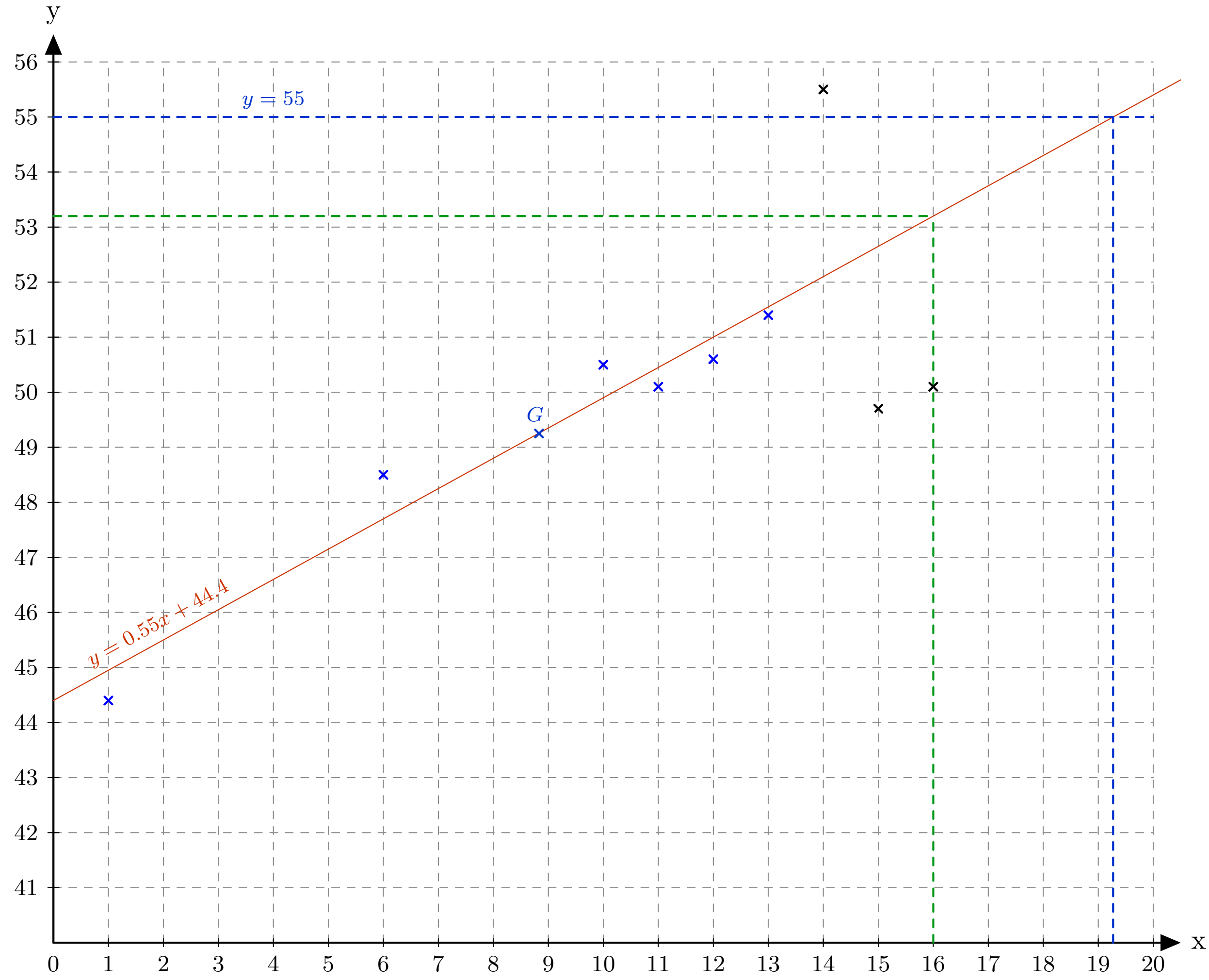
Exercice 5. On s'intéresse à la consommation d'énergie en France, exprimée en millions de tonnes équivalent pétrole (tep) dans le secteur des transports pour les années $1994 + x_i$, ou x_i est un entier naturel,

Année	1995	2000	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Rang de l'années : x_i	1	6	10	11	12	13	14	15	16
Consommation : y_i	44.4	48.5	50.5	50.1	50.6	51.4	55.5	49.7	50.1

A. Représenter le nuage de points $M_i(x_i;\ y_i)$ correspondant aux données de l'énoncé dans un repère d'origine $(0;\ 40)$ d'unités :

— 1 cm pour un an en abscisse,

— 1 cm pour un million de tep en ordonnée.



B. On décide d'effectuer un ajustement affine.

1. a) On a $\bar{x} = \frac{1+6+10+11+12+13}{6} \simeq 8.8$ et $\bar{y} = \frac{44.4+48.5+50.5+50.1+50.6+51.4}{6} = 40.3$, d'où le point point G est de coordonnées $(8.8;\ 49.3)$ à 0.1 près.

   b) (Placer G sur la graphique).

2. Au moyen de la calculatrice, la droite d'ajustement affine (par la méthode des moindres carrées) est d'équation

$$y = 0.551x + 44.384$$

Pour tout la suite de l'exercice, on utilisera la droite d'équation $y = 0.55x + 44.4$

3. (Tracer cette droite sur le graphique).

4. On suppose que cette droite fournit un bon ajustement jusqu'en 2015.
   a) La consommation d'énergie en France pour l'année 2010 (=1994+16) serait de $0.55 \times 16 + 44.4 = 53.2$.
   b) À l'aide du grahique, on déduit que la consommation d'énergie en France dans le secteur des transports dépassera 55 tep en 1996 + 20 = 2016.
   Sinon par le calcul, on cherche le rang de l'année x tel que $0.55x + 44.4 = 55$, d'où

$$\begin{aligned} 0.55x + 44.4 &= 55 \\ 0.55x &= 55 - 44.4 \\ x &= \frac{10.6}{0.55} \simeq 19.27 \end{aligned}$$

   D'où, en 2014 (c'est-à-dire, lorsque $x = 20$), on dépasse les 55 tep.

C. En 2007 s'est déroulé le Grenelle de l'environnement. Pour les années 2008, 2009, 2010, la consommation d'énergie en France s'est élevée respectivement à 55.5 ; 49.7 et 50.1 millions de tep.

1. (Ajouter ces données sur la graphique).
2. Le modèle admis en B.3. n'est plus un bon ajustement affine. D'ailleurs l'ajustement affine n'est plus approprié lui-même car sur le graphique les points ne sont plus approximativement alignés.

Devoir sur table du samedi $n°2$

samedi 7 février 2015

Exercice 1. Le tableau suivant, extrait d'une feuille de tableur, indique le nombre d'habitants de l'unité urbaine de Paris (source : INSEE) pour les quatre années 1968, 1990, 1999 et 2006.

	A	B	C	D	E
1	Année	1968	1990	1999	2006
2	Rang de l'année x	0	22	31	38
3	Population y	8 368 500	9 318 821	9 644 507	10 142 983

Partie A

1. La formule entrée dans la cellule C2 pour obtenir par recopie vers la droite, le rang de l'année est :

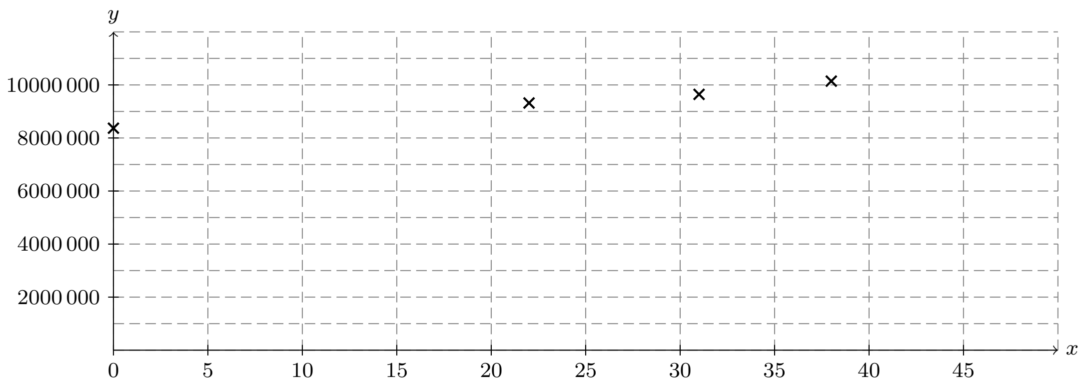
   a. =C1 - B1 **b.** =C1- B1 **c.** = C1 - B1 **d.** =1990 – 1968

Dans les questions suivantes, on exprimera les résultats en pourcentages arrondis à 0,1 %.

2. Quel est le taux d'évolution global de cette population entre 1968 et 2006 ?
3. Quel est le taux d'évolution annuel moyen de cette population entre 1968 et 2006 ?

Partie B

On a représenté dans un repère le nuage de points représentant la population y en fonction du rang de l'année x :



1. À l'aide du tableau précédent, déterminer les coordonnées du point moyen G de la série stastique double $(x_i; y_i)$.
2. On envisage un ajustement affine de ce nuage de points. En utilisant la calculatrice, indiquer une équation de la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés (arrondir les coefficients à l'entier).
3. Dans la suite de l'exercice, on utilisera comme ajustement affine du nuage la droite d'équation $y = 45\,000x + 8\,344\,100$. On suppose cet ajustement valable jusqu'en 2020.
   a) Est-ce que le point moyen G appartient à la droite d'ajustement affine ?
   b) Tracer la droite d'ajustement affine sur la figure précédente.
   c) Quelle serait la population de l'unité urbaine de Paris en 2012 ?

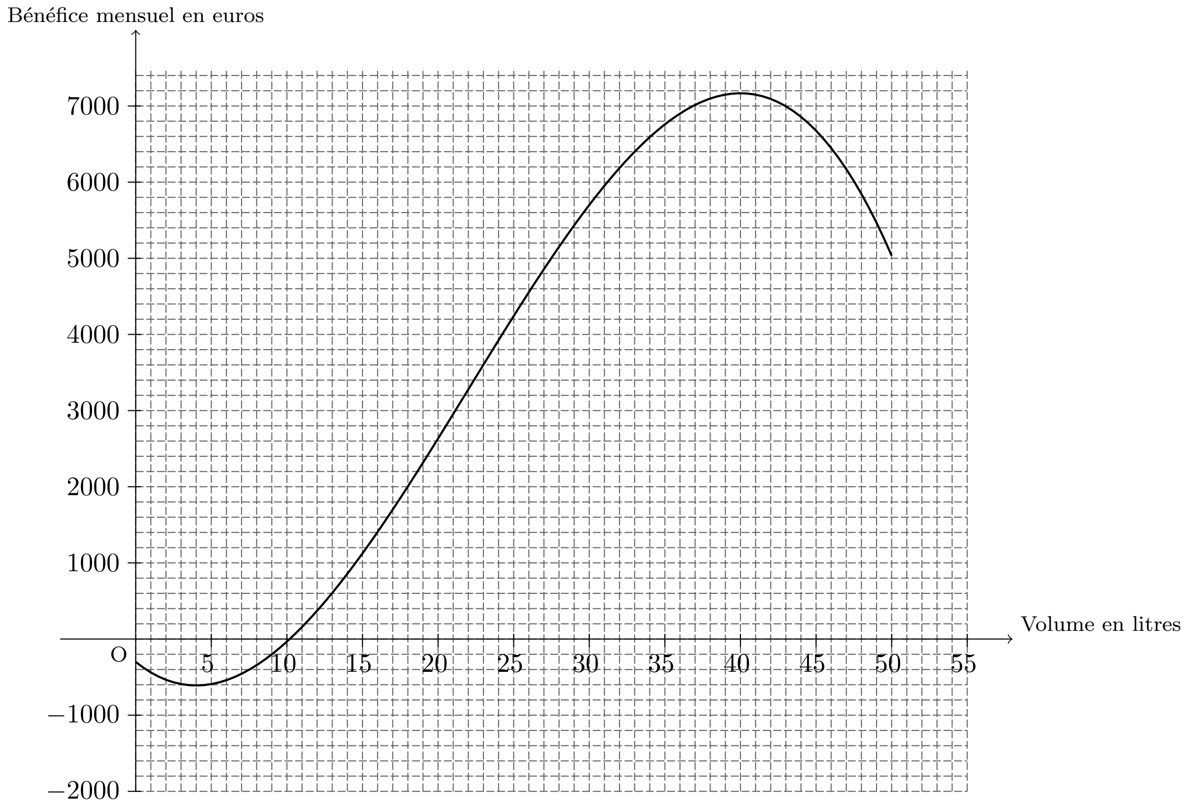
d) En quelle année la population de l'unité urbaine parisienne dépassera-t-elle 11 millions d'habitants ?

