Terminale ES : Les contrôles et corrigés

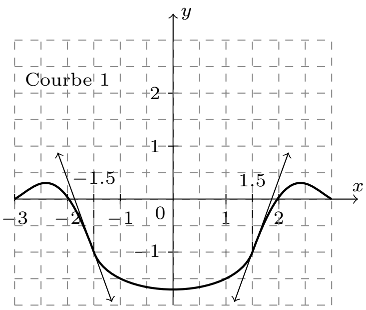
O. Lader

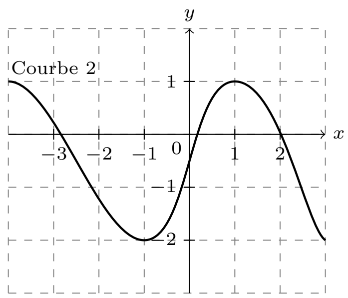
Table des matières

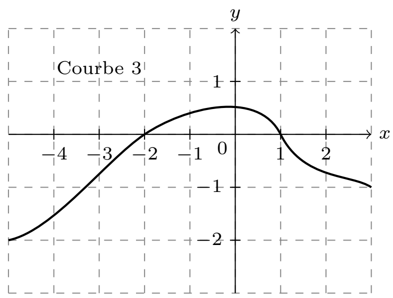
Devoir sur table 1 : Convexité et Probabilité conditionnelle

jeudi 26 novembre 2015

Exercice 1.







1. La courbe 1 ci-dessus est celle représentative d'une fonction f sur l'intervalle $[-3; 3]$.
   Déterminer, par simple lecture graphique, la convexité de cette fonction f.
2. On considère une fonction g dérivable sur $[-4; 3]$, dont la dérivée g' a pour représentation graphique la courbe 2 ci-dessus.
   Déterminer, par simple lecture graphique, la convexité de cette fonction g.
3. On considère une fonction h deux fois dérivable sur $[-5; 3]$, dont la dérivée seconde h'' a pour représentation graphique la courbe 3 ci-dessus.
   Déterminer, par simple lecture graphique, la convexité de cette fonction h.

Exercice 2. On considère la fonction f définie sur $[-7; 6]$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 120x + 60$.

1. Pour tout x dans l'intervalle $[-7; 6]$, calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. En déduire la convexité de f.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[-7; 6]$ et en donner un encadrement d'amplitude 0.1.
5. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.
6. * Déterminer la position relative de la courbe représentative de la fonction f par rapport à sa tangente au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

Exercice 3. Une enquête portant sur le tri sélectif des déchets ménagers a été réalisée et 2000 personnes ont été interrogées. On leur a posé la question : « Triez-vous le verre et le papier ? » Voici les résultats pour les effectifs :

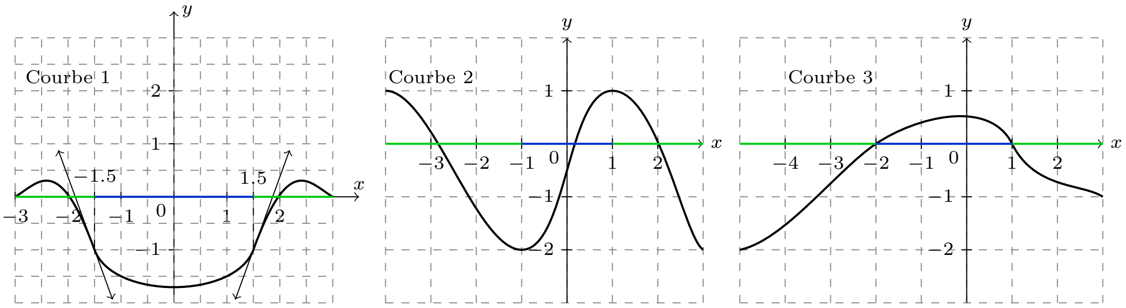
Âge \ Tri	Oui	Non	Total
Moins de 40 ans	700	400	1100
40 ans et plus	500	400	900
Total	1200	800	2000

1. On choisit au hasard une personne parmi les 2000 personnes interrogées. On note T l'événement « la personne fait le tri selectif » et J l'événement « la personne a moins de 40 ans ».
   Donner les probabilités $\mathbb{P}(T)$, $\mathbb{P}(J)$ et $\mathbb{P}(T \cap J)$.
2. Maintenant, parmi les personnes faisant le tri sélectif, on choisit une personne au hasard.
   Quelle est la probabilité qu'elle ait moins de 40 ans ?
3. Parmi les personnes de moins de 40 ans, on choisit une personne au hasard.
   Quelle est la probabilité qu'elle fasse du tri sélectif ?

Devoir sur table 1 : Convexité et Probabilité conditionnelle

corrigé

Exercice 1.



1. La courbe 1 ci-dessus est celle représentative d'une fonction f sur l'intervalle $[-3; 3]$.
On en déduit que la fonction f est convexe sur l'intervalle $[-1.5; 1.5]$ et concave sur $[-3; -1.5] \cup [1.5; 3]$.
2. On considère une fonction g dérivable sur $[-4; 3]$, dont la dérivée g' a pour représentation graphique la courbe 2 ci-dessus.
Lorsque la fonction dérivée g' est croissante, la fonction g est convexe. D'où, g est convexe sur $[-2; 1]$ et concave sur $[-4; -1] \cup [1, 3]$.
3. On considère une fonction h deux fois dérivable sur $[-5; 3]$, dont la dérivée seconde h'' a pour représentation graphique la courbe 3 ci-dessus.
Lorsque la fonction dérivée seconde est positive, la fonction h elle-même est convexe. D'où, h est convexe sur $[-2; 1]$ et concave sur $[-5; -2] \cup [1; 3]$.

Exercice 2. On considère la fonction f définie sur $[-7; 6]$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 120x + 60$.

1. Pour tout x dans l'intervalle $[-7; 6]$, on a
$$f'(x) = 2 \times 3x^2 - 3 \times 2x - 120 = 6x^2 - 6x - 120$$
et
$$f''(x) = 12x - 6$$
2. On en déduit la convexité de f :

x	-7		$\frac{1}{2}$		6
$f''(x) = 12x - 6$		-	0	+	
$f'(x) = 6x^2 - 6x - 120$		$\searrow$		$\nearrow$	
$f(x)$		concave		convexe	

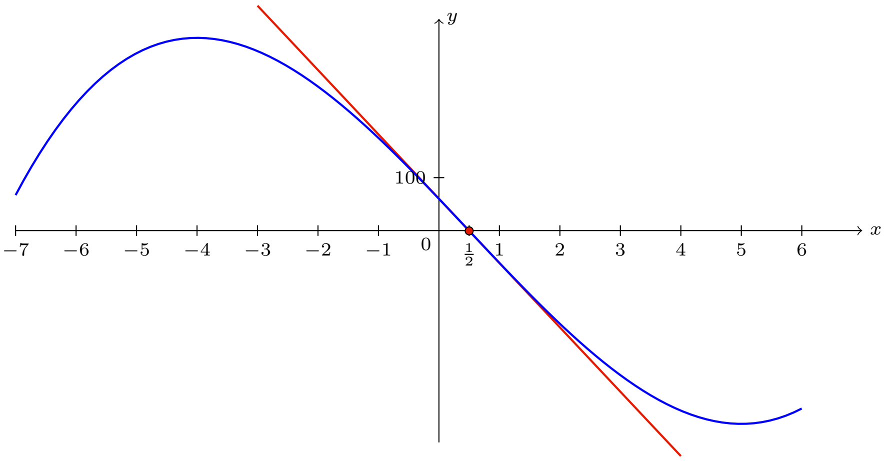
(la troisième ligne du tableau est facultative). Ainsi, f est convexe sur l'intervalle $[\frac{1}{2}; 6]$ et concave sur $[-7; \frac{1}{2}]$.
3. Pour dresser le tableau de variation de f, il nous faut étudier le signe de $f'(x) = 6x^2 - 6x - 120$. Le discriminant de ce polynôme du second degré est $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 6 \times 120 = 2916 > 0$ et donc
$$x_1 = \frac{-(-6) - \sqrt{2916}}{2 \times 6} = -4 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{6 + \sqrt{2916}}{12} = 5$$
Le polynôme est du signe du coefficient dominant $a = 3$ en dehors des racines, d'où :

x	-7		-4		5		6
$f'(x) = 6x^2 - 6x - 120$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 120x + 60$	67	$\nearrow$	364	$\searrow$	-365	$\nearrow$	-336

4. D'après le précédent tableau de variations, l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur les intervalles $[-7; -4]$ et $[5, 6]$ car la fonction f est monotone, une fois supérieur à 67 sur le premier intervalle et inférieure à -336 sur le second. Par contre sur l'intervalle $[-4; 5]$, la fonction f est strictement décroissante en prenant des valeurs de 364 à -365, ainsi d'après le théorème des valeurs intermédiaire, l'équation $f(x$ admet bien une solution unique α sur $[-4, 5]$ et donc sur$[-7; 6]$. De plus, à l'aide de la calculatrice, on a $0.4 \leq \alpha \leq 0.5$.
5. L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $a = \frac{1}{2}$ est

$$y = f'(a)(x-a) + f(a) = f'(\frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2}) = -\frac{243}{2}(x - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} = -\frac{243}{2}x + \frac{241}{4}$$

6. * Comme la fonction f est concave sur $[-7; \frac{1}{2}]$, la courbe représentative de la fonction f est en dessous de sa tangente au point d'abscisse $\frac{1}{2}$. D'autre part, f est convexe sur $[\frac{1}{2}; 6]$, la courbe représentative est au-dessus de sa tangente au point d'inflexion.



Exercice 3. Une enquête portant sur le tri sélectif des déchets ménagers a été réalisée et 2000 personnes ont été interrogées. On leur a posé la question : « Triez-vous le verre et le papier ? » Voici les résultats pour les effectifs :

Âge \ Tri	Oui	Non	Total
Moins de 40 ans	700	400	1100
40 ans et plus	500	400	900
Total	1200	800	2000

1. On choisit au hasard une personne parmi les 2000 personnes interrogées. On note T l'événement « la personne fait le tri selectif » et J l'événement « la personne a moins de 40 ans ». Ainsi

$$\mathbb{P}(T) = \frac{1200}{2000} = \frac{3}{5}, \qquad \mathbb{P}(J) = \frac{1100}{2000} = \frac{11}{20} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(T \cap J) = \frac{700}{2000} = \frac{7}{20}$$

2. Maintenant, parmi les personnes faisant le tri sélectif, on choisit une personne au hasard. La probabilité qu'elle ait moins de 40 ans est $\mathbb{P}_T(J) = \frac{700}{1200} = \frac{7}{12}$.
3. Parmi les personnes de moins de 40 ans, on choisit une personne au hasard. La probabilité qu'elle fasse du tri sélectif est $\mathbb{P}_J(T) = \frac{700}{1100} = \frac{7}{11}$.

Devoir maison 1 : Probabilité conditionnelle et suites numériques

pour le jeudi 10 décembre 2015

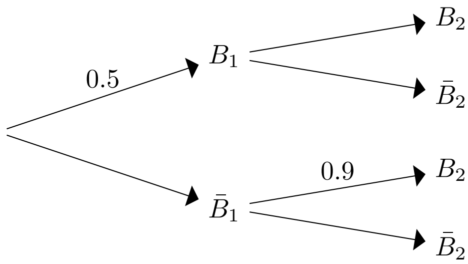
Exercice 1. Dans un zoo, une otarie est dressée pour rattraper des ballons. On a observé que :

- Si l'otarie attrape un ballon, la probabilité qu'elle en attrape un de nouveau est 0.3.
- Si elle rate un ballon, la probabilité qu'elle l'attrape la fois suivante est 0.9.

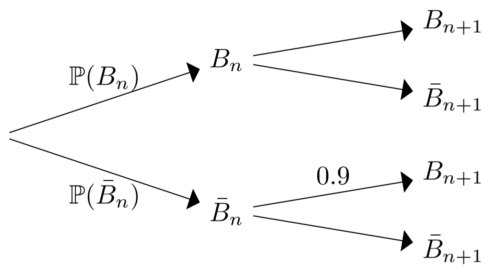
Au début du jeu, l'otarie a une chance sur deux d'attraper le ballon.

Pour tout entier naturel n non nul, on note B_n l'événement : « l'otarie attrape le ballon lors du n-ième envoi » et $\bar{B}_n$ est l'événement contraire de B_n.

1. Justifier que $\mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{2}$.
2. Le deuxième lancer :
   a) Sachant que l'otarie a attrapé le premier ballon, déterminer la probabilité que l'otarie attrape le second.
   b) Compléter l'arbre pondéré suivant :



   c) Calculer $\mathbb{P}(B_2)$ la probabilité que l'otarie attrape le second ballon.
3. Le n-ème lancer :
   a) Donner $\mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1})$ la probabilité que l'otarie attrape le ballon au $n+1$-ème lancer sachant qu'elle avait réussi à attraper le ballon au n-ème lancer.
   Donner $\mathbb{P}_{\bar{B}_n}(B_{n+1})$.
   b) Compléter l'arbre pondéré suivant :



   c) Exprimer $\mathbb{P}(B_{n+1})$ en fonction de $\mathbb{P}(B_n)$ et $\mathbb{P}(\bar{B}_n)$.
4. a) Sur tableur, préparer le tableau suivant :

	A	B	C	D	E
1	n	$\mathbb{P}(B_n)$	$\mathbb{P}(\bar{B}_n)$	$\mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1})$	$\mathbb{P}_{\bar{B}_n}(B_{n+1})$
2	1	0,5	0,5	0,3	0,9

   b) Entrer en cellule B3 la formule `= $D$2*B2 + C2*$E$2`.
   c) Exprimer $\mathbb{P}(\bar{B}_n)$ en fonction de $\mathbb{P}(B_n)$ et en déduire une formule à entrer dans la cellule C3.
   d) Entrer dans le cellule A3 la formule `= A2 + 1`.
   e) Recopier les cellules A3, B3 et C3 vers le bas jusqu'à $n = 100$.
   f) Changer les valeurs initiales de $\mathbb{P}(B_n)$ et $\mathbb{P}(\bar{B}_n)$.
   Le comportement des suites de termes généraux $\mathbb{P}(B_n)$ et $\mathbb{P}(\bar{B}_n)$ est-il modifié ?