Exercice 2.

Partie A : Lectures graphiques

Un laboratoire pharmaceutique fabrique et commercialise un médicament pour injection. Ce laboratoire peut produire entre 0 et 50 litres de ce médicament par mois.

Le bénéfice mensuel (en euros) réalisé par le laboratoire en fonction du volume x (en litres) de médicament produit est donné par la courbe suivante :



Par lecture graphique, déterminer :

1. à partir de quel volume mensuel produit, le laboratoire va être bénéficiaire ;
2. pour quel volume mensuel produit, le bénéfice mensuel est supérieur ou égal à 6000 euros.

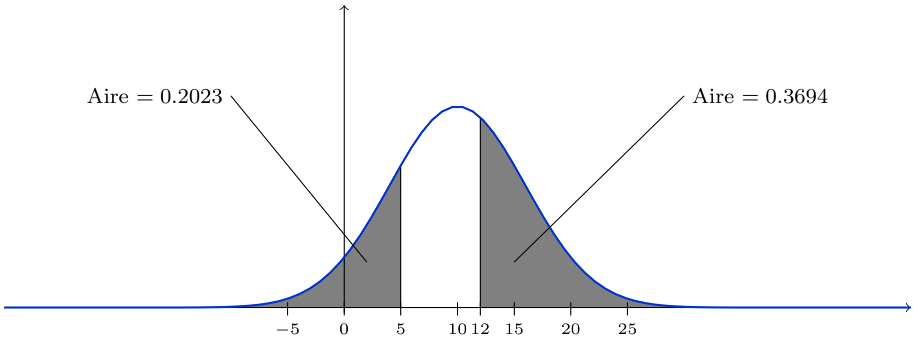
Partie B : Étude du bénéfice mensuel

Ce bénéfice mensuel est modélisé par la fonction B définie pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,50]$ par :

$$B(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 22x^2 - 160x - 300.$$

1. a) Calculer, pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,50]$, $B'(x)$ où B' désigne la fonction dérivée de B.
   b) Vérifier que, pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,50]$, on a : $B'(x) = (x-4)(40-x)$.
   c) En déduire le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $[0\,;\,50]$. On donnera des valeurs arrondies à l'euro près.
2. En déduire le volume mensuel à produire pour obtenir un bénéfice maximal.
   Quel est le montant du bénéfice mensuel maximal arrondi à l'euro près ?

Exercice 3. Une variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu = 10$ et d'écart type $\sigma = 6$. Avec un logiciel, on a affiché, à 10^{-4} près, deux aires sous la courbe de la loi de X.



1. Quelles probabilités peut-on en déduire ?
2. On rappelle que l'aire sous la courbe d'une loi normale est égale à 1.
   a) Calculer l'aire sous la courbe de la partie non colorée.
   b) En déduire la probabilité $P(5 \leq X \leq 12)$.
3. Calculer $P(X \leq \mu)$.
4. À l'aide de la calculatrice, calculer $P(4 \leq X \leq 15)$.

Exercice 4. La gérante d'un magasin d'optique dépose 120 chèques à sa banque.
On prélève un échantillon de 36 chèques parmi les 120 chèques déposés à la banque.
Soit X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement d'un tel échantillon, associe le nombre de chèques dont le montant est supérieur à 200 euros. On considère que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance 18 et d'écart-type 3.

1. Calculer la probabilité d'obtenir :
   a) entre 15 et 21 chèques d'un montant supérieur à 200 euros.
   b) plus de 25 chèques d'un montant supérieur à 200 euros.
2. Calculer $P(X \geq 20)$ et interpréter ce résultat.

DEVOIR SUR TABLE DU SAMEDI $n°2$

corrigé

Exercice 1. Le tableau suivant, extrait d'une feuille de tableur, indique le nombre d'habitants de l'unité urbaine de Paris (source : INSEE) pour les quatre années 1968, 1990, 1999 et 2006.

	A	B	C	D	E
1	Année	1968	1990	1999	2006
2	Rang de l'année x	0	22	31	38
3	Population y	8 368 500	9 318 821	9 644 507	10 142 983

Partie A

1. La formule entrée dans la cellule C2 pour obtenir par recopie vers la droite, le rang de l'année est : `= C1 -$B$1` (réponse b.)

Dans les questions suivantes, on exprimera les résultats en pourcentages arrondis à 0,1 %.

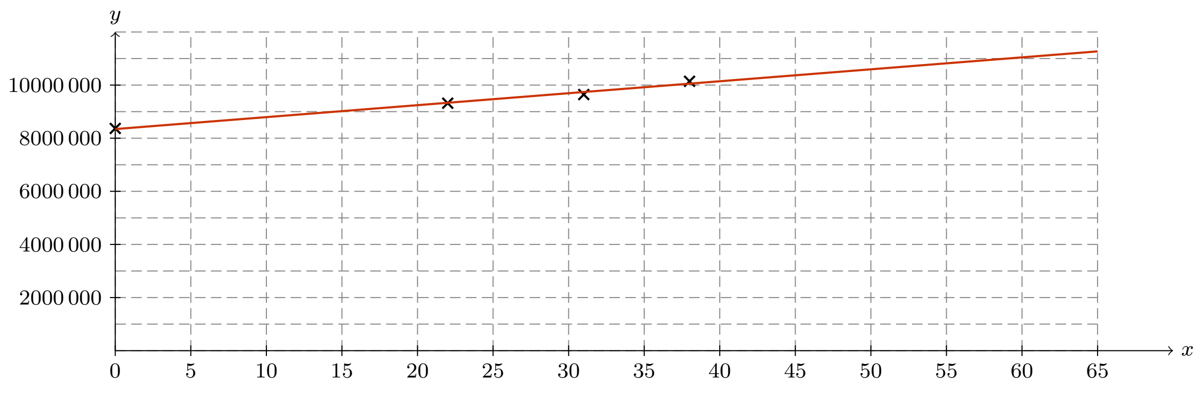
2. Le taux d'évolution global de cette population entre 1968 et 2006 est $\frac{10\,142\,983-8\,368\,500}{8\,368\,500} \simeq 0,212 = 21.2\%$.
3. Il y 38 évolutions de 1968 à 2006, d'où

$$t_M \simeq (1+0,212)^{1/38} - 1 \simeq 0,005 = 0.5\%$$

Donc le taux d'évolution annuel moyen de cette population entre 1968 et 2006 est de $0,5\%$.

Partie B

On a représenté dans un repère le nuage de points représentant la population y en fonction du rang de l'année x :



1. À l'aide du tableau précédent, on note que $\bar{x} = 22.75$ et $\bar{y} \simeq 9\,368\,700$, c'est-à-dire les coordonnées du point moyen G de la série stastique double $(x_i; y_i)$ sont $(22.75; 9\,368\,700)$.
2. On envisage un ajustement affine de ce nuage de points. En utilisant la calculatrice, on obtient qu'une équation de la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés (arrondir les coefficients à l'entier) est la suivante :

$$y = 45\,038\,x + 8\,344079$$

3. Dans la suite de l'exercice, on utilisera comme ajustement affine du nuage la droite d'équation $y = 45\,000x + 8\,344\,100$. On suppose cet ajustement valable jusqu'en 2020.
   a) On note que $45\,000 \times 22.75 + 8\,344\,100 = 9\,367850 \simeq \bar{y}$. Le point moyen G devrait appartenir à la droite d'ajustement affine, or nous utilisons une approximation des coefficients. D'où la petite différence remarquée avec $\bar{y}$.
   b) (Tracer la droite d'ajustement affine sur la figure précédente.)
   c) On peut estimer que la population de l'unité urbaine de Paris en 2012 serait de 10 324 100 habitants.
   d) On note que

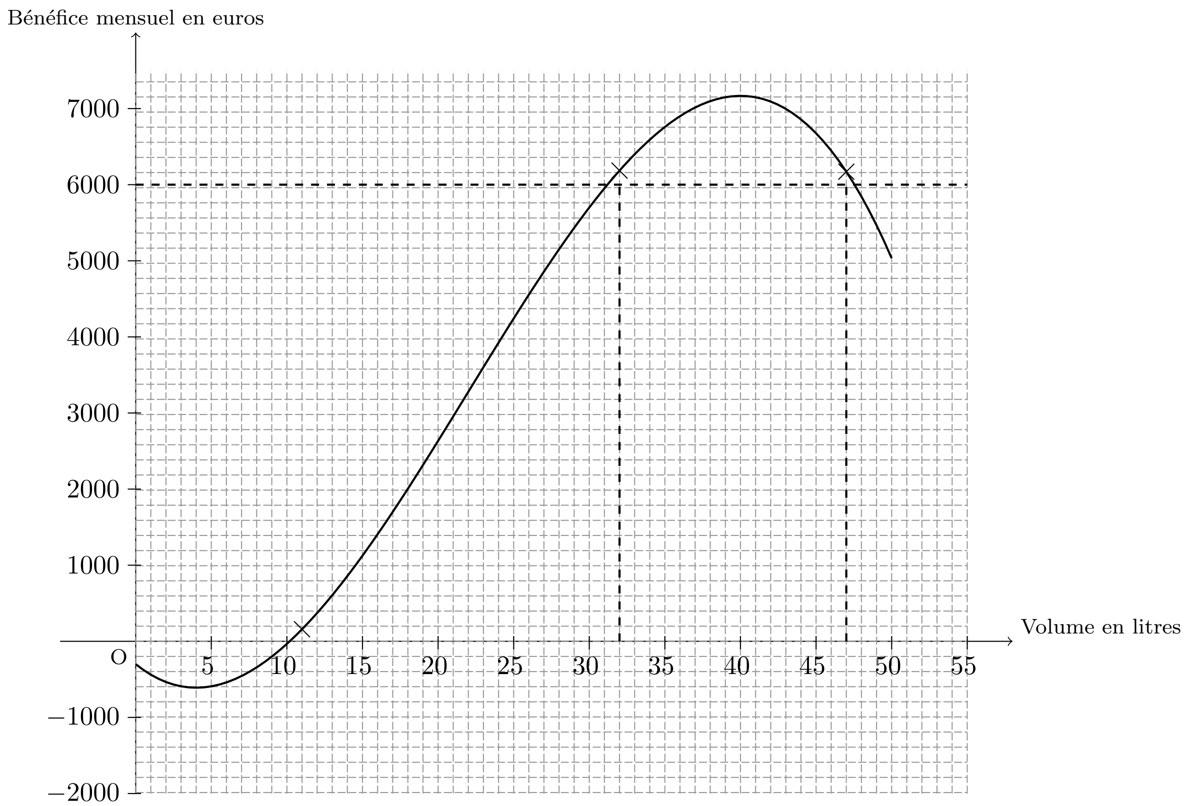
$$\begin{aligned} y = 45\,000\,x + 8\,344\,100 &> 11\,000\,000 \\ 45\,000\,x &> 11\,000\,000 - 8\,344\,100 \\ x &> \frac{2\,655\,900}{45\,000} \\ x &> 59.02 \end{aligned}$$

   et $1968 + 60 = 2028$. Ainsi, on peut estimer qu'en 2028 la population de l'unité urbaine parisienne dépassera les 11 millions d'habitants.

Exercice 2.

Partie A : Lectures graphiques

Un laboratoire pharmaceutique fabrique et commercialise un médicament pour injection. Ce laboratoire peut produire entre 0 et 50 litres de ce médicament par mois.
Le bénéfice mensuel (en euros) réalisé par le laboratoire en fonction du volume x (en litres) de médicament produit est donné par la courbe en annexe 2 à rendre avec la copie.
Par lecture graphique (annexe 2), déterminer :



1. à partir d'un volume de $10l$ mensuel produit, le laboratoire va être bénéficiaire ;

2. pour un volume mensuel produit compris entre 32 et $47l$, le bénéfice mensuel est supérieur ou égal à 6000 euros.