5. On pose (u_n) la suite définie par $u_n = \mathbb{P}(B_n)$ pour tout entier naturel $n \geq 1$.
   a) En utilisant la question 3.c), montrer que $u_{n+1} = 0.9 - 0.6\, u_n$ pour tout entier $n \geq 1$.
   b) On définit la suite (t_n) de terme général
   $$t_n = u_n - \frac{9}{16}$$
   Montrer que la suite (t_n) est géométrique de raison -0.6.
   c) Calculer le premier terme t_1.
   d) Exprimer t_n, puis u_n, en fonction de n.
6. Déterminer, à l'aide du tableau, le nombre de lancers de ballon à partir duquel l'otarie a moins de 3 chances sur 5 de rattraper le ballon.
7. a) Déterminer la limite de la suite (t_n) quand n tend vers l'infini.
   b) En déduire la probabilité que l'otarie rattrape le ballon après un très grand nombre de lancers. Interpréter le résultat en termes de probabilité.
   c) Si l'otarie attrape le ballon au premier lancer avec une probabilité 0.2, le comportement à l'infini de la suite (u_n) est-il modifié ?

Devoir maison 1 : Probabilité conditionnelle et suites numériques

corrigé

Devoir sur table 2 : Fonctions, probabilité conditionnelle et suites numériques

jeudi 17 décembre 2015

Exercice 1. Pierre, le président d'un club de judo, veut acheter 60 médailles ayant la même référence. Elles sont gravées à l'effigie d'un (ou d'une) champion(ne) : Douillet, Riner ou Décosse. Il passe commande chez un grossiste qui travaille avec deux fournisseurs A et B. Le tableau suivant indique les caractéristiques du colis contenant les 60 médailles envoyées par le grossiste :

	Douillet	Riner	Décosse	Total
Fournisseur A	10	10	10	30
Fournisseur B	5	10	15	30
Total	15	20	25	60

Pierre reçoit le colis et tire au hasard une médaille.

1. a) Montrer que la probabilité que cette médaille soit à l'effigie de Décosse est égale à $\frac{5}{12}$.
   b) Quelle est la probabilité que cette médaille soit à l'effigie de Décosse et qu'elle provienne du fournisseur B ?
   c) Pierre constate que la médaille tirée est à l'effigie de Décosse. Quelle est la probabilité qu'ele provienne du fournisseur B ?
2. Pierre remet la médaille dans le colis. Il répète maintenant trois fois les mêmes gestes :
   - il tire au hasard une médaille ;
   - il note l'effigie du champion et remet la médaille dans le colis.

   Quelle est la probabilité qu'au moins une des médailles soit à l'effigie de Décosse ?

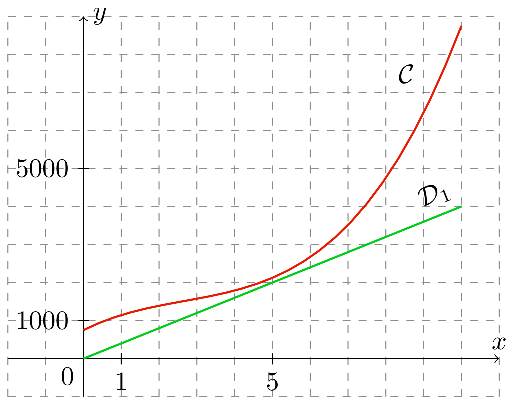
Exercice 2. Une entreprise produit du tissu en coton qu'elle conditionne en « roules » de 2000m de long et 1.5m de large. Elle peut fabriquer au maximum 10km en continu. Le coût total de production, en euro, est donné en fonction de la longueur x, en km, par la formule :

$$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750$$

où $x \in [0; 10]$.

Partie A Étude du bénéfice

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}_1$ d'équation $y = 400x$.



1. Au vu du graphique, expliquer pourquoi l'entreprise ne peut pas réaliser un bénéfice si le prix du marché est égal à 400 euros par km.
2. Dans cette question, on suppose que le prix du marché est égal à 680 euros par km.
   a) Tracer sur la figure ci dessus la droite $\mathcal{D}_2$ d'équation $y = 680x$.

b) Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique, pour quelles quantités produites et vendues, l'entreprise réalise un bénéfice si le prix du marché est de 680 euros par km.

c) Soit la fonction bénéfice B définie sur $[0;\,10]$ par

$$B(x) = 680x - C(x)$$

Exprimer $B(x)$ en fonction de x uniquement et démontrer que pour tout réel x de $[0;\,10]$, on a :

$$B'(x) = -45x^2 + 240x + 180$$

d) Étudier les variations de la fonction B sur l'intervalle $[0;\,10]$.

e) En déduire la quantité produite et vendue pour laquelle le bénéfice réalisé par l'entreprise est maximum. Donner la valeur de ce bénéfice.

Partie B Étude du coût marginal

Le coût marginal C_m peut être assimilé à la dérivée du coût total. Ainsi, $C_m(x) = C'(x)$ pour tout x dans $[0;\,10]$.

1. Étudier la convexité du coût total C.
2. Est-ce que la courbe représentative du coût total admet un point d'inflexion ? Si oui, déterminer son abscisse.
3. En déduire que le coût marginal C_m admet un minimum et le déterminer.

Exercice 3. On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = 100 \times \frac{(0.95^{n+1})^2}{0.9025} \times 0.95^{-n-1}$$

pour tout entier $n \geq 1$.

1. Simplifier l'expression précédente pour en déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a
$$u_n = 100 \times 0.95^{n-1}.$$
2. Justifier que (u_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le terme initial u_1.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers l'infini.
4. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = 48 + 100 \times 0.95^{n-1}$ pour tout entier $n \geq 1$.

   a) Déterminer la limite de la suite (v_n) lorsque n tend vers l'infini.

   b) À l'aide de la calculatrice, déterminer le rang à partir du quel $v_n < 50$.

Devoir sur table 2 : Fonctions, probabilité conditionnelle et suites numériques

corrigé

Exercice 1. Pierre, le président d'un club de judo, veut acheter 60 médailles ayant la même référence. Elles sont gravées à l'effigie d'un (ou d'une) champion(ne) : Douillet, Riner ou Décosse. Il passe commande chez un grossiste qui travaille avec deux fournisseurs A et B. Le tableau suivant indique les caractéristiques du colis contenant les 60 médailles envoyées par le grossiste :

	Douillet	Riner	Décosse	Total
Fournisseur A	10	10	10	30
Fournisseur B	5	10	15	30
Total	15	20	25	60

Pierre reçoit le colis et tire au hasard une médaille.

1 pt 1. a) La probabilité que cette médaille soit à l'effigie de Décosse est égale à $\frac{25}{60} = \frac{5}{12}$.

1 pt b) La probabilité que cette médaille soit à l'effigie de Décosse et qu'elle provienne du fournisseur B est $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$.

2 pt c) Pierre constate que la médaille tirée est à l'effigie de Décosse. La probabilité qu'ele provienne du fournisseur B est $\mathbb{P}_{\text{Décosse}}(\text{fournisseur B}) = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$ (probabilité conditionnelle).

1 pt 2. Pierre remet la médaille dans le colis. Il répète maintenant trois fois les mêmes gestes :

- il tire au hasard une médaille ;
- il note l'effigie du champion et remet la médaille dans le colis.

Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de médailles à l'éffigie de Décosse : « D » . Comme le tirage se fait avec remise, la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{5}{12}$. La probabilité qu'au moins une des médailles soit à l'effigie de Décosse est alors

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X < 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - \mathbb{P}(\bar{D}\,\bar{D}\,\bar{D}) = 1 - (\frac{7}{12})^3 \simeq 0.8$$

Remarque. On aurait aussi pu calculer $P(X = 0)$ à l'aide de la commande `Bpd` (binomial probability distribution) de la calculatrice :

Soit X une variable aléatoire qui suit une **loi binomiale** de paramètres n et p, alors

1. Avec une casio :
   - pour calculer $P(X = k)$, on utilise la commande : `Bpd(k,n,p)` ;
   - pour calculer $P(X \leq k)$, on utilise la commande : `Bcd(k,n,p)` ;
2. Avec une TI :
   - pour calculer $P(X = k)$, on utilise la commande : `Bpd(n,p,k)` ;
   - pour calculer $P(X \leq k)$, on utilise la commande : `Bcd(n,p,k)` ;

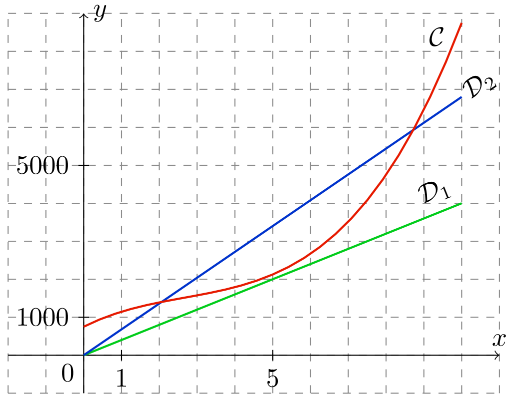
Exercice 2. Une entreprise produit du tissu en coton qu'elle conditionne en « roules » de 2000m de long et 1.5m de large. Elle peut fabriquer au maximum 10km en continu. Le coût total de production, en euro, est donné en fonction de la longueur x, en km, par la formule :

$$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750$$

où $x \in [0; 10]$.

Partie A Étude du bénéfice

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}_1$ d'équation $y = 400x$.



1 pt 1. Au vu du graphique, comme la courbe représentative de la recette $\mathcal{D}_1$ est en-dessous de la courbe représentative du coût total $\mathcal{C}$, l'entreprise ne peut pas réaliser un bénéfice si le prix du marché est égal à 400 euros par km.

2. Dans cette question, on suppose que le prix du marché est égal à 680 euros par km.

1 pt a) Tracer sur la figure ci dessus la droite $\mathcal{D}_2$ d'équation $y = 680x$.

1 pt b) Graphiquement, avec la précision permise par le graphique, l'entreprise réalise un bénéfice lorsqu'elle fabrique et vent entre 2 et 8.6 km de tissu en continu.

2 pt c) Soit la fonction bénéfice B définie sur $[0;\ 10]$ par

$$\begin{aligned} B(x) &= 680x - C(x) \\ &= 680x - (15x^3 - 120x^2 + 500x + 750) \\ &= 680x - 15x^3 + 120x^2 - 500x - 750 \\ &= -15x^3 + 120x^2 + 180x - 750 \end{aligned}$$

Alors, pour tout réel x de $[0;\ 10]$, on a :

$$B'(x) = -15 \times 3x^2 + 120 \times 2x + 180 = -45x^2 + 240x + 180$$

2 pt d) Le discriminant du polynôme du second degré $B'(x) = -45x^2 + 240x + 180$ est $\Delta = b^2 - 4ac = 240^2 - 4 \times (-45) \times 180 = 90\,000 = 300^2$. Ainsi, le polynôme admet deux racines : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-240-300}{2\times(-45)} = 6$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2}{3}$. D'où le tableau de variation de B :

x	0		6		10
$B'(x) = -45x^2 + 240x + 180$		+	0	−	
$B(x) = -15x^3 + 120x^2 + 180x - 750$	-750	↗	1410	↘	-1950

1 pt e) Pour réaliser un bénéfice maximal de 1410 euros, l'entreprise doit produire et vendre 6 km de tissu.

Partie B Étude du coût marginal

Le coût marginal C_m peut être assimilé à la dérivée du coût total. Ainsi, $C_m(x) = C'(x)$ pour tout x dans $[0;\ 10]$.

2 pt 1. On note que $C'(x) = 45x^2 - 240x + 500$ et donc $C''(x) = 90x - 240$ pour tout x dans $[0;\ 10]$. De plus $C''(x) = 0$, implique $x = \frac{240}{90} = \frac{8}{3}$. D'où, la dérivée seconde est négative sur l'intervalle $[0;\ \frac{8}{3}]$ et positive sur l'intervalle $[\frac{8}{3};\ 10]$. On en déduit que la fonction coût est concave sur $[0;\ \frac{8}{3}]$ et convexe sur $[\frac{8}{3};\ 10]$.

1 pt 2. La dérivée seconde de C s'annule en $\frac{8}{3}$, d'où la courbe représentative du coût total admet un point d'inflexion au point d'abscisse $\frac{8}{3}$.

1 pt 3. La dérivée seconde du coût total C est égale à la dérivée du coût marginal, ainsi de l'étude de la convexité, on déduit que le coût marginal est minimal lorsque $x = \frac{8}{3}$ et vaut $C_m(\frac{8}{3}) = C'(\frac{8}{3}) = 180$ euros.

Exercice 3. On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = 100 \times \frac{(0.95^{n+1})^2}{0.9025} \times 0.95^{-n-1}$$

pour tout entier $n \geq 1$.

1 pt 1. Soit $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} u_n &= 100 \times \frac{(0.95^{n+1})^2}{0.9025} \times 0.95^{-n-1} \\ &= 100 \times \frac{0.95^{2(n+1)}}{0.95^2} \times 0.95^{-n-1} \\ &= 100 \times 0.95^{2n+2} \times 0.95^{-2} \times 0.95^{-n-1} \\ &= 100 \times 0.95^{2n+2-2-n-1} \\ &= 100 \times 0.95^{n-1} \end{aligned}$$

0.5 pt 2. D'après, la question précédente, (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0.95$ et de terme initial $u_1 = 100$.

0.5 pt 3. Comme $0 < 0.95 < 1$, on en déduit que la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers l'infini est 0.

4. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = 48 + 100 \times 0.95^{n-1}$ pour tout entier $n \geq 1$.

0.5 pt a) D'après la question précédente, la limite de la suite (v_n) lorsque n tend vers l'infini est $48+0 = 48$.

0.5 pt b) À l'aide de la calculatrice, on note que $v_n < 50$ lorsque $n \geq 78$.

Devoir maison 2 : Suite numérique et fonction exponentielle

pour le jeudi 7 janvier 2016

Exercice 1. La suite (u_n) est définie pour tout nombre entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 & = 5 \\ u_{n+1} & = \frac{1}{2}\, u_n + 1 \end{cases}$$

Partie A

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n non nul donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n.
   Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient.
   Indiquer lequel et justifier pourquoi les deux autres ne peuvent donner le résultat attendu.

algorithme 1	algorithme 2	algorithme 3

Variables :
U est un nombre réel
i et N sont des nombres entiers
Début
Saisir une valeur pour N
U prend la valeur 5
Pour i de 0 à N faire
  Affecter à U la valeur $\frac{1}{2} \times U + 1$
Fin Pour
Afficher U
Fin
	Variables :
	U est un nombre réel
	i et N sont des nombres entiers
	Début
	Saisir une valeur pour N
	Pour i de 0 à N faire
	  U prend la valeur 5
	  Afficher U
	  Affecter à U la valeur $\frac{1}{2} \times U + 1$
	Fin Pour
	Fin
		Variables :
		U est un nombre réel
		i et N sont des nombres entiers
		Début
		Saisir une valeur pour N
		U prend la valeur 5
		Pour i de 0 à N faire
		  Afficher U
		  Affecter à U la valeur $\frac{1}{2} \times U + 1$
		Fin Pour
		Fin

2. On saisit la valeur 9 pour N, l'affichage est le suivant :

5	3,5	2,75	2,375	2,185	2,0938	2,0469	2,0234	2,0117	2,0059

   Quelle conjecture peut-on émettre sur le sens de variation de cette suite ?