Partie B : Étude du bénéfice mensuel

Ce bénéfice mensuel est modélisé par la fonction B définie pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;50]$ par :

$$B(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 22x^2 - 160x - 300.$$

1. a) Calculer, pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,50]$,

$$B'(x) = -\frac{1}{3} \times 3x^2 + 22 \times 2x - 160 \times 1 = -x^2 + 44x - 160$$

b) Soit x un nombre de l'intervalle $[0\,;\,50]$, on a : $(x-4)(40-x) = 40x - x^2 - 160 + 4x = -x^2 + 44x - 160 = B'(x)$.

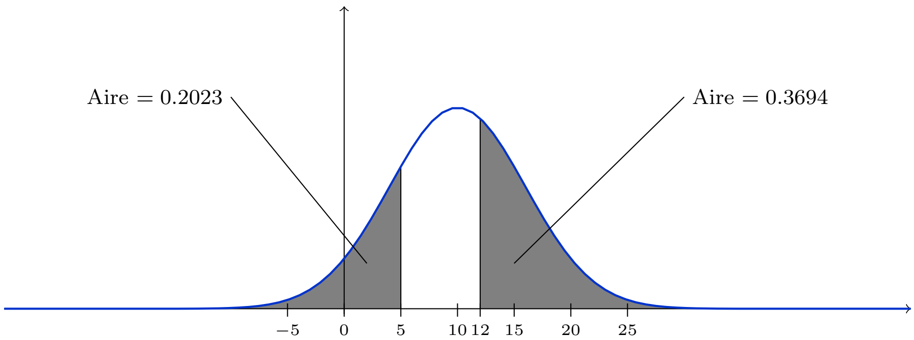
c) Étudier le signe de $B'(x)$ pour tout x dans l'intervalle $[0\,;\,50]$ (voir question suivante).

d) Le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $[0\,;\,50]$ est :

x	0		4		40		50
$x-4$		$-$	0	$+$		$+$	
$40-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$B(x)$	-300	↘	-609	↗	7167	↘	5033

2. Pour obtenir un bénéfice maximal de 7167 euros, il faut produire $40l$.

Exercice 3. Une variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu = 10$ et d'écart type $\sigma = 6$. Avec un logiciel, on a affiché, à 10^{-4} près, deux aires sous la courbe de la loi de X.



1. D'après les indications sur la courbe précédente, on déduit que

$$P(X \leq 5) = 0.2023 \qquad \text{et} \qquad P(12 \leq X) = 0.3694$$

2. On rappelle que l'aire sous la courbe d'une loi normale est égale à 1.

a) L'aire sous la courbe de la partie non colorée est égale à $1 - 0.2023 - 0.3694 = 0.4283$.

b) D'où, par définition, la probabilité $P(5 \leq X \leq 12) = 0.4283$.

3. D'après une propriété vue en cours, $P(X \leq \mu) = \frac{1}{2}$.

4. À l'aide de la calculatrice, on a $P(4 \leq X \leq 15) \simeq 0.6390$. Plus précisément, avec une calculatrice casio, il faut taper la commande suivante :
   `NormCD(4,15,6,10)`

Exercice 4. La gérante d'un magasin d'optique dépose 120 chèques à sa banque.
On prélève un échantillon de 36 chèques parmi les 120 chèques déposés à la banque.
Soit X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement d'un tel échantillon, associe le nombre de chèques dont le montant est supérieur à 200 euros. On considère que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance 18 et d'écart-type 3.

1. La probabilité d'obtenir :
   a) entre 15 et 21 chèques d'un montant supérieur à 200 euros est 0.6827 environ.
   b) plus de 25 chèques d'un montant supérieur à 200 euros est 0.010 environ.
2. Avec la calculatrice, on note que $P(X \geq 20) \simeq 0.2525$. Ce résultat signifie que la probabilité que plus de 20 chèques soit d'un montant supérieur à 200 euros est de 0.2525 environ.

Baccalauréat blanc

vendredi 5 mars 2015

Exercice 1. *Pour chaque question, quatre réponses sont proposées parmi lesquelles* **une seule est correcte**. *Écrire vos réponses sur la copie.*
Dans cet exercice les pourcentages sont arrondis à 0.01%.

Entre 2009 et 2010, une entreprise a vu son chiffre d'affaires diminuer de 23%.
Entre 2010 et 2011 son chiffre d'affaires à augmenté de 6,15%.
En 2009 le chiffre d'affaires était de 572 128 euros.

1. On doit multiplier le chiffre d'affaires de 2009 pour obtenir le chiffre d'affaires de 2010 par
   a) 0,23 b) 0,77 c) -0,23 d) 1,23
2. Le taux d'évolution entre 2011 et 2012 pour que le chiffre d'affaires de 2012 soit le même que celui de 2010 est :
   a) -6,15% b) -5,79% c) -0,06% d) 0,94%
3. Le taux d'évolution global entre 2009 et 2011 est :
   a) 16,85% b) -16,85% c) -18,26% d) +18,26%
4. Le taux moyen semestriel entre 2009 et 2010 est :
   a) -11,5% b) 11,5% c) -12,25% d) -4,26%

Exercice 2. Le tableau ci-dessous indique l'évolution de la dette, en milliards d'euros, de l'État français entre 2000 et 2010.

année	rang : x_i	dette en milliards d'euros : y_i
2000	0	827,3
2001	1	853,3
2002	2	912
2003	3	1004,9
2004	4	1079,5
2005	5	1147,6
2006	6	1152,2
2007	7	1211,6
2008	8	1318,6
2009	9	1492,7
2010	10	1591,2

Source : Insee - Comptes de la Nation - Base 2005

1. L'accroissement annuel moyen de la dette est de 76,39 en milliards d'euros, pour la période 2000-2010.
   Justifier ce résultat par un calcul.

2. a) Représenter, dans l'annexe, le nuage de points $M_i(x_i;\ y_i)$ dans un repère d'unités 1 cm pour un an sur l'axe des abscisses d'unités et 1 cm pour 100 milliards d'euros sur l'axe des ordonnées, en commençant la graduation à 800 milliards d'euros.
   b) La forme du nuage permet-elle d'envisager un ajustement affine ? Justifier.
3. a) En utilisant la calculatrice, donner une équation de la droite de régression de y en x : Les coefficients a et b seront arrondis à 0,1 près.
   b) Tracer la droite de régression dans la figure en annexe.
   c) Estimer le montant de la dette prévue pour l'année 2013 selon cet ajustement affine.
4. Selon une dépêche de l'AFP (Agence France-Presse) datée du 29/06/2012 :

   AFP : *La dette publique de la France a nettement augmenté au premier trimestre 2012 par rapport à la fin décembre 2011, gagnant 72,4 milliards d'euros pour s'établir à 1 789,4 milliards d'euros fin mars, soit 89,3% du produit intérieur brut (PIB), a annoncé vendredi l'Insee.*

   Peut-on dire que la dette a augmenté plus rapidement que ne le prévoyait le modèle de la question 3. ? Argumenter la réponse.

Exercice 3. Une société de vente en ligne vend des DVD. Lorsqu'un client reçoit un DVD défectueux, il le renvoie pour échange au service après-vente.
On admet que la variable aléatoire X qui, à chaque client concerné prélevé au hasard, associe le nombre de jours entre la date de renvoi du DVD défectueux et la date de réception du DVD de remplacement, suit la loi normale d'espérance 8 jours et d'écart type 2,75 jours.
On considère qu'un client se déclare satisfait du service après-vente si son délai d'attente ne dépasse pas 10 jours.

1. *Les probabilités demandées seront arrondies à* 10^{-2} *près.*
   On choisit au hasard un client concerné.
   a) Calculer la probabilité que le délai d'attente du client soit compris entre 2 jours et 10 jours.
   b) Calculer la probabilité que le délai d'attente du client soit inférieur à 8 jours.
   c) Calculer la probabilité que le client soit satisfait du service après-vente.
   d) En déduire la probabilité qu'il ne soit pas satisfait du service après-vente.
2. La société a pour objectif que 85% des clients concernés soient satisfaits. Elle effectue un sondage auprès de 200 de ces clients pris au hasard : 168 se déclarent satisfaits.
   a) Déterminer la proportion de clients satisfaits.
   b) À partir de cet échantillon, la société peut-elle déclarer, au risque 5%, que son objectif est atteint ?

Exercice 4. Une entreprise décide de fabriquer et commercialiser un produit. Sa capacité maximale de production mensuelle est de 24 tonnes.
Le coût, en euros, d'une production mensuelle de x tonnes est modélisé par :

$$C(x) = x^3 - 36x^2 + 445x$$

pour tout réel x tel que $0 \leq x \leq 24$.

Partie A Étude du coût moyen

On rappelle que le coût moyen de fabrication noté C_M est donné en fonction de x par :

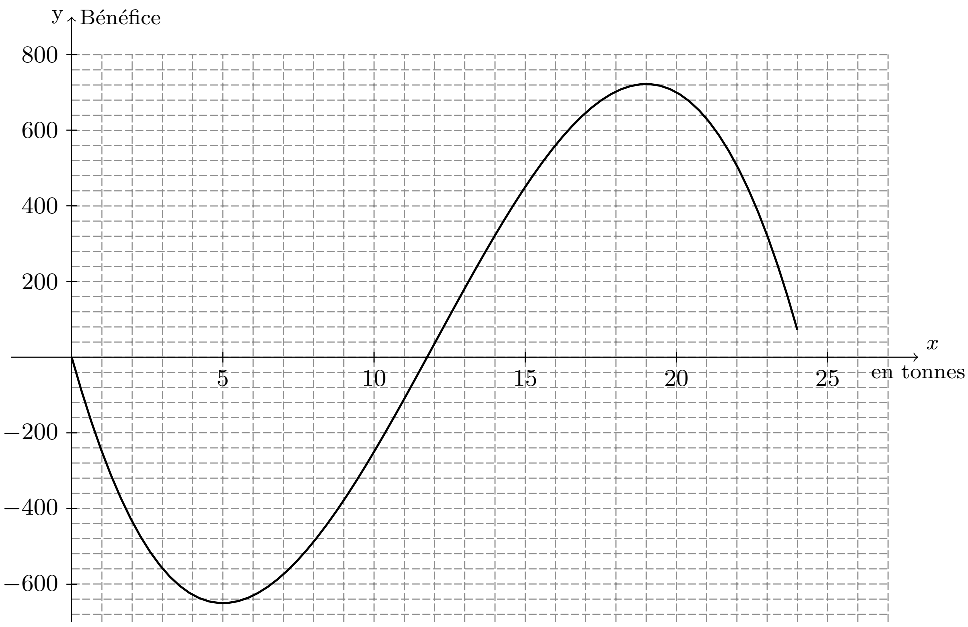
$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x} = x^2 - 36x + 445.$$

On désigne par C'_M la fonction dérivée de la fonction C_M.

1. Calculer $C'_M(x)$.
2. Étudier le signe de $C'_M(x)$; en déduire les variations de la fonction C sur $]0;\ 24]$.
   On dressera le tableaux de variation de la fonction de coût moyen sur l'intervalle $]0;\ 24]$.
3. En déduire le coût moyen minimum, en euros par tonne.

Partie B Étude du bénéfice.

Après une étude de marché, l'entreprise décide de vendre son produit 160 euros la tonne.
On admet que tout produit fabriqué est vendu le mois de sa fabrication.
On note que $B(x)$ le bénéficie mensuel, en euros, réalisé par la vente de x tonnes de ce produit, en euros.
La représentation graphique de la fonction B est donnée ci-après.



1. a) Montrer que le bénéfice s'exprime par :

$$B(x) = -x^3 + 36x^2 - 285x$$

   sur $[0;\ 24]$.

   b) Calculer le bénéfice pour la vente de 15 tonnes de ce produit.
2. a) Calculer $B'(x)$, où B' est la dérivée de B.