Partie B

On introduit une suite auxiliaire (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 2$.

1. Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison q et son premier terme v_0.
2. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a $u_n = 2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
3. Étudier les variations de la suite (u_n).
4. Déterminer la limite de la suite (u_n).
5. À partir de quel rang a-t-on : $u_n - 2 \leqslant 10^{-6}$?

Exercice 2. Une entreprise fabrique des poulies utilisées dans l'industrie automobile. On suppose que toute la production est vendue.

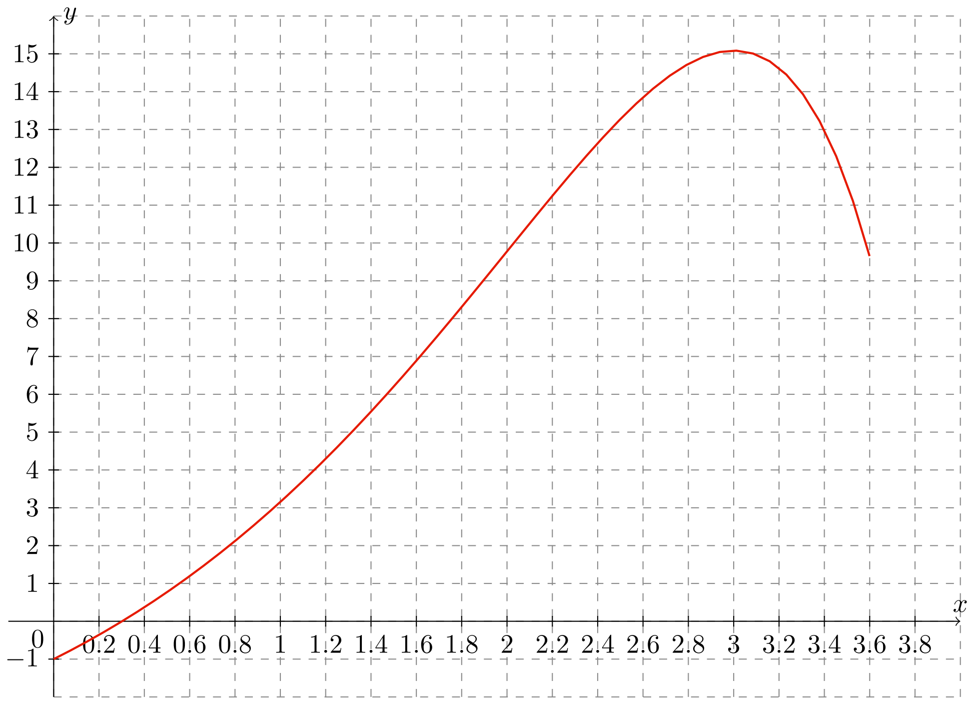
L'entreprise peut fabriquer entre 0 et 3600 poulies paf semaine. On note x le nombre de milliers de poulies fabriquées et vendues en une semaine. (x varie donc dans l'intervalle $[0\,;\,3{,}6]$).

Le bénéfice hebdomadaire est noté $B(x)$, il est exprimé en milliers d'euros.

L'objet de cet exercice est d'étudier cette fonction B. Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A : étude graphique

Voici la courbe représentative de la fonction B dans un repère du plan :



Chaque résultat sera donné à cent poulies près ou à cent euros près suivant les cas.
Les traits utiles à la compréhension du raisonnement seront laissés sur le graphique et une réponse écrite sur la copie sera attendue pour chaque question posée.

1. Déterminer dans quel intervalle peut varier le nombre de poulies pour que le bénéfice soit supérieur ou égal à 13000 euros.
2. Quel est le bénéfice maximum envisageable pour l'entreprise ?
   Pour quel nombre N de poulies fabriquées et vendues semble-t-il être réalisé ?

Partie B : étude théorique

Le bénéfice hebdomadaire noté $B(x)$, exprimé en milliers d'euros vaut

$$B(x) = -5 + (4 - x)\mathrm{e}^x.$$

1. a) On note B' la fonction dérivée de la fonction B.
   Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $\mathrm{I} = [0\,;\,3{,}6]$, on a : $B'(x) = (3 - x)\mathrm{e}^x$.
   b) Déterminer le signe de la fonction dérivée B' sur l'intervalle I.
   c) Dresser le tableau de variation de la fonction B sur l'intervalle I. On indiquera les valeurs de la fonction B aux bornes de l'intervalle.
2. a) Justifier que l'équation $B(x) = 13$ admet deux solutions x_1 et x_2, l'une dans l'intervalle $[0\,;\,3]$ l'autre dans l'intervalle $[3\,;\;3{,}6]$.
   À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée à $0,01$ près de chacune des deux solutions.

Devoir maison 2 : Suite numérique et fonction exponentielle

corrigé

Exercice 1. La suite (u_n) est définie pour tout nombre entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 & = 5 \\ u_{n+1} & = \frac{1}{2}\, u_n + 1 \end{cases}$$

Partie A

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n non nul donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n.

algorithme 1	algorithme 2	algorithme 3
Variables :	**Variables :**	**Variables :**
U est un nombre réel	U est un nombre réel	U est un nombre réel
i et N sont des nombres entiers	i et N sont des nombres entiers	i et N sont des nombres entiers
Début	**Début**	**Début**
Saisir une valeur pour N	Saisir une valeur pour N	Saisir une valeur pour N
U prend la valeur 5	Pour i de 0 à N faire	U prend la valeur 5
Pour i de 0 à N faire	U prend la valeur 5	Pour i de 0 à N faire
Affecter à U la valeur $\frac{1}{2} \times U + 1$	Afficher U	Afficher U
Fin Pour	Affecter à U la valeur $\frac{1}{2} \times U + 1$	Affecter à U la valeur $\frac{1}{2} \times U + 1$
Afficher U	Fin Pour	Fin Pour
Fin	**Fin**	**Fin**

Le premier algorithme ne convient pas car l'instruction `afficher U` se trouve après le fin pour, ce qui fait qu'il affiche uniquement u_{n+1}.
Le deuxième algorithme ne convient pas car l'intialisation `U prend la valeur 5` se trouve à l'intérieur de la boucle `Pour`. Ainsi, on affiche $n+1$ fois 5.
Le troisième algorithme convient.

2. On saisit la valeur 9 pour N, l'affichage est le suivant :

5	3,5	2,75	2,375	2,185	2,0938	2,0469	2,0234	2,0117	2,0059

D'après les premières valeurs prisent par la suite (u_n), on peut conjecturer qu'elle converge vers 2 lorsque n tend vers l'infini.

Partie B

On introduit une suite auxiliaire (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 2$.

1. Soit n un entier naturel,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 2 \\ &= \frac{1}{2}u_n + 1 - 2 \\ &= \frac{1}{2}u_n - 1 \\ &= \frac{1}{2}(u_n - 2) \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et $v_0 = u_0 - 2 = 5 - 2 = 3$.

2. Soit n un entier naturel. En revenant à la définition de la suite (v_n), on déduit que

$$u_n = v_n + 2 = 2 + 3 \times (\frac{1}{2})^n$$

3. Comme la raison $q = \frac{1}{2}$ de la suite (v_n) est inférieure à 1, la suite (v_n) est décroissante. De plus, on a la relation $u_n = v_n + 2$ pour tout entier n, d'où la suite (u_n) est aussi décroissante.
4. Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, la limite de la suite (u_n) est $2 + 3 \times 0 = 2$.
5. Lorsque $n \geq 22$, on a : $u_n - 2 \leqslant 10^{-6}$?

Exercice 2. Une entreprise fabrique des poulies utilisées dans l'industrie automobile. On suppose que toute la production est vendue.

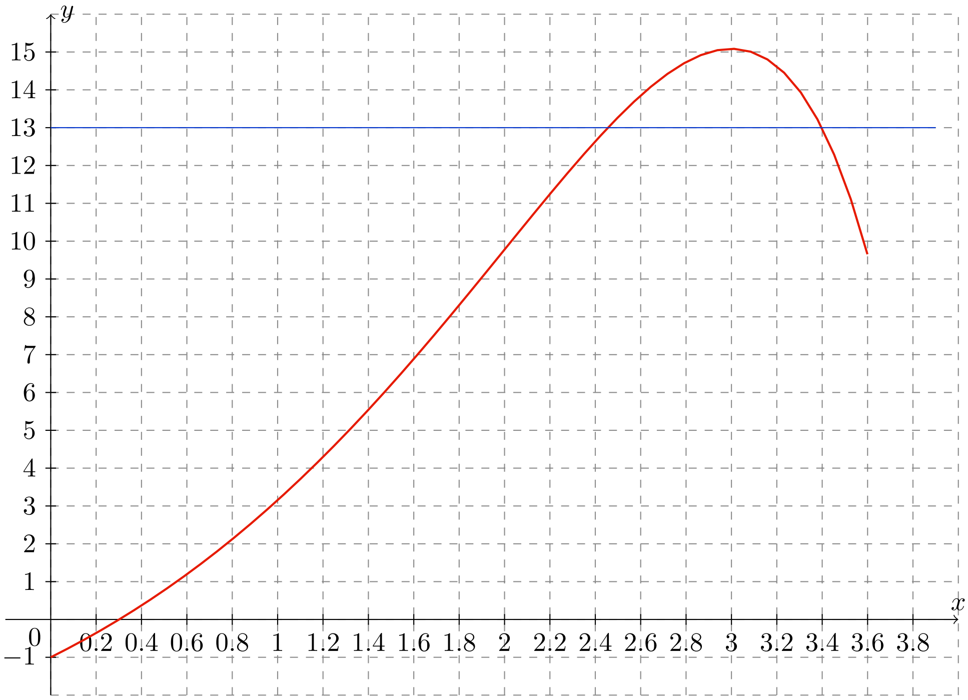
L'entreprise peut fabriquer entre 0 et 3600 poulies paf semaine. On note x le nombre de milliers de poulies fabriquées et vendues en une semaine (x varie donc dans l'intervalle $[0\,;\,3{,}6]$).

Le bénéfice hebdomadaire est noté $B(x)$, il est exprimé en milliers d'euros.

L'objet de cet exercice est d'étudier cette fonction B. Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A : étude graphique

Voici la courbe représentative de la fonction B dans un repère du plan :



Chaque résultat sera donné à cent poulies près ou à cent euros près suivant les cas.

Les traits utiles à la compréhension du raisonnement seront laissés sur le graphique et une réponse écrite sur la copie sera attendue pour chaque question posée.

1. Pour réaliser un bénéfice supérieur ou égal à 13 000 euros, le nombre de poulies produites et vendues doit se trouver approximativement dans l'intervalle [2400; 3400].
2. Par lecture graphique, le bénéfice maximum envisageable pour l'entreprise est de 15 000 euros pour 3000 poulies fabriquées et vendues.

Partie B : étude théorique

Le bénéfice hebdomadaire noté $B(x)$, exprimé en milliers d'euros vaut

$$B(x) = -5 + (4 - x)\mathrm{e}^{x}.$$

1. a) On note B' la fonction dérivée de la fonction B.
   Soit x un nombre de l'intervalle $\mathrm{I} = [0\,;\,3{,}6]$, en appliquant la règle de dérivation au produit $(4 - x) \times e^{x}$, on a

   $$B'(x) = 0 + (-1) \times e^{x} + (4 - x) \times e^{x} = (-1 + 4 - x)e^{x} = (3 - x)e^{x}$$

   b) Comme e^{x} est positif, le signe de $B'(x)$ dépend uniquement de $3 - x$. D'où $B'(x)$ est positif sur $[0; 3]$ et négatif sur $[3; 3.6]$.

   c) Ainsi, le tableau de variation de la fonction B est :

x	0		3		3.6
$B'(x) = (3-x)e^{x}$		+	0	−	
$B(x) = -5 + (4-x)e^{x}$	-1	$\nearrow$	15.09	$\searrow$	9.64

2. a) D'après le précédent tableau de variation, la fonction B est continue strictement croissante sur l'intervalle [0; 3] et prend les valeurs de -1 à 15.09 une et une seule fois. Ainsi l'équation $B(x) = 13$ admet une unique solution x_1 dans l'intervalle [0; 3]. De même, on note que $B(x) = 13$ admet une unique solution x_2 dans l'intervalle [3; 3.6].
   À l'aide de la calculatrice, $x_1 \simeq 2.45$ et $x_2 \simeq 3.39$.

Fonction exponentielle, dérivation (sujet A)

jeudi 7 janvier 2015

Exercice 1. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = (x+2)\, e^x$;
2. $f(x) = (\frac{1}{x} - 3)\, e^x$;
3. $f(x) = \frac{1}{e^x}$ et en déduire la dérivée de la fonction $g(x) = e^{-x}$;
4. $f(x) = \frac{1+e^x}{2+e^x}$.

Exercice 2. Dresser le tableau de variation des fonctions suivantes :

1. $f(x) = (3x-7)\, e^x$ sur $\mathbb{R}$;
2. $f(x) = (2x^2 - x + 3)\, e^x$ sur $[-10;\ 10]$;
3. $f(x) = \frac{1+e^x}{2+e^x}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Soit

$$\begin{cases} u_0 & = 1; \\ u_{n+1} & = 2\, u_n + 5 \qquad \text{pour tout } n \geq 0, \end{cases}$$

et (v_n) définie par $v_n = u_n + 5$ pour tout entier naturel n.
Calculer u_{10} et déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers l'infini.

Fonction exponentielle, dérivation (sujet B)

jeudi 7 janvier 2015

Exercice 1. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = (x+3)\,e^x$;
2. $f(x) = (\frac{1}{x} - 5)\,e^x$;
3. $f(x) = e^x \times e^x$ et en déduire la dérivée de la fonction $g(x) = e^{2x}$;
4. $f(x) = \frac{2+e^x}{1+e^x}$.

Exercice 2. Dresser le tableau de variation des fonctions suivantes :

1. $f(x) = (7x-3)\,e^x$ sur $\mathbb{R}$;
2. $f(x) = (-2x^2 + x - 3)\,e^x$ sur $[-10;\ 10]$;
3. $f(x) = \frac{2+e^x}{1+e^x}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Soit

$$\begin{cases} u_0 & = 2; \\ u_{n+1} & = 2\,u_n + 6 \qquad \text{pour tout } n \geq 0, \end{cases}$$

et (v_n) définie par $v_n = u_n + 6$ pour tout entier naturel n.
Calculer u_{10} et déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers l'infini.

Fonction exponentielle, fonction logarithme

jeudi 21 janvier 2016

Exercice 1. Exprimer les termes suivants en fonction de ln(5) et ln(7) :

1. $\ln(35)$;
2. $\ln(\frac{5}{7})$;
3. $\ln(\frac{49}{125})$;
4. $\ln(\frac{1}{5})$.

Exercice 2. Résoudre les équations suivantes :

1. $\ln(x) = -1$;
2. $\ln(x) - \frac{5}{9} = 0$;
3. $(2\ln(x) + 1)(\frac{x}{2} + 5) = 0$;
4. $(\ln(x) - 10)(e^x - 100) = 0$.

Exercice 3. Soit $f : [-10; 10] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (2x - 2)\,e^x - 1$.

1. Calculer $f'(x)$ pour tout x dans l'intervalle $[-10; 10]$.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = -1$ admet une solution. La déterminer.
4. Étudier la convexité de la fonction f.

Fonction exponentielle, fonction logarithme

corrigé

Exercice 1. Exprimons les termes suivants en fonction de $\ln(5)$ et $\ln(7)$:

0.5 pt 1. $\ln(35) = \ln(5 \times 7) = \ln(5) + \ln(7)$;

1 pt 2. $\ln(\frac{5}{7}) = \ln(5) - \ln(7)$;

1 pt 3. $\ln(\frac{49}{125}) = \ln(7^2) - \ln(5^3) = 2\ln(7) - 3\ln(5)$;

1 pt 4. $\ln(\frac{1}{5}) = -\ln(5)$.

Exercice 2. On a :

0.5 pt 1. $\ln(x) = -1$ implique $e^{\ln(x)} = e^{-1}$, c'est-à-dire, une solution $x = e^{-1}$;

1 pt 2. $\ln(x) - \frac{5}{9} = 0$ implique $\ln(x) = \frac{5}{9}$, d'où une solution $x = e^{\frac{5}{9}}$;

1 pt 3.

$$\begin{aligned}(2\ln(x)+1)(\frac{x}{2}+5) &= 0\\ 2\ln(x)+1 = 0 \quad &\text{ou} \quad \frac{x}{2}+5=0\\ 2\ln(x) = -1 \quad &\text{ou} \quad \frac{x}{2} = -5\\ 2\ln(x) = -\frac{1}{2} \quad &\text{ou} \quad x = 2\times(-5)\\ x = e^{-0.5} \quad &\text{ou} \quad x = -10\end{aligned}$$

L'équation admet donc deux solutions $e^{-0.5}$ et -10.

1 pt 4.

$$\begin{aligned}(\ln(x)-10)(e^x-100) &= 0\\ \ln(x)-10 = 0 \quad &\text{ou} \quad e^x-100=0\\ \ln(x) = 10 \quad &\text{ou} \quad e^x = 100\\ x = e^{10} \quad &\text{ou} \quad x = \ln(100)\end{aligned}$$

Donc deux solutions e^{10} et $\ln(100)$.

Exercice 3. Soit $f : [-10;\,10] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (2x-2)\,e^x - 1$.

0.5 pt 1. Soit x dans l'intervalle $[-10;\,10]$, alors

$$f'(x) = (2x-2)'\,e^x + (2x-2)\,(e^x)' - 0 = 2e^x + (2x-2)e^x = (2+2x-2)e^x = 2xe^x$$

1 pt 2. Le tableau de variation de la fonction f :

x	-10		0	1	10
$B'(x) = 2x\,e^x$		$-$	0	$+$	
$f(x) = (2x-2)e^x - 1$	$\simeq -1.001$	$\searrow$	-3	$\nearrow$ -1 $\nearrow$	$\simeq 220\,264$

0.5 pt 3. Sur l'intervalle $[-10;0]$, la fonction f est strictement décroissante, ainsi $-1 > f(-1) \simeq -1.001 \geq f(x)$ pour tout x dans l'intervalle $[-10;0]$. Ce qui implique que sur premier intervalle l'équation $f(x) = -1$ n'admet pas de solution.
Par contre, sur l'intervalle $[0;10]$, la fonction f est continue strictement croissante, ainsi elle prend une et une seule fois chacune des valeurs de $-3 < -1$ à $18e^{10} - 1 > -1$. En particulier, l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution.
À l'aide la calculatrice, on note que la solution est environ 1. Or, on note que $f(1) = (2\times1-1)e^1 - 1 = 1$. D'où, l'unique antécédente de -1 par la fonction f est le nombre 1.

1 pt

4. On vient de voir que $f'(x) = 2xe^x$, ainsi $f''(x) = 2e^x + 2xe^x = (2+2x)e^x = 2(1+x)e^x$. D'où

x	-10	-1	10
$f''(x) = 2(x+1)e^x$	-	0	+
$f(x)$	concave		convexe

Ainsi, on la fonction f est concave sur $[-10; -1]$ et convexe sur $[-1; 10]$.

Nom: ____________________

Devoir commun 2 : Suites numériques, fonctions et probabilités conditionnelles

mercredi 3 février 2016

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Cependant, le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou infructueuse, qu'il aura développée.

Exercice 1 (Polynésie, juin 2015). **7 points**

Les techniciens d'un aquarium souhaitent régler le distributeur automatique d'un produit visant à améliorer la qualité de l'eau dans un bassin. La concentration recommandée du produit, exprimée en mg.l^{-1} (milligramme par litre), doit être comprise entre 140 mg.l^{-1} et 180 mg.l^{-1}.

Au début du test, la concentration du produit dans ce bassin est de 160 mg.l^{-1}.

On estime que la concentration du produit baisse d'environ 10 % par semaine.

Afin de respecter les recommandations portant sur la concentration du produit, les techniciens envisagent de régler le distributeur automatique de telle sorte qu'il déverse chaque semaine une certaine quantité de produit.

Les techniciens cherchent à déterminer cette quantité de façon à ce que :

- la concentration du produit soit conforme aux recommandations sans intervention de leur part, pendant une durée de 6 semaines au moins ;
- la quantité de produit consommée soit minimale.

Partie A

Dans cette partie, on suppose que la quantité de produit déversée chaque semaine par le distributeur automatique est telle que la concentration augmente de 10 mg.l^{-1}.

On s'intéresse à l'évolution de la concentration chaque semaine. La situation peut être modélisée par une suite (C_n), le terme C_n en donnant une estimation de la concentration du produit, en mg.l^{-1}, au début de la n-ième semaine. On a $C_0 = 160$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, $C_{n+1} = 0,9 \times C_n + 10$.
2. Soit la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par : $V_n = C_n - 100$.
   a) Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison $0,9$ et que $V_0 = 60$.
   b) Exprimer V_n en fonction de n.
   c) En déduire que pour tout entier naturel n, $C_n = 0,9^n \times 60 + 100$.
3. a) Déterminer la limite de la suite (C_n) quand n tend vers l'infini. Justifier la réponse. Interpréter le résultat au regard de la situation étudiée.
   b) Au bout de combien de semaines la concentration devient-elle inférieure à 140 mg.l $^{-1}$?
4. Le réglage envisagé du distributeur répond-il aux attentes ?

Partie B

Dans cette partie, on suppose que la quantité de produit déversée chaque semaine par le distributeur automatique est telle que la concentration augmente de 12 mg.l^{-1}.

Que penser de ce réglage au regard des deux conditions fixées par les techniciens ?

Exercice 2 (Métropole, septembre 2013). **7 points**

Un opérateur de téléphonie mobile organise une campagne de démarchage par téléphone pour proposer la souscription d'un nouveau forfait à sa clientèle, composée à 65 % d'hommes.

Des études préalables ont montré que 30 % des hommes contactés écoutent les explications, les autres raccrochant aussitôt (ou se déclarant immédiatement non intéressés). Parmi les femmes, 60 % écoutent les explications.

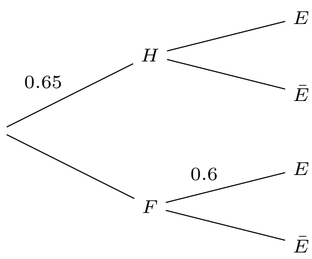
On admet que ces proportions restent stables.

Partie A

On choisit au hasard une personne dans le fichier clients. Chaque personne a la même probabilité d'être choisie.

On note H l'évènement « la personne choisie est un homme », F l'évènement « la personne choisie est une femme », E l'évènement « la personne choisie écoute les explications du démarcheur » et $\overline{E}$ l'évènement contraire de E.

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité proposé ci-dessous :



2. a) Traduire par une phrase l'évènement $E \cap F$ et calculer sa probabilité.
   b) Montrer que la probabilité que la personne choisie écoute les explications du démarcheur est égale à $0,405$.
   c) Le démarcheur s'adresse à une personne qui l'écoute. Quelle est la probabilité que ce soit un homme ? *On donnera le résultat arrondi au centième.*

Partie B

Les relevés réalisés au cours de ces premières journées permettent également de constater que 12 % des personnes interrogées souscrivent à ce nouveau forfait.

Chaque employé de l'opérateur effectue 60 appels par jour.

On suppose le fichier suffisamment important pour que les choix soient considérés réalisés de façon indépendante et dans des conditions identiques.

On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de souscriptions réalisées par un employé donné un jour donné.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Déterminer la probabilité que l'employé obtienne 5 souscriptions un jour donné. (*On arrondira le résultat au centième*).
3. Déterminer la probabilité que l'employé obtienne au moins une souscription un jour donné. *On donnera une valeur arrondie au dix millième.*

Exercice 3 (Nouvelle-Calédonie, mars 2014). **6 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[2; 5]$ par

$$f(x) = (3 - x)e^x + 1$$

On rappelle qu'on note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[2\ ;\ 5]$,
$f'(x) = (2-x)\mathrm{e}^x$ et $f''(x) = (1-x)\mathrm{e}^x$.
2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[2\ ;\ 5]$.
3. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2\ ;\ 5]$.
Montrer que : $3 < \alpha < 4$.
4. a) Soit T la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 3.
Montrer que T a pour équation $y = -\mathrm{e}^3 x + 3\mathrm{e}^3 + 1$.
   b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite T et de l'axe des abscisses.
   c) Étudier le signe de $f''(x)$ sur l'intervalle $[2\ ;\ 5]$ et en déduire la convexité ou la concavité de f sur cet intervalle.
5. *(Question facultative)* On considère l'algorithme suivant :

```
Variables :       a, b, m et r sont des nombres réels
Initialisation :  Affecter à a la valeur 3
                  Affecter à b la valeur 3,05
Entrée :          Saisir r
Traitement :      TANT QUE b − a > r
                      Affecter à m la valeur (a + b)/2
                      SI f(m) > 0
                          ALORS Affecter à a la valeur m
                          SINON Affecter à b la valeur m
                      FIN SI
                  FIN TANT QUE
Sortie :          Afficher a.
                  Afficher b
```

   a) Faire fonctionner l'algorithme précédent avec $r = 0,01$ en recopiant et complétant le tableau ci-dessous. On arrondira au millième les valeurs de $f(m)$.

	$b-a$	$b-a>r$	m	$f(m)$	$f(m)>0$	a	b
Initialisation						3	3,05
étape 1	0,05	oui	3,025	0,485	oui	3,025	3,05
étape 2							
étape 3							

   b) Interpréter les résultats trouvés pour a et b à la fin de l'étape 3.

Devoir commun 2 : Suites numériques, fonctions et probabilités conditionnelles

corrigé

Exercice 1 (Polynésie, juin 2015). **7 points**

Les techniciens d'un aquarium souhaitent régler le distributeur automatique d'un produit visant à améliorer la qualité de l'eau dans un bassin. La concentration recommandée du produit, exprimée en mg.l^{-1} (milligramme par litre), doit être comprise entre 140 mg.l^{-1} et 180 mg.l^{-1}.

Au début du test, la concentration du produit dans ce bassin est de 160 mg.l^{-1}.

On estime que la concentration du produit baisse d'environ 10 % par semaine.

Afin de respecter les recommandations portant sur la concentration du produit, les techniciens envisagent de régler le distributeur automatique de telle sorte qu'il déverse chaque semaine une certaine quantité de produit.

Les techniciens cherchent à déterminer cette quantité de façon à ce que :

- la concentration du produit soit conforme aux recommandations sans intervention de leur part, pendant une durée de 6 semaines au moins ;
- la quantité de produit consommée soit minimale.

Partie A

1. Toutes les semaines, la concentration baisse de 10 %, soit : $C_n \times \left(1 - \dfrac{1}{100}\right)$ mg.l^{-1}.
   De plus, chaque semaine le distributeur automatique déverse : 10 mg.l^{-1}, soit $C_n \times 0,9 + 10$.
   Au final, d'une semaine à l'autre, la concentration vaudra : $C_{n+1} = 0,9C_n + 10$.
2. a) On a :
   $$\begin{aligned} V_{n+1} &= C_{n+1} - 100 \\ &= 0,9C_n + 10 - 100 \\ &= 0,9C_n - 90 \\ &= 0,9(C_n - 100) \\ &= 0,9Vn \end{aligned}$$
   (V_n) est bien géométrique de raison $q = 0,9$.

   b) Le terme général de (V_n) de premier terme $V_0 = C_0 - 100 = 160 - 100 = 60$, vaut :
   $$V_n = V_0 \times q^n.$$
   Ainsi :
   $$V_n = 60 \times 0,9^n.$$

   c) Comme $V_n = C_n - 100 \Leftrightarrow C_n + V_n + 100$.
   Nous en déduisons que :
   $$C_n = 0,9^n \times 60 + 100$$
3. a) $C_n = a_n \times b_n + c_n$ avec :
   - $a_n = 0,9^n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0^+$, car a_n est de la forme q^n avec $q \in]0\ ;\ 1[$
   - $b_n = 60$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 60$
   - $c_n = 100$, $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 100$

   $\lim\limits_{n\to+\infty} C_n = 100$
   La concentration tendra donc vers 100 mg.l^{-1}.

b) Ici, on résout :

$$\begin{aligned}
C_n < 140 &\Leftrightarrow 0,9^n \times 60 + 100 < 140 \\
&\Leftrightarrow 0,9^n \times 60 < 40 \\
&\Leftrightarrow 0,9^n < \frac{2}{3} \\
&\Leftrightarrow \ln(0,9^n) < \ln\left(\frac{2}{3}\right) \qquad \text{(en effet : } a \leqslant b \Leftrightarrow \ln a \leqslant \ln b\text{)} \\
&\Leftrightarrow n\ln(0,9) w \ln\left(\frac{2}{3}\right) \\
&\Leftrightarrow n > \ln\left(\frac{2}{3}\right) \div \ln(0,9) \qquad \text{(en effet : } \ln 0,9 < 0\text{)} \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 4 \qquad \text{(en effet : } \ln\left(\frac{2}{3}\right) \div \ln(0,9) \approx 3,848\text{)}
\end{aligned}$$

Au bout de la quatrième semaine, la concentration sera inférieure ou égale à 140 mg.l^{-1}.