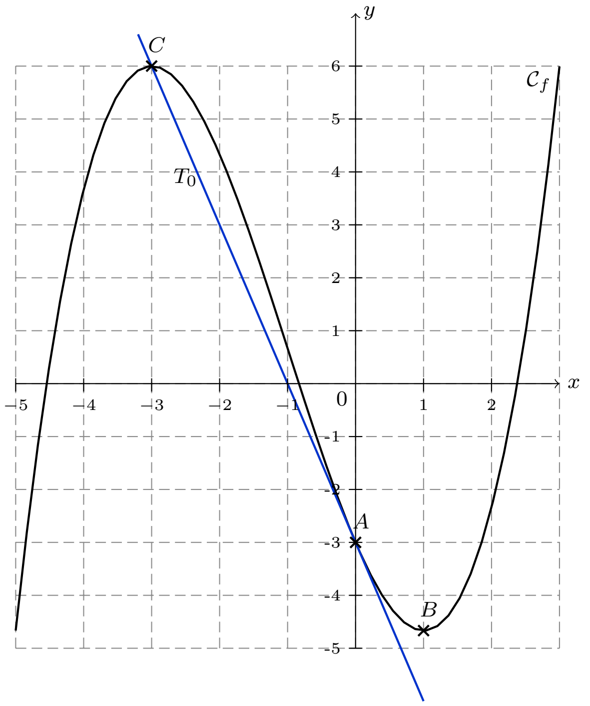
   b) Vérifier qu'on a $B'(x) = -3(x-5)(x-19)$.

   c) En déduire le tableau de variation de la fonction B sur l'intervalle $[0;\ 24]$.
3. Quel est le bénéfice mensuel maximum réalisé par l'entreprise ?
   Pour quelle production mensuelle ?
4. Pour quelles valeurs de la production mensuelle l'entreprise est-elle déficitaire ?
   On répondra à cette question avec la précision permise par le graphique.

Exercice 5. *Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.*
Pour chaque question, quatre réponses sont proposées, parmi lesquelles une seule est correcte.
Indiquez sur la copie le numéro de la question ainsi que la lettre correspondant à la la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse correcte rapporte 1 *point ; une absence de réponse ou une réponse fausse ne rapporte et n'enlève aucun point.*

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[-5\ ;\ 3]$ dont la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous.

Soit A le point de $\mathcal{C}_f$ de coordonnées $(0\ ;\ -3)$, B et C les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectivement égales à 1 et à -3. La tangente T_0 en A à $\mathcal{C}_f$ passe par le point C. Les tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points B et C sont horizontales.



1. $f(1)$ est égal à :

   a. -3 **b.** 2,3

   c. -1 **d.** $-4,6$

2. Le nombre dérivé en 1 de la fonction f est égal à :

   a. $-4,7$ **b.** -3

   c. 0 **d.** 1

3. Une équation de la tangente T_0 est :

   a. $y = -3x - 3$ **b.** $y = -x - 3$

   c. $y = -3x$ **d.** $y = -3$

4. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Sur l'intervalle $[-4\ ;\ -2]$, on peut affirmer que :

   a. f' est positive

   b. f' change de signe

   c. f' est partout nulle

   d. f' est négative

Baccalauréat blanc

vendredi 5 mars 2015

(corrigé)

Exercice 1. *Pour chaque question, quatre réponses sont proposées parmi lesquelles* **une seule est correcte**. *Écrire vos réponses sur la copie.*
Dans cet exercice les pourcentages sont arrondis à 0.01%.

Entre 2009 et 2010, une entreprise a vu son chiffre d'affaires diminuer de 23%.
Entre 2010 et 2011 son chiffre d'affaires à augmenté de 6,15%.
En 2009 le chiffre d'affaires était de 572 128 euros.

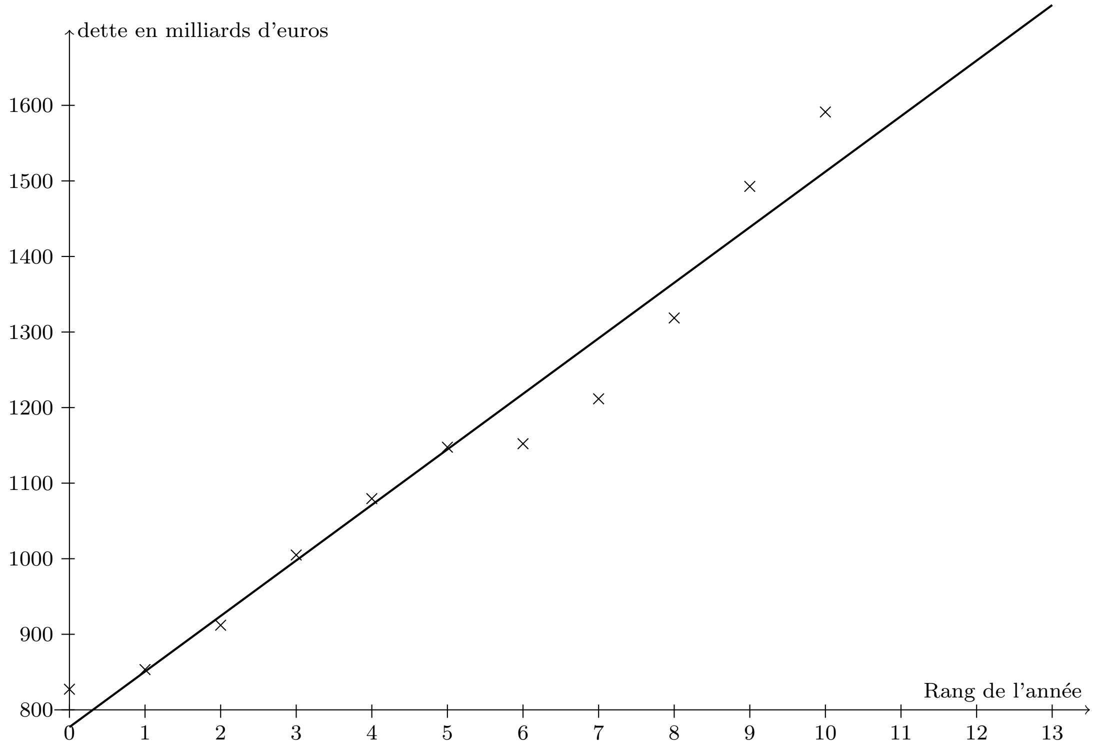
1. On doit multiplier le chiffre d'affaires de 2009 pour obtenir le chiffre d'affaires de 2010 par
   b) $0,77 = 1 - \frac{23}{100}$
2. Le taux d'évolution entre 2011 et 2012 pour que le chiffre d'affaires de 2012 soit le même que celui de 2010 est :
   b) t = -5,79%
   En effet, le taux d'évolution t doit vérifier la relation suivante
   $$(1 + \frac{6.15}{100})(1 + t) = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad t = \frac{1}{1.0615} - 1 \simeq 0.0579$$
3. Le taux d'évolution global entre 2009 et 2011 est :
   c) $-18,26\% = (1 + t_1) \times (1 + t_2) - 1 = 0.77 \times 1.0615 - 1 - 1$, où t_1 est le taux d'évolution de 2009 à 2010 et t_2 le taux d'évolution de 2010 à 2011.
4. Le taux moyen semestriel entre 2009 et 2010 est :
   c) $-12,25\% \simeq \sqrt{1 + t_1} - 1 = \sqrt{0.77} - 1$

Exercice 2. Le tableau ci-dessous indique l'évolution de la dette, en milliards d'euros, de l'État français entre 2000 et 2010.

année	rang : x_i	dette en milliards d'euros : y_i
2000	0	827,3
2001	1	853,3
2002	2	912
2003	3	1004,9
2004	4	1079,5
2005	5	1147,6
2006	6	1152,2
2007	7	1211,6
2008	8	1318,6
2009	9	1492,7
2010	10	1591,2

Source : Insee - Comptes de la Nation - Base 2005

1. L'accroissement annuel moyen de la dette est de $\frac{1591.2-827.3}{10} = 76,39$ en milliards d'euros, pour la période 2000-2010.
2. a) Représenter, dans l'annexe, le nuage de points $M_i(x_i;\ y_i)$ dans un repère d'unités 1 cm pour un an sur l'axe des abscisses d'unités et 1 cm pour 100 milliards d'euros sur l'axe des ordonnées, en commençant la graduation à 800 milliards d'euros.



   b) La forme du nuage permet d'envisager un ajustement affine car les points sont approximativement alignés.
3. a) À l'aide de la calculatrice, on obtient l'équation de la droite de régression de y en x :

$$y = 73.5x + 777.2$$

   b) (Tracer la droite de régression dans la figure en annexe.)

   c) Le montant de la dette prévue pour l'année 2013 selon cet ajustement affine est $73.5 \times 13 + 777.2 = 1732.7$ milliards d'euros.
4. Selon une dépêche de l'AFP (Agence France-Presse) datée du 29/06/2012 :

   AFP : *La dette publique de la France a nettement augmenté au premier trimestre 2012 par rapport à la fin décembre 2011, gagnant 72,4 milliards d'euros pour s'établir à 1 789,4 milliards d'euros fin mars, soit 89,3% du produit intérieur brut (PIB), a annoncé vendredi l'Insee.*

   Peut-on dire que la dette a augmenté plus rapidement que ne le prévoyait le modèle de la question 3. ?
   Oui. En effet, en 2012, d'après le modèle, la dette aurait du être de $73.5 \times 12 + 777.2 = 1\ 659.2$ milliards d'euros , ce qui est largement inférieur au 1 789.4 milliards d'euros atteint fin mars 2012.

Exercice 3. Une société de vente en ligne vend des DVD. Lorsqu'un client reçoit un DVD défectueux, il le renvoie pour échange au service après-vente.
On admet que la variable aléatoire X qui, à chaque client concerné prélevé au hasard, associe le nombre

de jours entre la date de renvoi du DVD défectueux et la date de réception du DVD de remplacement, suit la loi normale d'espérance 8 jours et d'écart type 2,75 jours.
On considère qu'un client se déclare satisfait du service après-vente si son délai d'attente ne dépasse pas 10 jours.

1. *Les probabilités demandées seront arrondies à* 10^{-2} *près.*
   On choisit au hasard un client concerné.
   a) La probabilité que le délai d'attente du client soit compris entre 2 jours et 10 jours est $P(2 \leq X \leq 10) \simeq 0.75$.
   b) La probabilité que le délai d'attente du client soit inférieur à 8 jours est 0.5 car l'espérance de X est 8.
   c) La probabilité que le client soit satisfait du service après-vente est $P(X < 10) \simeq 0.77$.
   d) On en déduit que la probabilité qu'il ne soit pas satisfait du service après-vente est $1-P(X < 10) \simeq 0.23$.
2. La société a pour objectif que 85% des clients concernés soient satisfaits. Elle effectue un sondage auprès de 200 de ces clients pris au hasard : 168 se déclarent satisfaits.
   a) La proportion de clients satisfaits est $f = \frac{168}{200} = 0.84$.
   b) L'intervalle de fluctuation à au moins 95% de la proportion $p = 0.85$ est

$$I = [p - \frac{1}{\sqrt{n}};\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}] = [0.85 - \frac{1}{\sqrt{200}};\ 0.85 + \frac{1}{\sqrt{200}}] \simeq [0.78;\ 0.92]$$

   On note que la fréquence observée $f = 0.84$ appartient à l'intervalle de fluctuation I, ainsi la société peut déclarer, au risque 5%, que son objectif est atteint.

Exercice 4. Une entreprise décide de fabriquer et commercialiser un produit. Sa capacité maximale de production mensuelle est de 24 tonnes.
Le coût, en euros, d'une production mensuelle de x tonnes est modélisé par :

$$C(x) = x^3 - 36x^2 + 445x$$

pour tout réel x tel que $0 \leq x \leq 24$.

Partie A Étude du coût moyen

On rappelle que le coût moyen de fabrication noté C_M est donné en fonction de x par :

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x} = x^2 - 36x + 445.$$

On désigne par C'_M la fonction dérivée de la fonction C_M.