4. Non, la concentration sera inférieure à 140 mg.l^{-1} au bout de 4 semaines, la concentration recommandée du produit, exprimée en mg.l^{-1} doit être comprise entre 140 mg.l^{-1} et 160 mg.l^{-1} et elle doit se conformer à cela pendant une duére de six semaines au moins.

Partie B

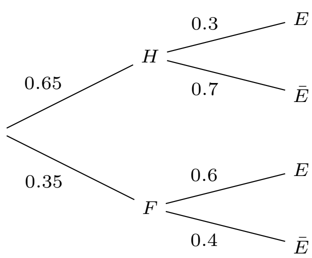
Ici (C_n) est la suite définie par la relation de récurrence suivante : $C_{n+1} = C_n \times 0,9 + 12$, avec $C_0 = 160$. En calculant les premiers termes, on obtient :

$C_1 = 156$, $C_2 = 152,4$, $C_3 = 149,16$, $C_4 = 146,244$, $C_5 = 143,6196$, $C_6 = 141,25764$ et $C_7 = 139,131876$.

Au bout de 7 semaines, la concentration sera à nouveau inférieure à 140 mg.l^{-1}, mais elle doit se conformer à cela pendant une durée de 6 semaines au moins. Nous sommes donc tout juste bon.

Exercice 2. Partie A

1. L'arbre de probabilité correspondant aux données du problème est :



2. a) L'événement $E \cap F$ est « la personne choisie écoute les explications du démarcheur et est une femme. ».
D'après les propriétés de l'arbre pondéré :
$P(E \cap F) = P(F \cap E) = P(F) \times P_F(E) = 0,35 \times 0,6 = 0,21$

b) La probabilité que la personne choisie écoute les explications du démarcheur est $P(E)$.
D'après la formule des probabilités totales :
$$\begin{aligned}
P(E) &= P(H \cap E) + P(F \cap E) = P(H) \times P_H(E) + P(F) \times P_F(E) \\
&= 0,65 \times 0,3 + 0,35 \times 0,6 = 0,195 + 0,21 = 0,405
\end{aligned}$$

c) Le démarcheur s'adresse à une personne qui l'écoute ; la probabilité que ce soit un homme est $P_E(H)$.
$$P_E(H) = \frac{P(E \cap H)}{P(E)} = \frac{0,65 \times 0,3}{0,405} \approx 0,48$$

Partie B

On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de souscriptions réalisées par un employé donné un jour donné.

1. Les relevés réalisés au cours des premières journées permettent de constater que 12 % des personnes interrogées souscrivent à ce nouveau forfait, donc la probabilité qu'une personne interrogée souscrive un nouveau forfait est $0,12$.
   Chaque employé de l'opérateur effectue 60 appels par jour.
   On suppose le fichier suffisamment important pour que les choix soient considérés réalisés de façon indépendante et dans des conditions identiques.
   La variable aléatoire X qui comptabilise le nombre de souscriptions réalisées par un employé donné un jour donné suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 60$ et $p = 0,12$.
2. La probabilité que l'employé obtienne 5 souscriptions est $P(X = 5)$.
   Pour une variable aléatoire X suivant la loi $\mathcal{B}(n\,,\,p)$ on sait que
   $$P(X = k) = \binom{n}{k}\,p^k(1-p)^{n-k}$$
   Donc $P(X = 5) = \binom{60}{5}\,0,12^5(1-0,12)^{60-5} \approx 0,120$
3. La probabilité que l'employé obtienne au moins une souscription un jour donné est $P(X \geq 1)$.
   $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0)$.
   $P(X = 0) = \binom{60}{0}\,0,12^0(1-0,12)^{60-0} \approx 0,0005$; donc $P(X \geq 1) \approx 0,9995$.

Exercice 3. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[2\,;\,5]$ par $f(x) = (3-x)\,e^{\,x} + 1$.

1. $f'(x) = (-1)\,e^{\,x} + (3-x)\,e^{\,x} = (2-x)\,e^{\,x}$
   $f''(x) = (-1)\,e^{\,x} + (2-x)\,e^{\,x} = (1-x)\,e^{\,x}$
2. On étudie le signe de $f'(x)$ sur $[2\,;5]$; pour tout x, $e^{\,x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2-x$.
   Sur $]2\,;5]$, $2-x < 0$ donc la fonction f est strictement décroissante sur $[2\,;5]$.
3. La fonction f est strictement décroissante sur $[2\,;5]$.
   De plus : $f(2) = (3-2)\,e^{\,2}+1 = e^{\,2}+1 \approx 8,4 > 0$ et $f(5) = (3-5)\,e^{\,5}+1 = -2\,e^{\,5}+1 \approx -296 < 0$.
   Or $0 \in [f(5)\,;f(2)]$ donc, d'après la propriété des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[2\,;5]$.
   Comme $f(3) = (3-3)\,e^{\,3}+1 = 1 > 0$ et $f(4) = (3-4)\,e^{\,4}+1 = -\,e^{\,4}+1 \approx -53,6 < 0$, on peut dire que : $3 < \alpha < 4$.
4. a) Soit T la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 3.
   La droite T a pour équation $y = f'(3)(x-3) + f(3)$;
   or $f'(x) = (2-x)\,e^{\,x}$ donc $f'(3) = (2-3)\,e^{\,3} = -\,e^{\,3}$ et $f(3) = 1$.
   Donc l'équation de T est : $y = -\,e^{\,3}(x-3)+1$ soit $y = -\,e^{\,3}x + 3\,e^{\,3}+1$.

   b) Le point d'intersection de la droite T et de l'axe des abscisses a pour ordonnée 0 et pour abscisse la solution de l'équation $-\,e^{\,3}x + 3\,e^{\,3}+1 = 0$.
   $$-\,e^{\,3}x + 3\,e^{\,3}+1 = 0 \iff 3\,e^{\,3}+1 = e^{\,3}x \iff \frac{3\,e^{\,3}+1}{e^{\,3}} = x \iff x = 3 + e^{\,-3}$$
   Le point d'intersection de T avec l'axe des abscisses a pour coordonnées $\left(3+e^{\,-3}\,;0\right)$.

   c) $f''(x) = (1-x)\,e^{\,x}$ est du signe de $1-x$ car $e^{\,x} > 0$ pour tout x.
   Sur $[2\,;5]$, $1-x < 0$ donc $f''(x) < 0$ donc f est concave.

   d) Sur $[2\,;5]$, la fonction f est concave ; donc sur $[2\,;5]$, la courbe représentant f est entièrement située au-dessous de chacune de ses tangentes.
   Le point d'intersection de la courbe représentant f avec l'axe des abscisses est donc situé à gauche du point d'intersection de la tangente T avec cet axe.
   Donc l'abscisse du point d'intersection de la courbe représentant f avec l'axe des abscisses (la solution de l'équation $f(x) = 0$) est inférieure à l'abscisse du point d'intersection de T avec l'axe des abscisses : $\alpha < 3 + e^{\,-3}$.
   On a donc : $3 < \alpha < 3 + \dfrac{1}{e^{\,3}} < 3,05$.
5. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	a, b, m et r sont des nombres réels
Initialisation :	Affecter à a la valeur 3
	Affecter à b la valeur 3,05
Entrée :	Saisir r
Traitement :	TANT QUE $b - a > r$
	Affecter à m la valeur $\dfrac{a+b}{2}$
	SI $f(m) > 0$
	ALORS Affecter à a la valeur m
	SINON Affecter à b la valeur m
	FIN SI
	FIN TANT QUE
Sortie :	Afficher a
	Afficher b

a) On fait fonctionner l'algorithme précédent avec $r = 0,01$:

	$b-a$	$b-a>r$	m	$f(m)$	$f(m)>0$	a	b
Initialisation						3	3,05
étape 1	0,05	oui	3,025	0,485	oui	3,025	3,05
étape 2	0,025	oui	3,0375	0,218	oui	3,0375	3,05
étape 3	0,0125	oui	3,04375	0,082	oui	3,04375	3,05
étape 4	0,00625	non					

b) Cet algorithme permet de donner un encadrement de la solution de l'équation $f(x) = 0$ par dichotomie.
On peut donc dire que le nombre α appartient à l'intervalle $[3,04375\,;3,05]$.

Nom: ___________________

Devoir commun 2 : Suites numériques, fonctions et probabilités conditionnelles (bis)

lundi 1 février 2016

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Cependant, le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou infructueuse, qu'il aura développée.

Exercice 1. **7 points**

Une société extrait du gravier pour la construction d'autoroutes. Elle envisage l'ouverture d'un nouveau site d'extraction. On admet qu'au bout de x centaines de jours, la production journalière sur ce site, en millier de tonnes, est donnée par :

$$f(x) = (2x^2 + 3x)e^{-x}$$

où x appartient à l'intervalle [0; 6].

1. Question préliminaire : Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = e^{-x}$ pour tout nombre réel x. On rappelle que $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.
   En déduire la dérivée $g'(x)$ (on simplifiera l'expression).
2. a) En déduire que, pour tout réel $x \in [0; 6]$:
   $$f'(x) = (-2x^2 + x + 3)e^{-x}$$
   b) Établir le tableau de variations de f sur l'intervalle [0; 6].
   c) Déterminer au bout de combien de jours après l'ouverture du site, la production journalière sera maximale. Quelle est cette production maximale en millier de tonnes ?
3. a) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ sur l'intervalle [0; 6]. Donner une valeur approchée au centième des solutions.
   b) Au bout de combien de jours, après l'ouverture du site, la production journalière, après avoir atteint son maximum, sera revenue à 1000 tonnes ?
4. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a trouvé que
   $$f''(x) = (2x^2 - 5x - 2)e^{-x}$$
   a) Étudier la convexité de f.
   b) Est-ce que la courbe représentative de la fonction admet un point d'inflexion ? Si oui, déterminer son abscisse.
5. Soit T la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 2.
   Montrer que T a pour équation $y = -3e^{-2}\,x + 20e^{-2}$.

Exercice 2 (Nouvelle-Calédonnie, novembre 2013). **6 points**

On interroge des français de plus de 15 ans sur le nombre de langues étrangères qu'ils parlent « bien », c'est-à-dire qu'ils parlent suffisamment bien pour participer à une conversation. À l'issue du sondage, on observe que l'échantillon des personnes interrogées est partagé en trois catégories :

- 44 % des personnes interrogées ne parlent « bien » aucune langue étrangère.
- 28 % des personnes interrogées parlent « bien » une langue étrangère.
- 28 % des personnes interrogées parlent « bien » deux ou plus de deux langues étrangères.

(d'après EUROBAROMÈTRE 64.3 Commission Européenne 2005)

Ces trois catégories seront désignées dans la suite du problème respectivement par L0, L1 et L2+.

56 % des personnes de la catégorie L1 citent l'anglais comme la langue étrangère qu'elles parlent « bien ».

73 % des personnes de la catégorie L2+ citent l'anglais parmi les langues étrangères qu'elles parlent « bien ».

On choisit de manière aléatoire une personne de cet échantillon.

On note

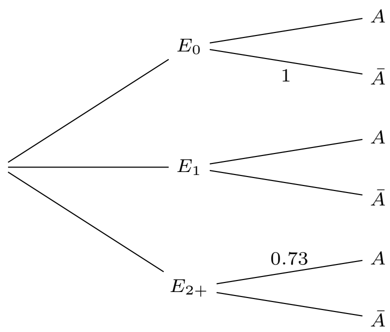
E_0 l'évènement : « la personne ne parle bien aucune langue étrangère »,

E_1 l'évènement : « la personne parle bien une langue étrangère »,

E_{2+} l'évènement : « la personne parle bien deux ou plus de deux langues étrangères »,

A est l'évènement : « la personne parle bien l'anglais » et $\overline{A}$ l'évènement contraire de A.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant pour qu'il traduise les données de l'expérience aléatoire décrite dans l'énoncé :



Dans la suite de l'exercice les résultats seront donnés, éventuellement arrondis, au dix millième.

2. Calculer la probabilité que la personne choisie soit de la catégorie L1 et qu'elle ne parle pas « bien » l'anglais.
3. Montrer que la probabilité que la personne choisie parle « bien » l'anglais vaut 0.3612.
4. Calculer la probabilité que la personne soit de la catégorie L2+ sachant qu'elle parle « bien » l'anglais.
5. Un groupe de quatre français, chacun de plus de 15 ans, part pour un séjour à Londres. Quelle est la probabilité qu'au moins une personne de ce groupe parle « bien » l'anglais.

Exercice 3 (Nouvelle-Calédonie, novembre 2014). **7 points**

Le service commercial d'une société possédant plusieurs salles de sport dans une grande ville a constaté que l'évolution du nombre d'abonnés était définie de la manière suivante :

- chaque année, la société accueille 400 nouveaux abonnés ;
- chaque année 40 % des abonnements de l'année précédente ne sont pas renouvelés.

En 2010 cette société comptait 1500 abonnés.

On considère la suite (a_n) définie par

$$a_{n+1} = 0,6a_n + 400 \quad \text{et} \quad a_0 = 1500.$$

1. Justifier que la suite (a_n) modélise le nombre d'abonnés pour l'année $2010 + n$.
2. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = a_n - 1000$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.
   c) En déduire que : $a_n = 500 \times 0,6^n + 1000$.

3. En 2010 le prix d'un abonnement annuel dans une salle de sport de cette société était de 400 €.

   a) Quelle a été la recette de cette société en 2010 ?
   Chaque année le prix de cet abonnement augmente de 5 %.
   On note P_n le prix de l'abonnement annuel pour l'année $2010 + n$.

   b) Indiquer la nature de la suite (P_n) en justifiant la réponse.
   En déduire l'expression de P_n en fonction de n.

   c) Montrer que, pour l'année $2010 + n$, la recette totale annuelle R_n réalisée par la société pour l'ensemble de ses salles de sport est donnée par :

$$R_n = (500 \times 0,6^n + 1000) \times (400 \times 1,05^n)\,.$$

   d) *(Question facultative)* On souhaite déterminer l'année où, pour la première fois, la recette de cette société dépassera celle obtenue en 2010. Ci-dessous, une version incomplète d'un algorithme permettant de déterminer cette année. Compléter cet algorithme.

Variables :
R est un nombre réel
n est un entier.
Traitement :
Affecter à R la valeur _ _ _ _ _ _ _ _ _
Affecter à n la valeur 0.
Tant que $R \leq$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ **faire**
    Augmenter n de 1
    Affecter à R la valeur _
Fin Tant que
Afficher $2010 + n$.

Déterminer cette année où la recette totale dépassera, pour la première fois, celle obtenue en 2010.

Devoir commun 2 : Suites numériques, fonctions et probabilités conditionnelles (bis)

corrigé

Exercice 1. **7 points**

Une société extrait du gravier pour la construction d'autoroutes. Elle envisage l'ouverture d'un nouveau site d'extraction. On admet qu'au bout de x centaines de jours, la production journalière sur ce site, en millier de tonnes, est donnée par :

$$f(x) = (2x^2 + 3x)e^{-x}$$

où x appartient à l'intervalle $[0;\ 6]$.

1. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = e^{-x}$ pour tout nombre réel x. On rappelle que $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$. En utilisant le formule de dérivation d'une inverse, on déduit que quel que soit le nombre réel x, on a

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{1}{e^x}\right)' \\ &= \frac{-(e^x)'}{(e^x)^2} \\ &= \frac{-e^x}{e^{2x}} && \text{car } (e^x)^n = e^{nx} \\ &= -e^x \times e^{-2x} && \text{car } e^a \times e^b = e^{a+b} \\ &= -e^{x-2x} \\ &= -e^{-x} \end{aligned}$$

2. a) À l'aide de la question précédente et de la formule de dérivation du produit, on a que pour tout réel $x \in [0; 6]$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x^2 + 3x)e^{-x} \\ &= (2x^2 + 3x)' \times e^{-x} + (2x^2 + 3x) \times \left(e^{-x}\right)' \\ &= (4x + 3)e^{-x} + (2x^2 + 3x) \times (-e^{-x}) \\ &= (4x + 3 - (2x^2 + 3x))e^{-x} && \text{factorisation de } e^{-x} \\ &= (-2x^2 + x + 3)e^{-x} \end{aligned}$$

   b) Comme la fonction exponentielle est positive, le signe de $f'(x)$ dépend uniquement du polynôme du second degré $-2x^2+x+3$. Son discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-2) \times 3 = 25$ et $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{25}}{2\times(-2)} = -1$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3}{2}$. Rappelons que le polynôme est du signe de son coefficient dominant $a = -2$ en dehors de l'intervalle $[x_1;\ x_2]$. D'où, la tableau de variations de f sur l'intervalle $[0;\ 6]$:

x	0		$\frac{3}{2}$		6
$-2x^2 + x + 3$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	2.01	$\searrow$	0.22

   c) D'après le tableau de variation de la fonction f, elle atteint un maximum lorsque x vaut 1.5. Ainsi par définition de la fonction f, au bout de 150 jours après l'ouverture du site, la production journalière sera maximale et elle sera d'environ 2.01 milliers de tonnes.

3. a) D'après le tableau de variation de la fonction f, la fonction f est continue strictement croissante sur l'intervalle $[0; 1.5]$, ainsi elle prend chacune des valeurs de 0 à 2.01 une et une seule fois. D'où $f(x) = 1$ admet une première solution x_1 sur cet intervalle. De même sur l'intervalle $[1.5; 6]$, on déduit qu'il y a une seconde solution x_2. À l'aide d'une table faite avec la calculatrice, on note que $x_1 \simeq 0.39$ et $x_2 \simeq 3.6$ au centième près.

b) D'après la question précédente, après avoir atteint son maximum, la fonction reprend la valeur 1 lorsque $x \simeq 3.6$. D'où, au bout de 360 jours, après l'ouverture du site, la production journalière, après avoir atteint son maximum, sera revenue à 1000 tonnes.

4. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a trouvé que

$$f''(x) = (2x^2 - 5x - 2)e^{-x}$$

a) Encore une fois le signe de la dérivée seconde $f''(x)$ dépend uniquement de cet autre polynôme du second degré $2x^2 - 5x - 2$. Son discriminant $\Delta = 41$, $x_1 \simeq -0.35$ et $x_2 = \frac{5+\sqrt{41}}{4} \simeq 2.85$. On en déduit le tableau suivant :

x	0	$\frac{5+\sqrt{41}}{4}$	6
$2x^2 - 5x - 2$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	concave		convexe

C'est-à-dire la fonction f est concave sur l'intervalle $[0; \frac{5+\sqrt{41}}{4}]$ et convexe sur l'intervalle $[\frac{5+\sqrt{41}}{4}; 6]$.

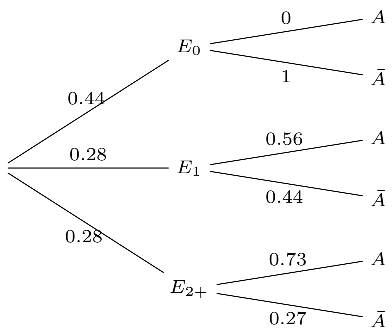
b) La fonction f change de convexité en $\frac{5+\sqrt{41}}{4}$, ainsi la courbe représentative de la fonction admet un point d'inflexion au point d'abscisse $\frac{5+\sqrt{41}}{4}$.

5. Soit T la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 2.
D'après le cours, la tangente admet comme équation $y = f'(2)(x-2) + f(2)$. Or $f(2) = 14e^{-2}$ et $f'(2) = -3e^{-2}$, d'où l'équation de T :

$$y = -3e^{-2}(x-2) + 14e^{-2}$$
$$y = -3e^{-2}x + 6e^{-2} + 14e^{-2}$$
$$y = -3e^{-2}x + 20e^{-2}$$

Exercice 2 (Nouvelle-Calédonnie, novembre 2013). **6 points**

1. On complète l'arbre pondéré donné pour qu'il traduise les données de l'expérience aléatoire décrite dans l'énoncé :



2. La probabilité que la personne choisie soit de la catégorie L1 et qu'elle ne parle pas « bien » l'anglais est :

$$\mathbb{P}(E_1 \cap \overline{A}) = \mathbb{P}(E_1) \times P_{E_1}(\overline{A}) = 0,28 \times 0,44 = 0,1232$$

3. La probabilité que la personne choisie ne parle pas « bien » l'anglais est $P(A)$. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(E_0 \cap A) + P(E_1 \cap A) + P(E_{2+} \cap A) \\ &= P(E_0) \times P_{E_0}(A) + P(E_1) \times P_{E_1}(A) + P(E_{2+}) \times P_{E_{2+}}(A) \\ &= 0,44 \times 0 + 0,28 \times 0,56 + 0,28 \times 0,73 \\ &= 0,3612 \end{aligned}$$

4. La probabilité que la personne soit de la catégorie L2+ sachant qu'elle parle « bien » l'anglais est

$$P_A(E_{2+}) = \frac{P(A \cap E_{2+})}{P(A)} = \frac{P(E_{2+}) \times P_{E_{2+}}(A)}{P(A)} = \frac{0,28 \times 0,73}{0,3612} \approx 0,5659$$

5. Un groupe de quatre français, chacun de plus de 15 ans, part pour un séjour à Londres. Notons X le nombre de personnes parlant « bien » l'anglais parmi les quatre, alors, à l'échelle de la population française, on peut supposer que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \mathbb{P}(A) = 0.3612$. Ainsi la probabilité qu'au moins une personne de ce groupe parle « bien » l'anglais est

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - 0.3612^4 \simeq 0.983$$

Exercice 3 (Nouvelle-Calédonie, novembre 2014). **7 points**

1. Si on désigne par a_n le nombre d'abonnements l'année $2010+n$, l'année d'après , en $2010+(n+1)$, de ces abonnements il en reste 60% donc $0,6 \times a_n$, et on y ajoute 400 pour avoir le nombre d'abonnements l'année $2010 + (n + 1)$ donc

$$a_{n+1} = 0,6a_n + 400.$$

De plus a_0 qui désigne le nombre d'abonnements l'année 2010 vaut 1500.

2. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = a_n - 1000$.
   a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = a_{n+1} - 1000$
   $v_{n+1} = (0,6a_n + 400) - 1000$
   $v_{n+1} = 0,6a_n - 600$ or $600 = 0,6 \times 1000$
   $v_{n+1} = 0,6\,(a_n - 1000)$
   $v_{n+1} = (0,6v_n)$.
   La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,6$ et de premier terme : $v_0 = a_0 - 1000$
   $v_0 = 1500 - 1000$
   $v_0 = 500$.
   b) On sait que pour une suite géométrique, pour tout nß$\mathbb{N}$ $v_n = v_0 \times q^n$
   donc $v_n = 500 \times 0,6^n$.
   c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = v_n + 1000$, donc $a_n = 500 \times 0,6^n + 1000$.
3. a) On multiplie le nombre d'abonnements par le prix d'un abonnement :
   $1500 \times 400 = 600000$.
   b) Quand une quantité augmente de 5%, par a chaque quantité est obtenue en multipliant la précédente par le coefficient multiplicateur $(1 + \frac{5}{100}) = 1,05$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P_{n+1} = 1,05 \times P_n$$

   La nature de la suite (P_n) est donc géométrique de raison $1,05$, de premier terme $P_0 = 400$.
   Et comme au 2)b), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = 400 \times 1,05^n$.
   c) Pour l'année $2010 + n$, la recette totale annuelle s'obtient en multipliant le nombre d'abonnements par le prix d'un abonnement :

$$R_n = a_n \times P_n = (500 \times 0,6^n + 1000) \times (400 \times 1,05^n)\,.$$

   d) L'algorithme complet :

Variables :
R est un nombre réel
n est un entier.
Traitement :
Affecter à R la valeur 600 000
Affecter à n la valeur 0.
Tant que $R \leq 600\,000$ **faire**
    Augmenter n de 1
    Affecter à R la valeur $(500 \times 0,6^n + 1000) \times (400 \times 1,05^n)$
Fin Tant que
Afficher $2010 + n$.

A l'aide de la calculatrice on voit que les valeurs de la suite (P_n) commencent par diminuer puis elles augmentent à partir de $n = 3$;
D'autre part, $R_8 = 595\,945 < 600\,000 < R_9 = 623\,658$, donc c'est en $2010 + 9 = 2019$ que pour la première fois, la recette de cette société dépassera celle obtenue en 2010 qui était de 600 000.

Nom: ____________________

Devoir commun 2 : Suites numériques, fonctions et probabilités conditionnelles (ter)

vendredi 5 février 2016

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Cependant, le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou infructueuse, qu'il aura développée.

Exercice 1 (Polynésie, juin 2015). **7 points**

Les techniciens d'un aquarium souhaitent régler le distributeur automatique d'un produit visant à améliorer la qualité de l'eau dans un bassin. La concentration recommandée du produit, exprimée en mg.l^{-1} (milligramme par litre), doit être comprise entre 140 mg.l^{-1} et 180 mg.l^{-1}.

Au début du test, la concentration du produit dans ce bassin est de 160 mg.l^{-1}.

On estime que la concentration du produit baisse d'environ 10 % par semaine.

Afin de respecter les recommandations portant sur la concentration du produit, les techniciens envisagent de régler le distributeur automatique de telle sorte qu'il déverse chaque semaine une certaine quantité de produit.

Les techniciens cherchent à déterminer cette quantité de façon à ce que :

- la concentration du produit soit conforme aux recommandations sans intervention de leur part, pendant une durée de 6 semaines au moins ;
- la quantité de produit consommée soit minimale.

Partie A

Dans cette partie, on suppose que la quantité de produit déversée chaque semaine par le distributeur automatique est telle que la concentration augmente de 10 mg.l^{-1}.

On s'intéresse à l'évolution de la concentration chaque semaine. La situation peut être modélisée par une suite (C_n), le terme C_n en donnant une estimation de la concentration du produit, en mg.l^{-1}, au début de la n-ième semaine. On a $C_0 = 160$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, $C_{n+1} = 0,9 \times C_n + 10$.
2. Soit la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par : $V_n = C_n - 100$.
   a) Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison $0,9$ et que $V_0 = 60$.
   b) Exprimer V_n en fonction de n.
   c) En déduire que pour tout entier naturel n, $C_n = 0,9^n \times 60 + 100$.
3. a) Déterminer la limite de la suite (C_n) quand n tend vers l'infini. Justifier la réponse. Interpréter le résultat au regard de la situation étudiée.
   b) Au bout de combien de semaines la concentration devient-elle inférieure à 140 mg.l $^{-1}$?
4. Le réglage envisagé du distributeur répond-il aux attentes ?

Partie B

Dans cette partie, on suppose que la quantité de produit déversée chaque semaine par le distributeur automatique est telle que la concentration augmente de 12 mg.l^{-1}.

Que penser de ce réglage au regard des deux conditions fixées par les techniciens ?

Exercice 2 (Nouvelle-Calédonnie, novembre 2013). **6 points**

On interroge des français de plus de 15 ans sur le nombre de langues étrangères qu'ils parlent « bien », c'est-à-dire qu'ils parlent suffisamment bien pour participer à une conversation. À l'issue du sondage, on observe que l'échantillon des personnes interrogées est partagé en trois catégories :

- 44 % des personnes interrogées ne parlent « bien » aucune langue étrangère.
- 28 % des personnes interrogées parlent « bien » une langue étrangère.
- 28 % des personnes interrogées parlent « bien » deux ou plus de deux langues étrangères.

(d'après EUROBAROMÈTRE 64.3 Commission Européenne 2005)

Ces trois catégories seront désignées dans la suite du problème respectivement par L0, L1 et L2+.

56 % des personnes de la catégorie L1 citent l'anglais comme la langue étrangère qu'elles parlent « bien ».

73 % des personnes de la catégorie L2+ citent l'anglais parmi les langues étrangères qu'elles parlent « bien ».

On choisit de manière aléatoire une personne de cet échantillon.

On note

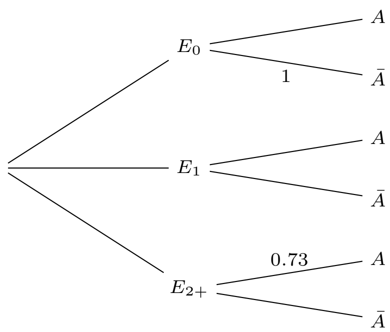
E_0 l'évènement : « la personne ne parle bien aucune langue étrangère »,

E_1 l'évènement : « la personne parle bien une langue étrangère »,

E_{2+} l'évènement : « la personne parle bien deux ou plus de deux langues étrangères »,

A est l'évènement : « la personne parle bien l'anglais » et $\overline{A}$ l'évènement contraire de A.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant pour qu'il traduise les données de l'expérience aléatoire décrite dans l'énoncé :



   Dans la suite de l'exercice les résultats seront donnés, éventuellement arrondis, au dix millième.