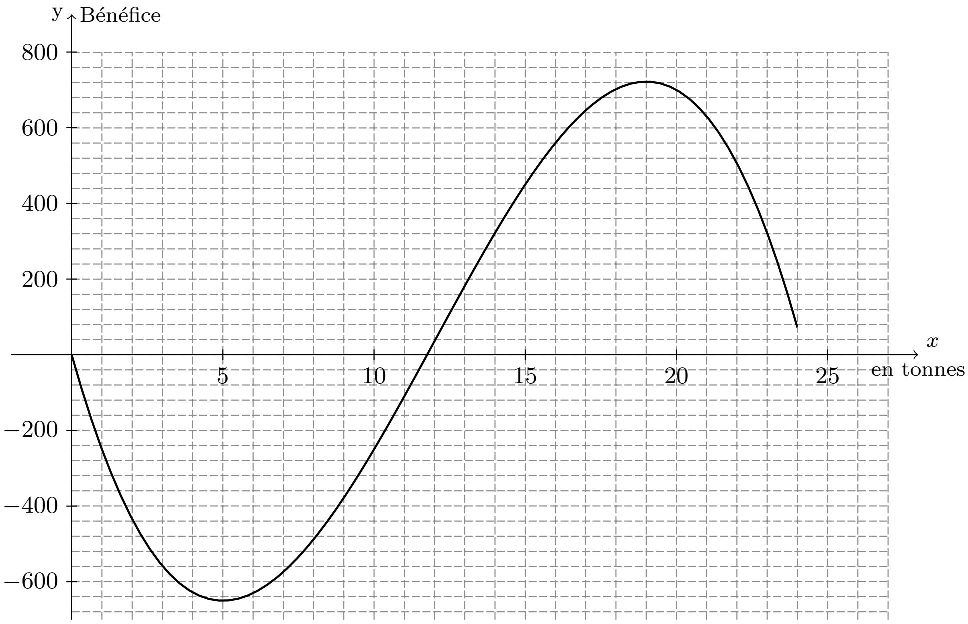
1. On a $C'_M(x) = 2x - 36$.
2. Le tableaux de variation de la fonction de coût moyen sur l'intervalle $]0;\ 24]$ est

x	0		18		24
$C'_M(x)$ $= 2x - 36$		$-$	0	$+$	
$C_M(x)$	445	↘	121	↗	157

3. Ainsi, le coût moyen minimum est 121 euros pour 18 tonnes produites.

Partie B Étude du bénéfice.

Après une étude de marché, l'entreprise décide de vendre son produit **160 euros la tonne**.
On admet que tout produit fabriqué est vendu le mois de sa fabrication.
On note que $B(x)$ le bénéficie mensuel, en euros, réalisé par la vente de x tonnes de ce produit, en euros.
La représentation graphique de la fonction B est donnée ci-après.



1. a) D'après l'énonce l'entreprise vend son produit 160 euros la tonne, d'où le bénéfice est :

$$B(x) = 160\times x - x\times C_M(x) = 160x - x(x^2-36x+445) = 160x - x^3+36x^2-445x = -x^3+36x^2-285x$$

sur $[0;\ 24]$.

   b) Le bénéfice pour la vente de 15 tonnes de ce produit est $B(15) = -15^3 + 36\times 15^2 - 285\times 15 = 450$ euros.

2. a) La dérivée de B est définie par $B'(x) = -3x^2 + 72x - 285$.

   b) Notons que $-3(x-5)(x-19) = -3\left(x^2 - 19x - 5x + 5\times 19\right) = -3x^2 + 72x - 285 = B'(x)$.

   c) Ainsi le tableau de variation de la fonction B sur l'intervalle $[0;\ 24]$ est :

x	0		5		19		24
-3		$-$		$-$		$-$	
$x-5$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-19$		$-$		$-$	0	$+$	
$B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$B(x)$	0	$\searrow$	-650	$\nearrow$	722	$\searrow$	72

3. Le bénéfice mensuel maximum réalisé par l'entreprise est 722 euros pour une production mensuelle de 19 tonnes.

4. À l'aide du graphique, on note que l'entreprise est déficitaire lorsqu'elle produit environ moins de 11.7 tonnes.

Exercice 5. *Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.*
Pour chaque question, quatre réponses sont proposées, parmi lesquelles une seule est correcte.
Indiquez sur la copie le numéro de la question ainsi que la lettre correspondant à la la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse correcte rapporte 1 *point ; une absence de réponse ou une réponse fausse ne rapporte et n'enlève aucun point.*

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[-5\ ;\ 3]$ dont la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous.

Soit A le point de $\mathcal{C}_f$ de coordonnées $(0\ ;\ -3)$, B et C les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectivement égales à 1 et à -3. La tangente T_0 en A à $\mathcal{C}_f$ passe par le point C. Les tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points B et C sont horizontales.

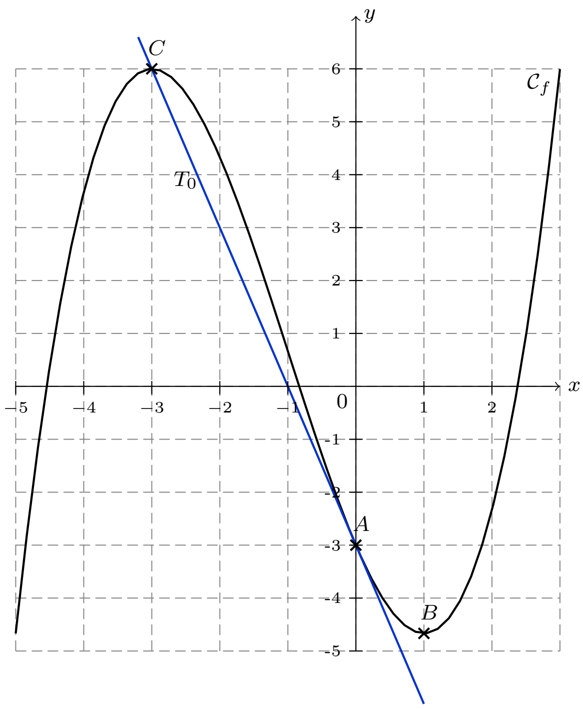
1. $f(1)$ est égal à :

   d. $-4,6$

2. Le nombre dérivé en 1 de la fonction f est égal à : **c.** 0

3. Une équation de la tangente T_0 est : **a.** $y = -3x - 3$

4. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Sur l'intervalle $[-4\ ;\ -2]$, on peut affirmer que :
   b. f' change de signe



Devoir sur table du samedi $n°3$

samedi 21 mars 2015

Exercice 1. M. Ka vend des boissons rafraichissantes. Il note, six jours de suite, la température maximale d'une journée et les ventes réalisées au cours de cette journée. Les résulats sont donnés dans le tableau suivant

Jour	1er	2e	3e	4e	5e	6e
Température (en °C), x_i	18	20	22	26	28	30
Nombre de boissons vendues, y_i	24	44	62	100	132	148

1. a) Représenter le nuage de points de la série statistique (x_i, y_i). (Axes orthogonaux ; unités : 1cm pour $1\,^oC$ en abscisse, en commençant à l'abscisse 17 ; 1cm pour 10 boissons en ordonnée).
   b) Indiquer pourquoi un ajustement affine est envisageable.
2. a) À l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, déterminer l'équation
$$y = ax + b$$
   de la droite d'ajustement par la méthode des moindres carrés. Le coefficient directeur a et l'ordonnée à l'origine b seront arrondis à 10^{-2} près.
   b) Tracer cette droite sur le graphique.
3. On choisit cette droite pour droite d'ajustement du nuage de points.
   Estimer par le calcul :
   a) le nombre de boissons vendues pour une température supérieure de $5\,^oC$ à celle du 6e jour ;
   b) le nombre de boissons que vendrait M. Ka pour une température de $25\,^oC$.
4. Contrôler graphiquement les résultats de la question 3., en faisant apparaître les tracés utiles.
5. En fait, la température a augmenté de 20% du 6e au 7e jour.
   a) Calculer la température du 7e jour.
   b) En déduire une estimation du nombre de boissons vendues le 7e jour, à l'aide de l'équation de la droite d'ajustement.

Exercice 2. Monsieur X possède depuis le 1er janvier 2010 une messagerie électronique professionnelle, sur laquelle il conserve tous les messages reçus ou envoyés, en les classant par année.
Il a constaté au 31 décembre 2010 que la taille du dossier contenant les messages de l'année 2010 était de 4 mégaoctets (Mo).
Une étude a montré que la taille des messages électroniques professionnels augmentait en moyenne de 5% par an. On fait l'hypothèse que cette augmentation se maintient au moins jusqu'en 2016.

On note u_n la taille, en mégaoctets, du dossier contenant les messages de l'année $(2010 + n)$. selon le modèle décrit précédemment. On a donc $u_0 = 4$.
On utilise une feuille de calcul d'un tableur pour observer l'évolution de la taille de l'ensemble des dossiers de Monsieur X depuis 2010.

	A	B	C	D
1	Année	n	u_n	Taille de l'ensemble des dossiers (en Mo)
2	2010	0	4,00	4,00
3	2011	1	4,20	8,20
4	2012	2	4,41	12,61
5	2013	3		
6	2014	4		
7	2015	5		
8	2016	6		

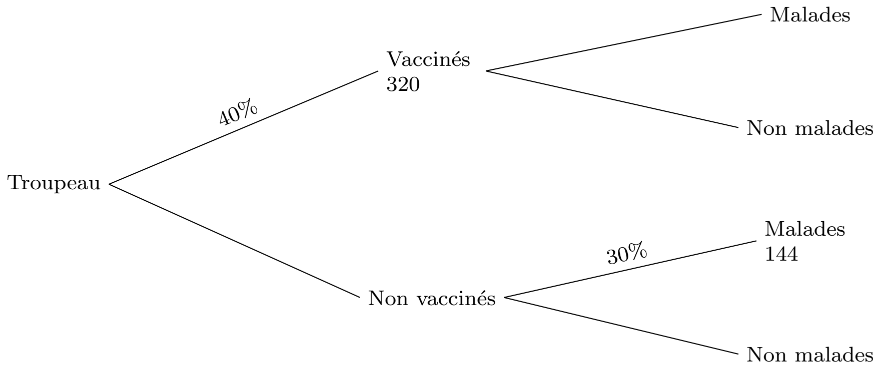
1. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser sa raison.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Selon ce modèle, calculer la taille, à $0,01$ Mo près, du dossier de l'année 2016.
4. a) Donner une formule qui, saisie dans la cellule C3, puis recopiée vers le bas, permet d'obtenir les valeurs de la colonne C.
   b) Parmi les formules suivantes, indiquer toutes celles qui, saisies dans la cellule D3, puis recopiées vers le bas, permettent d'obtenir les valeurs de la colonne D.
   =SOMME(C2 :C3)   =SOMME(C2 :C3)   =D2+C3   =D2+C3
5. a) Calculer la taille, à 0,01 Mo près, de l'ensemble des dossiers au 31 décembre 2016.
   b) La capacité de stockage de la messagerie est limitée à 30 mégaoctets. Peut-on estimer que Monsieur X pourra conserver la totalité de ses messages ? Justifier.

Exercice 3. Le chiffre d'affaires du commerce éléctronique en France est passé de 11,6 milliards d'euros en 2006 à 25 milliards d'euros en 2009.

1. Calculer, arrondi à 0.1 près, le taux d'évolution du chiffre d'affaires de 2006 à 2009.
2. Calculer, arrondi à 0.1 près, le taux d'évolution annuel moyen du chiffre d'affaires.
3. En 2010, le chiffre d'affaires a augmenté de 24% par rapport à 2009. Calculer le chiffre d'affaires de 2010.

Exercice 4. Face à la menace d'une épidémie frappant les troupeaux de bovins, les services sanitaires décident d'organiser une vaccination de masse sur 800 bovins.
40% des animaux ont été vaccinés. Les experts considèrent que 30% des animaux non vaccinés contracteront la maladie tandis que 1% des animaux vaccinés contracteront quand même la maladie.

1. Compléter l'arbre



2. Justifier qu'il y a environ 3 bovins vaccinés malades.
3. Calculer le nombre estimé de bovins malades.
4. Compléter le tableau à deux entrées suivant :

	Malades	Non malades	Total
Vaccinés			
Non vaccinés			
Total			

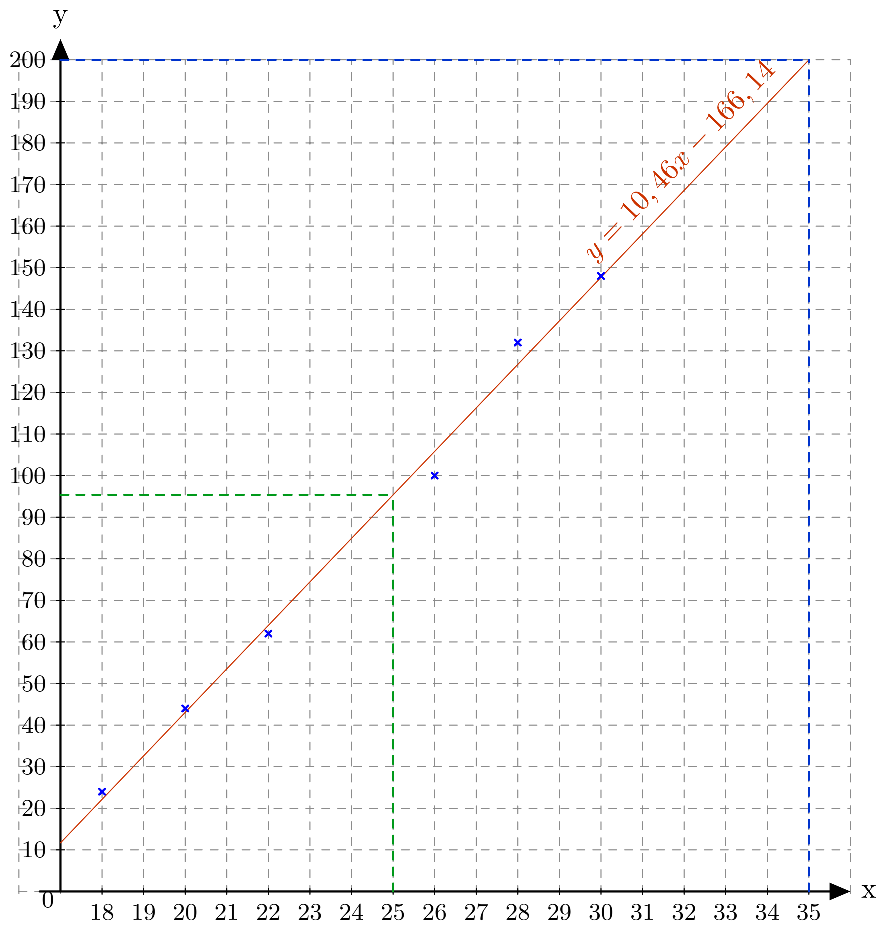
Devoir sur table du samedi $n°3$

corrigé

Exercice 1. M. Ka vend des boissons rafraichissantes. Il note, six jours de suite, la température maximale d'une journée et les ventes réalisées au cours de cette journée. Les résulats sont donnés dans le tableau suivant

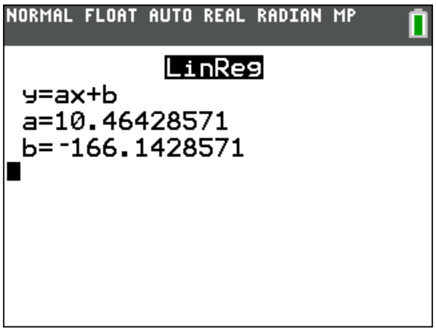
Jour	1er	2e	3e	4e	5e	6e
Température (en °C), x_i	18	20	22	26	28	30
Nombre de boissons vendues, y_i	24	44	62	100	132	148

1. a) Représenter le nuage de points de la série statistique (x_i, y_i). (Axes orthogonaux ; unités : 1cm pour $1\,^oC$ en abscisse, en commençant à l'abscisse 17 ; 1cm pour 10 boissons en ordonnée).



   b) D'après le graphique précédent, les points sont relativement alignées d'où, un ajustement affine est envisageable.

2. a) À l'aide d'une calculatrice, on a



Ainsi, l'équation de la droite d'ajustement par la méthode des moindres carrés est

$$y = 10,46\,x - 166,14$$

où le coefficient directeur a et l'ordonnée à l'origine b ont été arrondis à 10^{-2} près.

b) Voir le graphique ci-dessus pour une représentation de la droite d'ajustement.

3. On choisit cette droite pour droite d'ajustement du nuage de points.
Estimer par le calcul :

   a) le nombre de boissons vendues pour une température supérieure de $5\,^oC$ à celle du 6^e jour (c'est-à-dire $35\,^oC$) est égal à

   $$10,46 \times 35 - 166.14 \simeq 200$$

   b) le nombre de boissons que vendrait M. Ka pour une température de $25\,^oC$ est

   $$10,46 \times 25 - 166.14 \simeq 95$$

4. (Contrôler graphiquement les résultats de la question 3., en faisant apparaître les tracés utiles).
5. En fait, la température a augmenté de 20% du 6^e au 7^e jour.

   a) La température du 7^e jour est alors de $30 \times (1 + \frac{20}{100}) = 30 \times 1.2 = 36$.

   b) À l'aide de l'équation de la droite d'ajustement, on peut estimer à $10,46 \times 36 - 166,14 \simeq 210$ le nombre de boissons vendues le 7e jour.

Exercice 2. Monsieur X possède depuis le 1er janvier 2010 une messagerie électronique professionnelle, sur laquelle il conserve tous les messages reçus ou envoyés, en les classant par année.
Il a constaté au 31 décembre 2010 que la taille du dossier contenant les messages de l'année 2010 était de 4 mégaoctets (Mo).
Une étude a montré que la taille des messages électroniques professionnels augmentait en moyenne de 5% par an. On fait l'hypothèse que cette augmentation se maintient au moins jusqu'en 2016.

On note u_n la taille, en mégaoctets, du dossier contenant les messages de l'année $(2010 + n)$. selon le modèle décrit précédemment. On a donc $u_0 = 4$.
On utilise une feuille de calcul d'un tableur pour observer l'évolution de la taille de l'ensemble des dossiers de Monsieur X depuis 2010.

Année	n	u_n	Taille de l'ensemble des dossiers (en Mo)
2010	0	4,00	4,00
2011	1	4,20	8,20
2012	2	4,41	12,61
2013	3	4,63	17,24
2014	4	4,86	22,10
2015	5	5,11	27,21
2016	6	5,36	32,57

1. La suite(u_n) est géométrique de raison $q = 1 + \frac{5}{100} = 1.05$.
2. Ainsi, d'après une propriété du cours, $u_n = u_0 \times q^n = 4 \times 1.05^n$.
3. Selon ce modèle, la taille, à $0,01$ Mo près, du dossier de l'année 2016 (2010 + 6) est $u_6 \simeq 5.36$ Mo.
4. a) La formule qui, saisie dans la cellule C3, puis recopiée vers le bas, permet d'obtenir les valeurs de la colonne C est $= C2 * 1.05$.

   b) Les formules suivantes, saisies dans la cellule D3, puis recopiées vers le bas, permettent d'obtenir les valeurs de la colonne D :
   =SOMME(C2 :C3) =D2+C3
5. a) D'après le précédent tableau, la taille, à 0,01 Mo près, de l'ensemble des dossiers au 31 décembre 2016 est 32,57 Mo.
   Pour faire le calcul, avec la calculatrice, il faut taper l'une des formules suivantes (en fonction du modèle)
   $$\sum_{X=0}^{6} 4 \times 1.05^X \quad \text{ou} \quad \text{sum(seq(4×1.05ˆ X,X,0,6))}$$

   b) La capacité de stockage de la messagerie est limitée à 30 mégaoctets. D'après la question précédente, Monsieur X ne pourra donc pas conserver la totalité de ses messages.

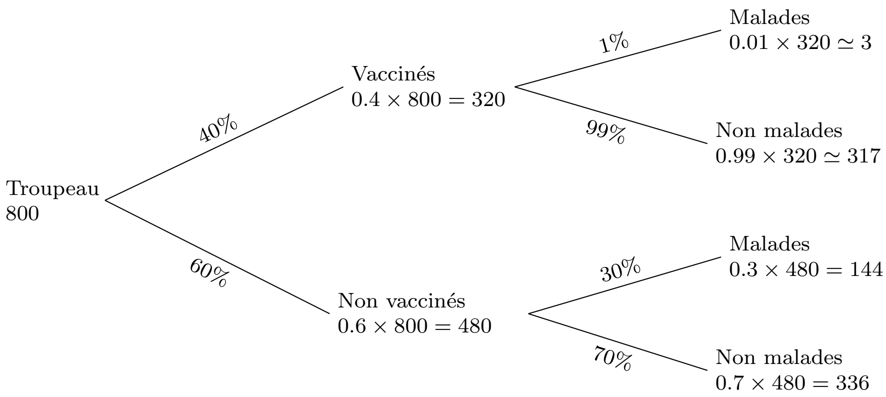
Exercice 3. Le chiffre d'affaires du commerce éléctronique en France est passé de 11,6 milliards d'euros en 2006 à 25 milliards d'euros en 2009.

1. On note que
   $$t = \frac{25 - 11.6}{11.6} \simeq 1.2$$
   Le taux d'évolution du chiffre d'affaires de 2006 à 2009 est d'environ 1.2 soit 120%.
2. Le nombre d'évolutions de 2006 à 2009 est 3 et
   $$t_M = (1 + t)^{1/3} - 1 \simeq 0.3$$
   C'est-à-dire, le taux d'évolution annuel moyen du chiffre d'affaires est de 0.3 soit 30%.
3. En 2010, le chiffre d'affaires a augmenté de 24% par rapport à 2009. On en déduit que le chiffre d'affaires en 2010 est de $25 \times 1.24 = 31$ milliards d'euros.

Exercice 4. Face à la menace d'une épidémie frappant les troupeaux de bovins, les services sanitaires décident d'organiser une vaccination de masse sur 800 bovins.

40% des animaux ont été vaccinés. Les experts considèrent que 30% des animaux non vaccinés contracteront la maladie tandis que 1% des animaux vaccinés contracteront quand même la maladie.

1. Résumons les donnés avec l'arbre suivant :



2. Le nombre estimé de bovins malades est de $3+144 = 147$. On aurait aussi pu trouver se résultat par un calcul direct en utilisant les inclusions :

$$0.40 \times 0.01 \times 800 + 0.6 \times 0.3 \times 800 \simeq 147$$

3. Le tableau à deux entrées associé :

	Malades	Non malades	Total
Vaccinés	3	317	320
Non vaccinés	144	336	480
Total	147	653	800

Devoir sur table 4 : Probabilité conditionnelle, loi normale et statistique à deux variables.

vendredi 17 avril 2015

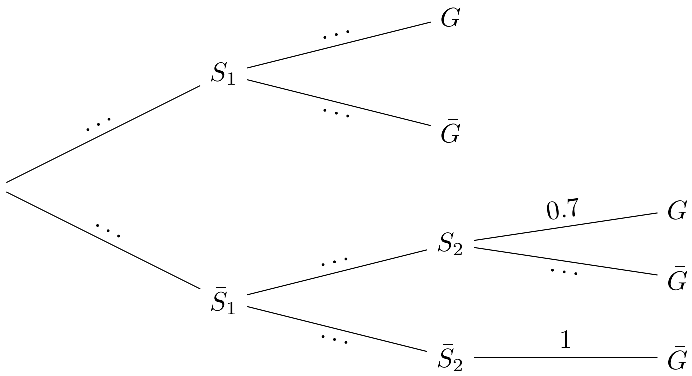
Exercice 1. Au tennis, le joueur qui est “au service” dispose de deux essais pour son service. S'il rate ces deux essais, il perd le point (on parle de double faute).
On note les événements suivants :

- S_1 : “le premier service est réussi”;
- S_2 : “le deuxième service est réussi”;
- G : “le point est gagné par le joueur qui est au service”.