2. Calculer la probabilité que la personne choisie soit de la catégorie L1 et qu'elle ne parle pas « bien » l'anglais.
3. Montrer que la probabilité que la personne choisie parle « bien » l'anglais vaut 0.3612.
4. Calculer la probabilité que la personne soit de la catégorie L2+ sachant qu'elle parle « bien » l'anglais.
5. Un groupe de quatre français, chacun de plus de 15 ans, part pour un séjour à Londres. Quelle est la probabilité qu'au moins une personne de ce groupe parle « bien » l'anglais.

Exercice 3 (Nouvelle-Calédonie, mars 2014). **7 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[2; 5]$ par

$$f(x) = (3 - x)e^x + 1$$

On rappelle qu'on note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[2 ; 5]$, $f'(x) = (2 - x)\mathrm{e}^x$ et $f''(x) = (1 - x)\mathrm{e}^x$.

2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[2\ ;\ 5]$.
3. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2\ ;\ 5]$.
   Montrer que : $3 < \alpha < 4$.
4. a) Soit T la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 3.
   Montrer que T a pour équation $y = -\mathrm{e}^3 x + 3\mathrm{e}^3 + 1$.
   b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite T et de l'axe des abscisses.
   c) Étudier le signe de $f''(x)$ sur l'intervalle $[2\ ;\ 5]$ et en déduire la convexité ou la concavité de f sur cet intervalle.
5. *(Question facultative)* On considère l'algorithme suivant :

Variables :	a, b, m et r sont des nombres réels
Initialisation :	Affecter à a la valeur 3
	Affecter à b la valeur 3,05
Entrée :	Saisir r
Traitement :	TANT QUE $b - a > r$
	Affecter à m la valeur $\dfrac{a+b}{2}$
	SI $f(m) > 0$
	ALORS Affecter à a la valeur m
	SINON Affecter à b la valeur m
	FIN SI
	FIN TANT QUE
Sortie :	Afficher a.
	Afficher b

a) Faire fonctionner l'algorithme précédent avec $r = 0,01$ en recopiant et complétant le tableau ci-dessous. On arrondira au millième les valeurs de $f(m)$.

	$b-a$	$b-a>r$	m	$f(m)$	$f(m)>0$	a	b
Initialisation						3	3,05
étape 1	0,05	oui	3,025	0,485	oui	3,025	3,05
étape 2							
étape 3							

b) Interpréter les résultats trouvés pour a et b à la fin de l'étape 3.

Nom: ____________________

Devoir commun 2 : Suites numériques, fonctions et probabilités conditionnelles (quater)

mercredi 24 février 2016

Exercice 1.

PARTIE I : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ telle que pour tout réel x de cet intervalle :

$$f(x) = 5(1 - \ln x)(\ln x - 2)$$

et dont la représentation graphique est donnée en annexe 2.

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$. Les valeurs exactes sont demandées.
2. a) Déterminer le signe de l'expression $5(1 - X)(X - 2)$ suivant les valeurs du réel X.
   b) En déduire que le signe de $f(x)$ est donné pour tout réel de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par le tableau suivant :

x	0		e		e^2		$+\infty$
signe de $f(x)$	||	$-$		$+$		$-$	

3. a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{5(3 - 2\ln x)}{x}$ pour tout x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   b) En déduire les variations de f. On précisera la valeur exacte du maximum de f et la valeur exacte de x pour laquelle il est atteint.
4. Calculer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
5. Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ puis donner une valeur approchée arrondie à $0,01$ près de ces solutions.

PARTIE II : Application

Une entreprise fabrique et revend des jouets.
$f(x)$ représente le résultat (bénéfice ou perte) en milliers d'euros qu'elle réalise lorsqu'elle fabrique x centaines de jouets, pour x compris entre 1 et 10, f désignant la fonction étudiée dans la partie I.

1. Déterminer, à un jouet près, les quantités à produire pour ne pas travailler à perte.
   Interpréter concrètement le résultat de la question I. 2. Comment le lit-on sur le graphique ?
2. Cette entreprise veut réaliser un bénéfice supérieur ou égal à 1000 euros.
   Combien de jouets doit-elle fabriquer ? Justifier la réponse.

Exercice 2. Un hôpital est composé de trois services : service de soins A, service de soins B, service de soins C. On s'intéresse aux prises de sang effectuées dans cet hôpital.

On a constaté après l'observation d'une assez longue période que :

- 40 % des prises de sang sont effectuées dans le service de soins A,
- un tiers le sont dans le service de soins B,
- les autres dans le service de soins C.

Les aiguilles utilisées pour effectuer les prises de sang sont fournies soit par le laboratoire GLOBULEX, soit par le laboratoire HÉMATIS ;

- dans le service de soins A, 60 % des prises de sang effectuées le sont avec des aiguilles fournies par le laboratoire GLOBULEX ;
- dans le service de soins B, $\dfrac{4}{5}$ des prises de sang effectuées le sont avec des aiguilles fournies par le laboratoire HÉMATIS ;
- dans le service de soins C, il y a autant de prises de sang effectuées avec des aiguilles fournies par le laboratoire GLOBULEX que de prises de sang effectuées avec des aiguilles fournies par le laboratoire HÉMATIS.

On choisit au hasard un patient qui a subi une prise de sang dans l'hôpital.
On considère les évènements suivants :

— A : « La prise de sang a été effectuée dans le service de soins A. »
— B : « La prise de sang a été effectuée dans le service de soins B. »
— C : « La prise de sang a été effectuée clans le service de soins C. »
— G : « L'aiguille utilisée a été fournie par le laboratoire GLOBULEX. »
— H : « L'aiguille utilisée a été fournie par le laboratoire HÉMATIS. »

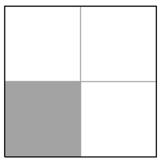
Pour toutes les questions, en donnera les valeurs exactes des probabilités demandées

1. Représenter la situation par un arbre en complétant cet arbre autant qu'il est possible.
2. Déterminer la probabilité de l'évènement « Le patient a subi une prise de sang dans le service de soins B avec une aiguille fournie par le laboratoire HÉMATIS ».
3. Calculer la probabilité de l'évènement H.
4. Le patient a subi une prise de sang avec une aiguille fournie par le laboratoire HÉMATIS.
   Déterminer la probabilité que cette prise de sang ait été effectuée dans le service de soins B.

Exercice 3. On effectue un coloriage en plusieurs étapes d'un carré de côté de longueur 2 cm.

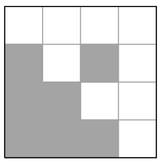
Première étape du coloriage :

On partage ce carré en quatre carrés de même aire et on colorie le carré situé en bas à gauche comme indiqué sur la figure ci-dessous (la figure n'est pas en vraie grandeur).



Deuxième étape du coloriage :

On partage chaque carré non encore colorié en quatre carrés de même aire et on colorie dans chacun, le carré situé en bas à gauche, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



On poursuit les étapes du coloriage en continuant le même procédé.

Pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 1, on désigne par A_n l'aire, exprimée en cm^2, de la surface totale coloriée après n coloriages.

On a ainsi $A_1 = 1$.

La surface coloriée sur la figure à la 2$^{\text{e}}$ étape du coloriage a donc pour aire A_2.

Les deux parties suivantes A et B de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

1. Représenter la partie coloriée lors de la troisième étape.
2. Calculer A_2 puis montrer que $A_3 = \dfrac{37}{16}$.
3. On considère l'algorithme suivant :

Entrée :	P un entier naturel non nul.
Initialisation :	N = 1 ; U = 1.
Traitement :	
	Tant que $N \leqslant P$:
	Afficher U
	Affecter à N la valeur N +1
	Affecter à U la valeur $\dfrac{5}{4} \times U + \dfrac{1}{2}$
	Fin Tant que

a) Faire fonctionner cet algorithme avec $P = 3$.

b) Cet algorithme permet d'afficher les P premiers termes d'une suite U de terme général U_n. Dire si chacune des deux propositions suivantes est vraie ou fausse. Justifier la réponse.

Proposition 1 : Il existe un entier naturel n strictement supérieur à 1 tel que $U_n = A_n$.

Proposition 2 : Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $U_n = A_n$.

Partie B

On admet que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A_{n+1} = \dfrac{3}{4}A_n + 1$.

1. On pose pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $B_n = A_n - 4$.
   a) Calculer B_1.
   b) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $B_{n+1} = \dfrac{3}{4}B_n$.
   c) Quelle est la nature de la suite (B_n) ?
   d) Exprimer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le terme général B_n de la suite (B_n) en fonction de n.
2. Quel est le comportement de A_n lorsque n tend vers $+\infty$? Justifier la réponse.
   Donner une interprétation de ce résultat en rapport avec l'aire de la surface coloriée.

Devoir maison 3 : Fonctions, suites, probabilités conditionnelles

pour le lundi 22 février 2016

Exercice 1. Une société extrait du gravier pour la construction d'autoroutes. Elle envisage l'ouverture d'un nouveau site d'extraction. On admet qu'au bout de x centaines de jours, la production journalière sur ce site, en millier de tonnes, est donnée par :

$$f(x) = (2x^2 + 3x)e^{-x}$$

où x appartient à l'intervalle $[0;\, 6]$.

1. Question préliminaire : Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = e^{-x}$ pour tout nombre réel x. On rappelle que $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$. En déduire la dérivée $g'(x)$ (on simplifiera l'expression).
2. a) En déduire que, pour tout réel $x \in [0; 6]$:

$$f'(x) = (-2x^2 + x + 3)e^{-x}$$

   b) Établir le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0;\, 6]$.

   c) Déterminer au bout de combien de jours après l'ouverture du site, la production journalière sera maximale. Quelle est cette production maximale en millier de tonnes ?
3. a) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ sur l'intervalle $[0;\, 6]$. Donner une valeur approchée au centième des solutions.

   b) On considère l'algorithme suivant :

Variables :	a, b, m et r sont des nombres réels
Initialisation :	Affecter à a la valeur 3
	Affecter à b la valeur 4
Entrée :	Saisir r
Traitement :	TANT QUE $b - a > r$
	Affecter à m la valeur $\dfrac{a+b}{2}$
	SI $f(m) > 1$
	ALORS Affecter à a la valeur m
	SINON Affecter à b la valeur m
	FIN SI
	FIN TANT QUE
Sortie :	Afficher a.
	Afficher b

   i. Faire fonctionner l'algorithme précédent avec $r = 0,01$ en recopiant et complétant le tableau ci-dessous. On arrondira au millième les valeurs de $f(m)$.

	$b-a$	$b-a>r$	m	$f(m)$	$f(m)>1$	a	b
Initialisation						3	4
étape 1	$4-3=1$	oui	3.5	1.057	oui	3.5	4
étape 2	$4-3.5=0.5$	oui	3.75	0.926	non	3.5	3.75
étape 3							
étape 4							
étape 5							

   ii. Interpréter les résultats trouvés pour a et b à la fin de l'étape 5.

   c) Au bout de combien de jours, après l'ouverture du site, la production journalière, après avoir atteint son maximum, sera revenue à 1000 tonnes ?

4. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a trouvé que

$$f''(x) = (2x^2 - 5x - 2)e^{-x}$$

   a) Étudier la convexité de f.
   b) Est-ce que la courbe représentative de la fonction admet un point d'inflexion ? Si oui, déterminer son abscisse.

5. Soit T la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 2.
   Montrer que T a pour équation $y = -3e^{-2}\,x + 20e^{-2}$.

Exercice 2. On considère la fonction $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = -x^2 - 2x + 12\ln(x)$.

1. Montrer que $f'(x) = \frac{-2(x-2)(x+3)}{x}$ pour tout réel x strictement positif.
2. En déduire le tableau de variation de la fonction f.

Exercice 3. Le service commercial d'une société possédant plusieurs salles de sport dans une grande ville a constaté que l'évolution du nombre d'abonnés était définie de la manière suivante :

- chaque année, la société accueille 300 nouveaux abonnés ;
- chaque année 25 % des abonnements de l'année précédente ne sont pas renouvelés.

En 2010 cette société comptait 1500 abonnés.
On considère la suite (a_n) définie par

$$a_{n+1} = 0,75a_n + 300 \quad \text{et} \quad a_0 = 1500.$$

1. Justifier que la suite (a_n) modélise le nombre d'abonnés pour l'année $2010 + n$.
2. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = a_n - 1200$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.
   c) En déduire que : $a_n = 300 \times 0,75^n + 1200$.
3. En 2010 le prix d'un abonnement annuel dans une salle de sport de cette société était de 200 €.
   a) Quelle a été la recette de cette société en 2010 ?
   Chaque année le prix de cet abonnement augmente de 2 %.
   On note P_n le prix de l'abonnement annuel pour l'année $2010 + n$.
   b) Indiquer la nature de la suite (P_n) en justifiant la réponse.
   En déduire l'expression de P_n en fonction de n.
   c) Montrer que, pour l'année $2010 + n$, la recette totale annuelle R_n réalisée par la société pour l'ensemble de ses salles de sport est donnée par :

$$R_n = (300 \times 0,75^n + 1200) \times (200 \times 1,02^n).$$

   d) On souhaite déterminer l'année où, pour la première fois, la recette de cette société dépassera celle obtenue en 2010. Ci-contre, une version incomplète d'un algorithme permettant de déterminer cette année. Compléter cet algorithme.

Variables :
R est un nombre réel
n est un entier.
Traitement :
Affecter à R la valeur _ _ _ _ _ _ _ _ _
Affecter à n la valeur 0.
Tant que $R \leq$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ **faire**
    Augmenter n de 1
    Affecter à R la valeur _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _
Fin Tant que
Afficher $2010 + n$.

   Déterminer cette année où la recette totale dépassera, pour la première fois, celle obtenue en 2010.

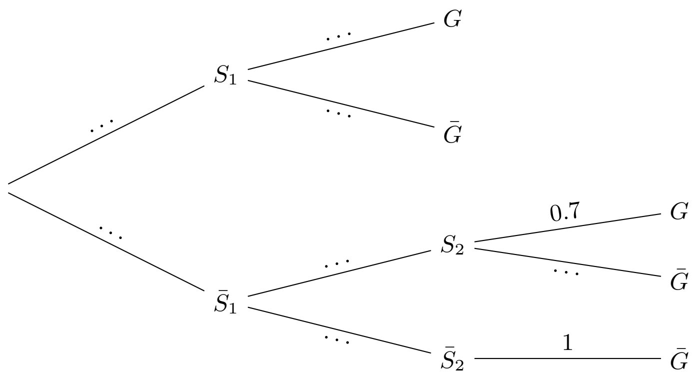
Exercice 4. Au tennis, le joueur qui est "au service" dispose de deux essais pour son service. S'il rate ces deux essais, il perd le point (on parle de double faute).
On note les événements suivants :

- S_1 : "le premier service est réussi" ;
- S_2 : "le deuxième service est réussi" ;
- G : "le point est gagné par le joueur qui est au service".