Une étude sur les précédents matchs du joueur Naderer a permis d'établir que, lorsqu'il sert :

- il réussit dans 75% des cas son premier service et lorsque ce premier service est réussi, il gagne le point dans 92% des cas;
- s'il ne réussit pas son premier service, il réussit le second dans 96% des cas et lorsque ce second service est réussi, il gagne le point dans 70% des cas.

1. Compléter l'arbre suivant :

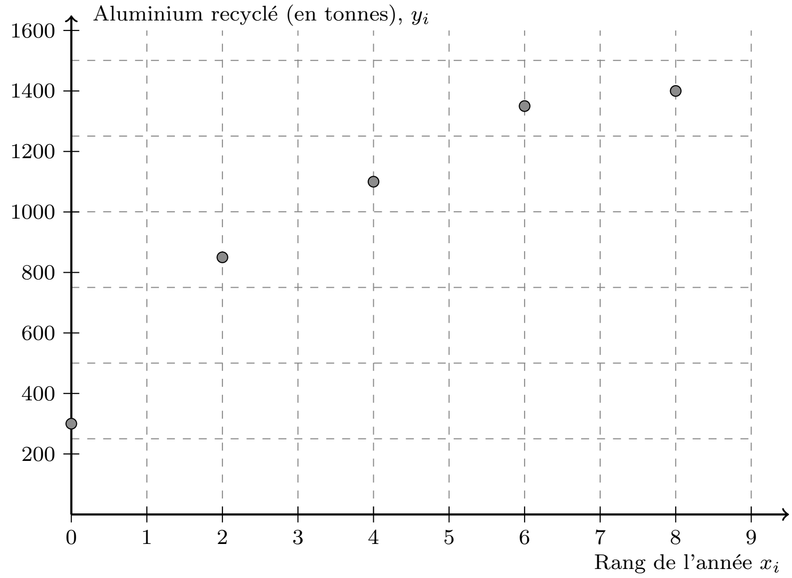


2. Calculer $P(S_1 \cap G)$.
3. Calculer la probabilité que le joueur Naderer réussisse son second service et gagne l'échange.
4. Montrer que la probabilité que le joueur Naderer gagne l'échange est de 0.858.
5. Sachant que le joueur Naderer a gagné l'échange, calculer la probabilité que sa première balle de service ait été jugée “bonne”. *Le résultat sera arrondi au millième.*
6. **Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou toute initiative même infructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.**
   On admet que chaque point joué est indépendant des points joués précédemment.
   Calculer la probabilité que le joueur Naderer gagne quatre échanges consécutifs.
   On donnera le résultat arrondi au millième.

Exercice 2. Depuis 2002, une collectivité territoriale s'intéresse à la quantité annuelle de déchets recyclés, en particulier l'aluminium. En 2013, cette collectivité dispose des données suivantes.

Année	Rang de l'année x_i	Aluminium recyclé (en tonnes) y_i
2002	0	300
2004	2	850
2006	4	1100
2008	6	1350
2010	8	1400

1. Le nuage de points associé à la série statistique $(x_i;\ y_i)$ est représenté ci-après dans un repère orthogonal du plan.



   a) À l'aide de la calculatrice, donner une équation de la droite d'ajustement affine obtenue par la méthode des moindres carrés.

   b) On suppose que l'équation de la droite d'ajustement est $y = 140x + 460$. Estimer la quantité d'aluminium qui sera recyclée en 2013.

2. Un responsable affirme que l'augmentation annuelle moyenne de 2008 à 2010 a été d'environ 1,8%.

   a) Justifier ce taux de 1,8%.

   b) En utilisant ce taux, estimer, à une tonne près, la quantité d'aluminium qui sera recyclés en 2013.

3. En janvier 2014 sont publiés les résultats de l'année 2013. La quantité d'aluminium recyclé en 2013 est de 1500 tonnes.
   Lorsque ce résultat paraît, une réunion des responsables de la collectivité est organisée pour ajuster les prévisions.
   Lequel des deux modèles précédents semble-t-il le plus adapté ?

Exercice 3. La durée de vie d'un certain type d'appareil est modélisée par une variable aléatoire V qui suit une loi normale de moyenne 2 200 jours et d'écart type 300 jours.
On considère un appareil choisi au hasard. Quelle est la probabilité d'avoir un appareil dont la durée de vie est comprise entre 2 500 jours et 2 700 jours.

Devoir sur table 4 : Probabilité conditionnelle, loi normale et statistique à deux variables.

(corrigé)

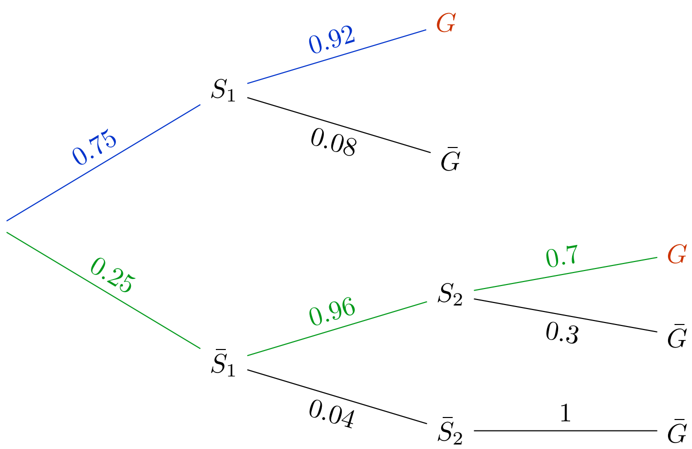
Exercice 1. Au tennis, le joueur qui est "au service" dispose de deux essais pour son service. S'il rate ces deux essais, il perd le point (on parle de double faute).
On note les événements suivants :

- S_1 : "le premier service est réussi";
- S_2 : "le deuxième service est réussi";
- G : "le point est gagné par le joueur qui est au service".

Une étude sur les précédents matchs du joueur Naderer a permis d'établir que, lorsqu'il sert :

- il réussit dans 75% des cas son premier service et lorsque ce premier service est réussi, il gagne le point dans 92% des cas;
- s'il ne réussit pas son premier service, il réussit le second dans 96% des cas et lorsque ce second service est réussi, il gagne le point dans 70% des cas.

1. Compléter l'arbre suivant :



2. De l'arbre de probabilités, on déduit que $P(S_1 \cap G) = 0.75 \times 0.92 = 0.69$.
3. La probabilité que le joueur Naderer réussisse son second service et gagne l'échange est $P(\bar{S}_1 \cap S_2 \cap G) = 0.25 \times 0.96 \times 0.7 = 0.168$.
4. La probabilité que le joueur Naderer gagne l'échange est $P(G) = 0.75 \times 0.92 + 0.25 \times 0.96 \times 0.7 = 0.69 + 0.168 = 0.858$.
5. Sachant que le joueur Naderer a gagné l'échange, la probabilité que sa première balle de service ait été jugée "bonne" est

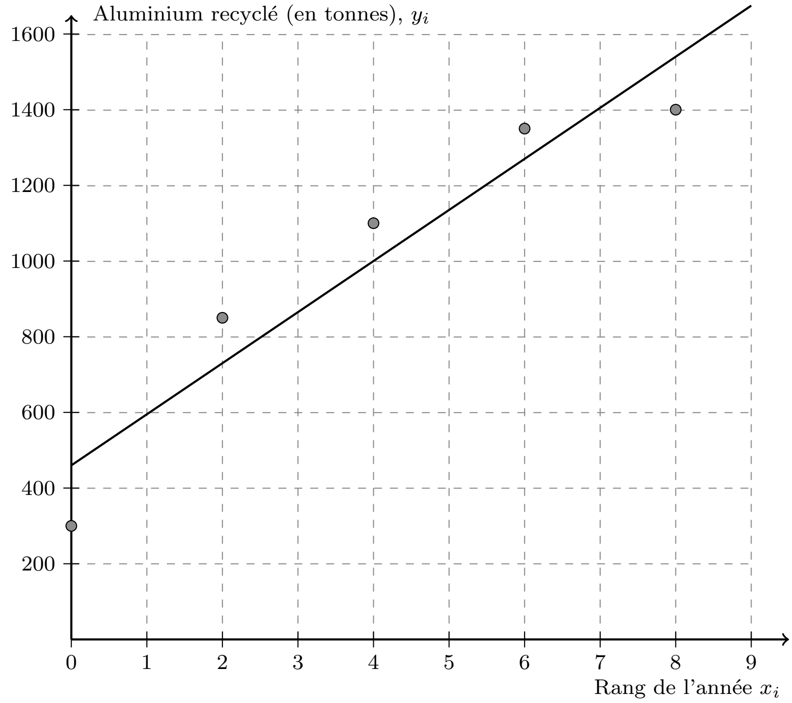
$$P_G(S_1) = \frac{P(G \cap S_1)}{P(G)} = \frac{0.69}{0.858} \simeq 0.804$$

   arrondi au millième.
6. On admet que chaque point joué est indépendant des points joués précédemment.
   La probabilité que le joueur Naderer gagne quatre échanges consécutifs est $P(G \cap G \cap G \cap G) = 0.858^4 \simeq 0.542$ arrondi au millième.

Exercice 2. Depuis 2002, une collectivité territoriale s'intéresse à la quantité annuelle de déchets recyclés, en particulier l'aluminium. En 2013, cette collectivité dispose des données suivantes.

Année	Rang de l'année x_i	Aluminium recyclé (en tonnes) y_i
2002	0	300
2004	2	850
2006	4	1100
2008	6	1350
2010	8	1400

1. Le nuage de points associé à la série statistique $(x_i;\ y_i)$ est représenté ci-après dans un repère orthogonal du plan.



   a) À l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement affine obtenue par la méthode des moindres carrés est
   $$y = 135x + 460$$
   ($a = 135$ et $b = 460$).

   b) On suppose que l'équation de la droite d'ajustement est $y = 140x + 460$. À l'aide de cet ajustement, on estime que $2000 = 140 \times 11 + 460$ tonnes d'aluminium seront recyclées en 2013.

2. Un responsable affirme que l'augmentation annuelle moyenne de 2008 à 2010 a été d'environ 1,8%.

   a) Le taux d'évolution globale de 2008 à 2010 est $T = \frac{1400-1350}{1350} \simeq 0.037$. Ensutie, il y a 2 évolutions de 2008 à 2010, d'où le taux moyen est
   $$t_M = (1+T)^{1/2} - 1 \simeq 0.018 \simeq 1.8\%$$
   Ce qui confirme l'affirmation du responsable.

b) À l'aide de ce taux, la quantité d'aluminium qui sera recyclés en 2013 peut être estimée à

$$1400 \times (1 + \frac{1.8}{100})^3 \simeq 1477 \text{ tonnes}$$

à une tonne près.

3. En janvier 2014 sont publiés les résultats de l'année 2013. La quantité d'aluminium recyclé en 2013 est de 1500 tonnes.
Lorsque ce résultat paraît, une réunion des responsables de la collectivité est organisée pour ajuster les prévisions.
La prévision liée au modèle suggérer par le responsable en 2013 est plus proche que celle obtenue à partir de l'ajustement affine. Ainsi, le second modèle, basé sur l'hypothèse d'une évolution constante, semble être le plus adapté.

Exercice 3. La durée de vie d'un certain type d'appareil est modélisée par une variable aléatoire V qui suit une loi normale de moyenne 2 200 jours et d'écart type 300 jours.
On considère un appareil choisi au hasard. La probabilité d'avoir un appareil dont la durée de vie est comprise entre 2 500 jours et 2 700 jours est

$$P(2\,500 \leq V \leq 2\,700) = \text{Ncd}(2500{,}2700{,}300{,}2200) \simeq 0.11 = 11\%.$$

Devoir maison 4 : Étude de fonction et loi normale

pour le mercredi 27 mai 2015

Exercice 1. Une étude indique que 30% des employés fréquentant le restaurant d'une entreprise ne sont pas satisfaits des repas servis.
Sur un échantillon, prélevé au hasard et avec remise, de 120 employés fréquentant le restaurant, 50 se déclarent non satisfaits des repas servis.

1. Déterminer la fréquence f des employés satisfaits des repas dans l'échantillon.
2. Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence des employés satisfaits.
3. Est-ce que f appartient à l'intervalle de fluctuation ?
4. À partir de cet échantillon, peut-on accepter, au risque de 5%, le résultat de l'étude ?

Exercice 2. Une entreprise décide de fabriquer et commercialiser un produit. Sa capacité maximale de production mensuelle est de 24 tonnes.
Le coût, en euros, d'une production mensuelle de x tonnes est modélisé par :

$$C(x) = x^3 - 36x^2 + 445x$$

pour tout réel x tel que $0 \leq x \leq 24$.

Partie A Étude du coût moyen

On rappelle que le coût moyen de fabrication noté C_M est donné en fonction de x par :

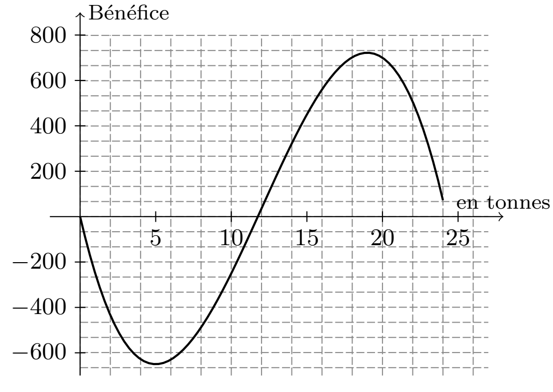
$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x} = x^2 - 36x + 445.$$

On désigne par C'_M la fonction dérivée de la fonction C_M.

1. Calculer $C'_M(x)$.
2. Étudier le signe de $C'_M(x)$; en déduire les variations de la fonction C sur $]0;\ 24]$.
   On dressera le tableaux de variation de la fonction de coût moyen sur l'intervalle $]0;\ 24]$.
3. En déduire le coût moyen minimum, en euros par tonne.

Partie B Étude du bénéfice.

Après une étude de marché, l'entreprise décide de vendre son produit 160 euros la tonne.
On admet que tout produit fabriqué est vendu le mois de sa fabrication.
On note que $B(x)$ le bénéficie mensuel, en euros, réalisé par la vente de x tonnes de ce produit, en euros.
La représentation graphique de la fonction B est donnée ci-après.



1. a) Montrer que le bénéfice s'exprime par :

$$B(x) = -x^3 + 36x^2 - 285x$$

   sur $[0;\ 24]$.

   b) Calculer le bénéfice pour la vente de 15 tonnes de ce produit.

2. a) Calculer $B'(x)$, où B' est la dérivée de B.

   b) Vérifier qu'on a $B'(x) = -3(x-5)(x-19)$.

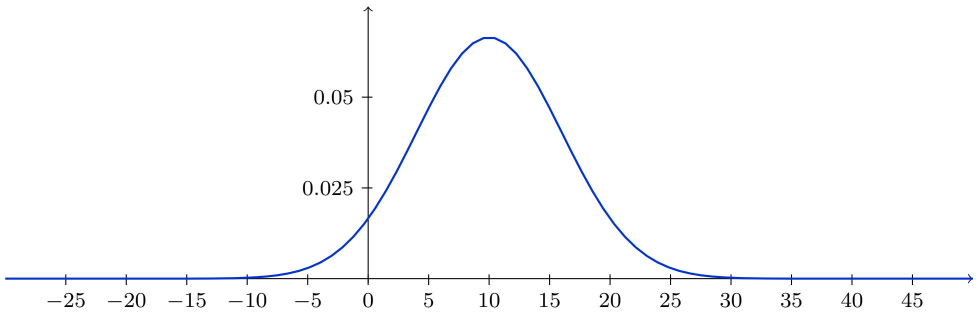
   c) En déduire le tableau de variation de la fonction B sur l'intervalle $[0;\ 24]$.

3. Quel est le bénéfice mensuel maximum réalisé par l'entreprise ?
   Pour quelle production mensuelle ?

4. Pour quelles valeurs de la production mensuelle l'entreprise est-elle déficitaire ?
   On répondra à cette question avec la précision permise par le graphique.

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 10$ et d'écart type $\sigma = 6$.

1. Ci-dessous la courbe représentative de la densité de X.



   Colorier en bleu la surface correspondant à $P(-5 \leq X \leq 15)$.

2. À l'aide de la calculatrice,

   a) Déterminer $P(-5 \leq X \leq 15)$.

   b) Déterminer $P(X \leq -5)$.

   c) Déterminer $P(X \leq 15)$.

   d) Comparer $P(-5 \leq X \leq 15)$ et $P(X \leq 15) - P(X \leq -5)$. Le résultat était-il prévisible ? Justifier.

   e) Déterminer l'intervalle $I = [\mu - 2\sigma;\ \mu + 2\sigma]$.

   f) Calculer la probabilité que X appartienne à I, c'est-à-dire $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$.

Devoir maison 4 : Étude de fonction et loi normale

(corrigé)

Exercice 1. Une entreprise décide de fabriquer et commercialiser un produit. Sa capacité maximale de production mensuelle est de 24 tonnes.
Le coût, en euros, d'une production mensuelle de x tonnes est modélisé par :

$$C(x) = x^3 - 36x^2 + 445x$$

pour tout réel x tel que $0 \leq x \leq 24$.

Partie A Étude du coût moyen

On rappelle que le coût moyen de fabrication noté C_M est donné en fonction de x par :

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x} = x^2 - 36x + 445.$$

On désigne par C'_M la fonction dérivée de la fonction C_M.

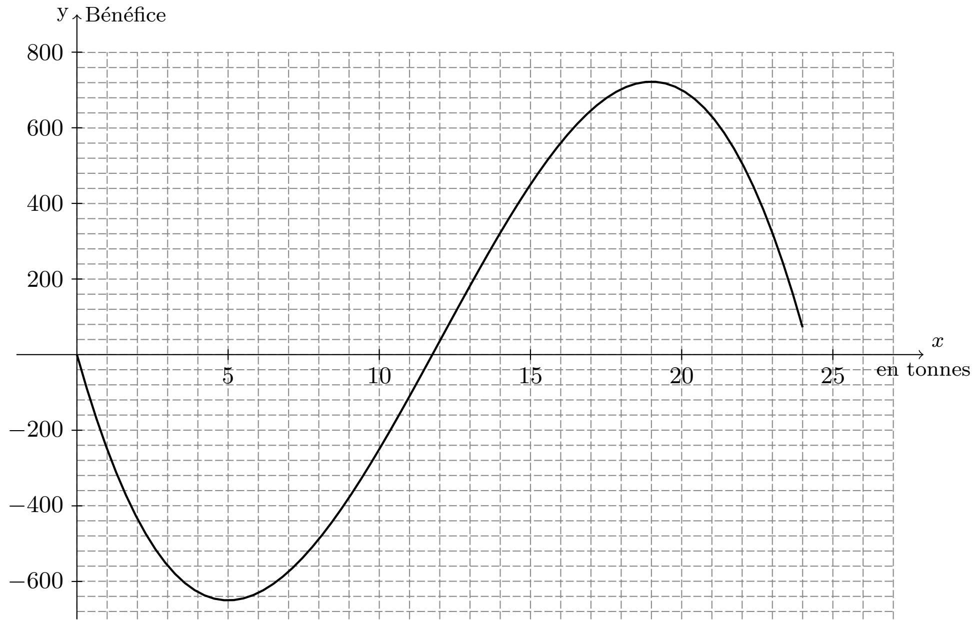
1. Pour tout nombre réel x, on a $C'_M(x) = 2x - 36$.
2. Le tableau de variation de la fonction $C_M(x)$ est

x	0		18		24
$C'_M(x) = 2x - 36$		$-$	0	$+$	
$C_M(x)$	445	$\searrow$	121	$\nearrow$	157

3. On en déduit que le coût moyen minimum est de 121 euros par tonne pour 18 tonnes produites.

Partie B Étude du bénéfice.

Après une étude de marché, l'entreprise décide de vendre son produit 160 euros la tonne.
On admet que tout produit fabriqué est vendu le mois de sa fabrication.
On note que $B(x)$ le bénéficie mensuel, en euros, réalisé par la vente de x tonnes de ce produit, en euros.
La représentation graphique de la fonction B est donnée ci-après.



1. a) Le bénéfice s'exprime par :

$$B(x) = 160\times x - x\times C_M(x) = 160x - x(x^2 - 36x + 445) = 160x - x^3 + 36x^2 - 445x = -x^3 + 36x^2 - 285x$$

sur $[0;\ 24]$.

   b) Le bénéfice pour la vente de 15 tonnes de ce produit est de $B(15) = 450$ euros.

2. a) On a $B'(x) = -3x^2 + 72x - 285$.

   b) D'autre part, $-3(x-5)(x-19) = (-3x+15)(x-19) = -3x^2 + 57x + 15x - 285 = -3x^2 + 72x - 285$.

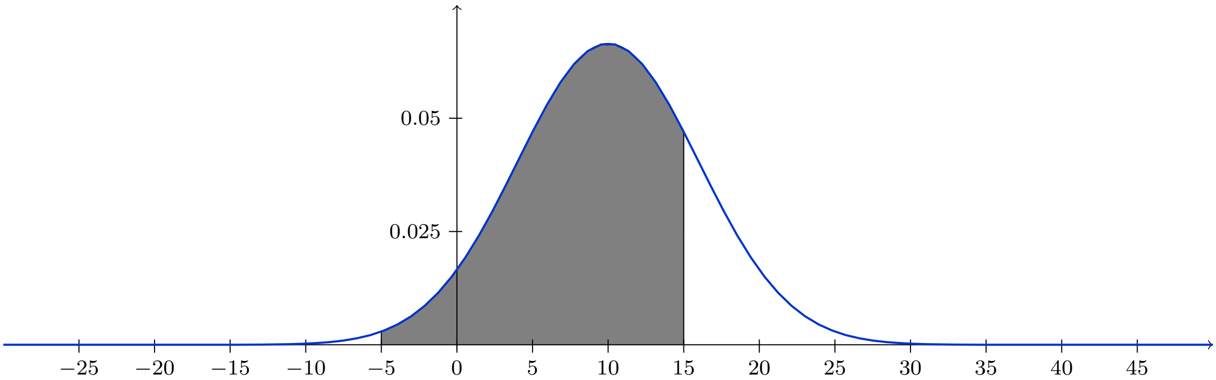
   c) De la précédente factorisation, on déduit le tableau de variation de la fonction B sur l'intervalle $[0;\ 24]$:

x	0		5		19		24
-3		$-$		$-$		$-$	
$x-5$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-19$		$-$		$-$	0	$+$	
$B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$B(x)$	0	↘	-650	↗	722	↘	72

3. Le bénéfice mensuel maximum réalisé par l'entreprise est de 722 euros pour une production mensuelle de 19 tonnes.
4. Graphiquement, la production mensuelle de l'entreprise est déficitaire pour une production comprise dans l'intervalle $[0;\ 11.7]$.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 10$ et d'écart type $\sigma = 6$.

1. Ci-dessous la courbe représentative de la densité de X.



(Colorier en bleu la surface correspondant à $P(-5 \leq X \leq 15)$.)

2. À l'aide de la calculatrice, on a
   a) $P(-5 \leq X \leq 15) \simeq 0.7915$;
   b) $P(X \leq -5) \simeq 0.006$;
   c) $P(X \leq 15) \simeq 0.7977$.
   d) On note que $P(-5 \leq X \leq 15) = P(X \leq 15) - P(X \leq -5)$. Ce résultat est une conséquence géométrique de la définition de $P(a \leq X \leq b)$ et qui induit la formule plus générale :

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$$

   e) Déterminons l'intervalle $I = [\mu - 2\sigma;\ \mu + 2\sigma]$. On a $I = [-2;\ 22]$.
   f) Calculons la probabilité que X appartienne à I, c'est-à-dire $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = P(-2 \leq X \leq 22) \simeq 0.95$.

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance 60 et d'écart type σ. Déterminons σ tel que $P(47 \leq X \leq 73) \simeq 0.95$. On a vu dans le cours que $P(60-2\sigma \leq X \leq 60+2\sigma) \simeq 0.95$. D'où $60 + 2\sigma = 73$ et donc l'écart type vaut $\sigma = \frac{13}{2} = 6.5$.