Une étude sur les précédents matchs du joueur Naderer a permis d'établir que, lorsqu'il sert :

- il réussit dans 75% des cas son premier service et lorsque ce premier service est réussi, il gagne le point dans 92% des cas ;
- s'il ne réussit pas son premier service, il réussit le second dans 96% des cas et lorsque ce second service est réussi, il gagne le point dans 70% des cas.

1. Compléter l'arbre suivant :



2. Calculer $P(S_1 \cap G)$.
3. Calculer la probabilité que le joueur Naderer réussisse son second service et gagne l'échange.
4. Calculer la probabilité que le joueur Naderer gagne l'échange.
5. Sachant que le joueur Naderer a gagné l'échange, calculer la probabilité que sa première balle de service ait été jugée "bonne". *Le résultat sera arrondi au millième.*
6. Calculer la probabilité que le joueur Naderer gagne quatre échanges consécutifs.
   On donnera le résultat arrondi au millième.

Devoir maison 3 : Fonctions, suites, probabilités conditionnelles

corrigé

Exercice 1. Une société extrait du gravier pour la construction d'autoroutes. Elle envisage l'ouverture d'un nouveau site d'extraction. On admet qu'au bout de x centaines de jours, la production journalière sur ce site, en millier de tonnes, est donnée par :

$$f(x) = (2x^2 + 3x)e^{-x}$$

où x appartient à l'intervalle $[0;\ 6]$.

1. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = e^{-x}$ pour tout nombre réel x. On rappelle que $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$. En utilisant le formule de dérivation d'une inverse, on déduit que quel que soit le nombre réel x, on a

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{1}{e^x}\right)' \\ &= \frac{-(e^x)'}{(e^x)^2} \\ &= \frac{-e^x}{e^{2x}} && \text{car } (e^x)^n = e^{nx} \\ &= -e^x \times e^{-2x} && \text{car } e^a \times e^b = e^{a+b} \\ &= -e^{x-2x} \\ &= -e^{-x} \end{aligned}$$

2. a) À l'aide de la question précédente et de la formule de dérivation du produit, on a que pour tout réel $x \in [0; 6]$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x^2 + 3x)e^{-x} \\ &= (2x^2 + 3x)' \times e^{-x} + (2x^2 + 3x) \times \left(e^{-x}\right)' \\ &= (4x + 3)e^{-x} + (2x^2 + 3x) \times (-e^{-x}) \\ &= (4x + 3 - (2x^2 + 3x))e^{-x} && \text{factorisation de } e^{-x} \\ &= (-2x^2 + x + 3)e^{-x} \end{aligned}$$

b) Comme la fonction exponentielle est positive, le signe de $f'(x)$ dépend uniquement du polynôme du second degré $-2x^2+x+3$. Son discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-2) \times 3 = 25$ et $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{25}}{2\times(-2)} = -1$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3}{2}$. Rappelons que le polynôme est du signe de son coefficient dominant $a = -2$ en dehors de l'intervalle $[x_1;\ x_2]$. D'où, la tableau de variations de f sur l'intervalle $[0;\ 6]$:

x	0		$\frac{3}{2}$		6
$-2x^2+x+3$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	2.01	$\searrow$	0.22

c) D'après le tableau de variation de la fonction f, elle atteint un maximum lorsque x vaut 1.5. Ainsi par définition de la fonction f, au bout de 150 jours après l'ouverture du site, la production journalière sera maximale et elle sera d'environ 2.01 milliers de tonnes.

3. a) D'après le tableau de variation de la fonction f, la fonction f est continue strictement croissante sur l'intervalle $[0; 1.5]$, ainsi elle prend chacune des valeurs de 0 à 2.01 une et une seule fois. D'où $f(x) = 1$ admet une première solution x_1 sur cet intervalle. De même sur l'intervalle $[1.5; 6]$, on déduit qu'il y a une seconde solution x_2. À l'aide d'une table faite avec la calculatrice, on note que $x_1 \simeq 0.39$ et $x_2 \simeq 3.6$ au centième près.

b) On considère l'algorithme suivant : **Algorithme de dichotomie**

Variables :	a, b, m et r sont des nombres réels
Initialisation :	Affecter à a la valeur 3
	Affecter à b la valeur 4
Entrée :	Saisir r
Traitement :	TANT QUE $b - a > r$
	Affecter à m la valeur $\dfrac{a+b}{2}$
	SI $f(m) > 1$
	ALORS Affecter à a la valeur m
	SINON Affecter à b la valeur m
	FIN SI
	FIN TANT QUE
Sortie :	Afficher a.
	Afficher b

i. Voici la mise en oeuvre l'algorithme précédent avec $r = 0,01$:

	$b-a$	$b-a>r$	m	$f(m)$	$f(m)>1$	a	b
Initialisation						3	4
étape 1	$4-3=1$	oui	3.5	1.057	oui	3.5	4
étape 2	$4-3.5=0.5$	oui	3.75	0.926	non	3.5	3.75
étape 3	$3.75-3.5=0.25$	oui	3.625	0.99	non	3.5	3.625
étape 4	0.125	oui	3.5625	1.023	oui	3.5625	3.625
étape 5	0.0625	oui	3.595	1.007	oui	3.595	3.625
étape 6	$0.O3125$	oui	3.610	0.998	non	3.595	3.610
étape 7	0.015625	oui	3.603	1.002	oui	3.603	3.610
étape 8	0.007	non					

ii. On déduit de l'application de l'algorithme un encadrement la solution α de $f(x) = 1$ dans l'intervalle $[3; 4]$: $3.603 \leq \alpha \leq 3.610$.

c) D'après la question précédente, après avoir atteint son maximum, la fonction reprend la valeur 1 lorsque $x \simeq 3.6$. D'où, au bout de 360 jours, après l'ouverture du site, la production journalière, après avoir atteint son maximum, sera revenue à 1000 tonnes.

4. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a trouvé que

$$f''(x) = (2x^2 - 5x - 2)e^{-x}$$

a) Encore une fois le signe de la dérivée seconde $f''(x)$ dépend uniquement de cet autre polynôme du second degré $2x^2 - 5x - 2$. Son discriminant $\Delta = 41$, $x_1 \simeq -0.35$ et $x_2 = \frac{5+\sqrt{41}}{4} \simeq 2.85$. On en déduit le tableau suivant :

x	0		$\frac{5+\sqrt{41}}{4}$		6
$2x^2-5x-2$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		concave		convexe	

C'est-à-dire la fonction f est concave sur l'intervalle $[0; \frac{5+\sqrt{41}}{4}]$ et convexe sur l'intervalle $[\frac{5+\sqrt{41}}{4}; 6]$.

b) La fonction f change de convexité en $\frac{5+\sqrt{41}}{4}$, ainsi la courbe représentative de la fonction admet un point d'inflexion au point d'abscisse $\frac{5+\sqrt{41}}{4}$.

5. Soit T la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 2.
D'après le cours, la tangente admet comme équation $y = f'(2)(x-2) + f(2)$. Or $f(2) = 14e^{-2}$ et $f'(2) = -3e^{-2}$, d'où l'équation de T :

$$\begin{aligned} y &= -3e^{-2}(x-2) + 14e^{-2} \\ y &= -3e^{-2}x + 6e^{-2} + 14e^{-2} \\ y &= -3e^{-2}x + 20e^{-2} \end{aligned}$$

Exercice 2. On considère la fonction $f :]0; +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = -x^2 - 2x + 12\ln(x)$.

1. Soit $x > 0$, alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x - 2 + \frac{12}{x} \\ &= \frac{-2x^2 - 2x + 12}{x} \end{aligned}$$

Notons que $-2(x-2)(x+3) = -2x^2 - 2x + 12$, d'où $f'(x) = \frac{-2(x-2)(x+3)}{x}$ pour tout réel x strictement positif.

2. Voici le tableau de variation de la fonction f.

x	0		2		$+\infty$
-2		$-$		$-$	
$x-2$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$+$		$+$	
x		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	$\nearrow$	$-8+12\ln(2)$	$\searrow$	

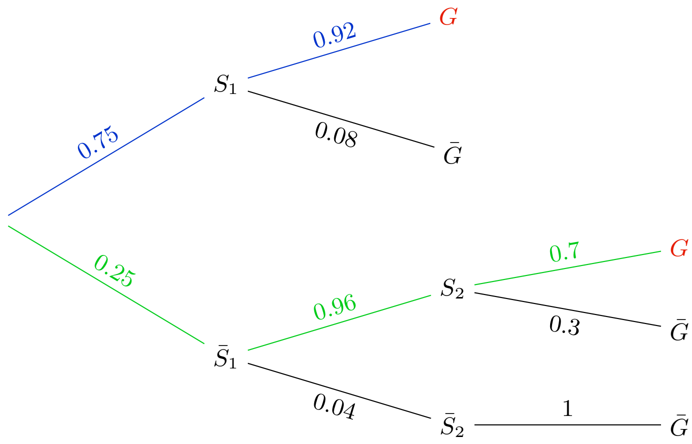
Exercice 3. Au tennis, le joueur qui est “au service" dispose de deux essais pour son service. S'il rate ces deux essais, il perd le point (on parle de double faute).
On note les événements suivants :

- S_1 : “le premier service est réussi" ;
- S_2 : “le deuxième service est réussi" ;
- G : “le point est gagné par le joueur qui est au service".

Une étude sur les précédents matchs du joueur Naderer a permis d'établir que, lorsqu'il sert :

- il réussit dans 75% des cas son premier service et lorsque ce premier service est réussi, il gagne le point dans 92% des cas ;
- s'il ne réussit pas son premier service, il réussit le second dans 96% des cas et lorsque ce second service est réussi, il gagne le point dans 70% des cas.

1. Compléter l'arbre suivant :



2. De l'arbre de probabilités, on déduit que $P(S_1 \cap G) = 0.75 \times 0.92 = 0.69$.
3. La probabilité que le joueur Naderer réussisse son second service et gagne l'échange est $P(\bar{S}_1 \cap S_2 \cap G) = 0.25 \times 0.96 \times 0.7 = 0.168$.
4. La probabilité que le joueur Naderer gagne l'échange est $P(G) = 0.75 \times 0.92 + 0.25 \times 0.96 \times 0.7 = 0.69 + 0.168 = 0.858$.
5. Sachant que le joueur Naderer a gagné l'échange, la probabilité que sa première balle de service ait été jugée “bonne" est
$$P_G(S_1) = \frac{P(G \cap S_1)}{P(G)} = \frac{0.69}{0.858} \simeq 0.804$$
arrondi au millième.
6. On admet que chaque point joué est indépendant des points joués précédemment.
La probabilité que le joueur Naderer gagne quatre échanges consécutifs est $P(G\,G\,G\,G) = 0.858^4 \simeq 0.542$ arrondi au millième.

Devoir sur table 5 : Fonction logarithme

jeudi 25 février 2016

Exercice 1. Donner les expressions suivantes sous la forme d'un lorgarithme népérien :

1. $\ln(2) + \ln(8) - \ln(5)$;
2. $\ln(\frac{5}{2}) + \ln(\frac{2}{7}) + \ln(\frac{7}{5})$.

Exercice 2. Résoudre les équations suivantes :

1. $(3x+5)\,(\ln(x)-6) = 0$;
2. $(\frac{\ln(x)}{5}+1)\,(4x+\frac{5}{7}) = 0$;

Exercice 3. Pour chacune des fonctions f suivantes définies sur l'intervalle $]0;+\infty[$, déterminer sa dérivée $f'(x)$.

1. $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 5x + 3 + \ln(x)$;
2. $f(x) = \frac{1}{2}\ln(x) - e^x$;
3. $f(x) = (x+1)\ln(x)$.

Exercice 4. On considère la fonction $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = (1-\ln(x))\,(\ln(x)-2)$$

1. À l'aide de la formule de dérivation du produit, montrer que pour tout $x > 0$, on a
$$f'(x) = \frac{3-2\ln(x)}{x}$$
2. En déduire le tableau de variation de la fonction f.

Devoir sur table 5 : Fonction logarithme

corrigé

Exercice 1. Donnons les expressions suivantes sous la forme d'un lorgarithme népérien :

1. $\ln(2)+\ln(8)-\ln(5)=\ln(2\times 8)-\ln(5)=\ln(\frac{16}{5})$;
2. $\ln(\frac{5}{2})+\ln(\frac{2}{7})+\ln(\frac{7}{5})=\ln(\frac{5}{2}\times\frac{2}{7}\times\frac{7}{5})=\ln(1)=0$.

Exercice 2.

1.

$$\begin{aligned}(3x+5)\,(\ln(x)-6)&=0\\ 3x+5=0 \quad &\text{ou}\quad \ln(x)-6=0\\ 3x=-5 \quad &\text{ou}\quad \ln(x)=6\\ x=-\frac{5}{3} \quad &\text{ou}\quad x=e^6\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}(\frac{\ln(x)}{5}+1)\,(4x+\frac{5}{7})&=0\\ \frac{\ln(x)}{5}+1=0 \quad &\text{ou}\quad 4x+\frac{5}{7}=0\\ \ln(x)=-1\times 5 \quad &\text{ou}\quad 4x=-\frac{5}{7}\\ x=e^{-5} \quad &\text{ou}\quad x=\frac{1}{4}\times\frac{-5}{7}=\frac{-5}{28}\end{aligned}$$

Exercice 3. Pour chacune des fonctions f suivantes définies sur l'intervalle $]0;+\infty[$, déterminer sa dérivée $f'(x)$.

1. $f(x)=4x^3+2x^2-5x+3+\ln(x)$: $f'(x)=4\times 3x^2+2\times 2x-5+\frac{1}{x}=12x^2+4x-5+\frac{1}{x}$;
2. $f(x)=\frac{1}{2}\ln(x)-e^x$: $f'(x)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{x}-e^x=\frac{1}{2x}-e^x$;
3. $f(x)=(x+1)\ln(x)$: $f'(x)=1\times\ln(x)+(x+1)\times\frac{1}{x}=\ln(x)+\frac{x+1}{x}$.

Exercice 4. On considère la fonction $f:]0;+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=(1-\ln(x))\,(\ln(x)-2)$$

1. À l'aide de la formule de dérivation du produit, on a pour tout $x>0$,

$$\begin{aligned}f'(x)&=(-\frac{1}{x})\times(\ln(x)-2)+(1-\ln(x))\times\frac{1}{x}\\ &=\frac{-(\ln(x)-2)+(1-\ln(x))}{x}\\ &=\frac{-\ln(x)+2+1-\ln(x)}{x}\\ &=\frac{3-2\ln(x)}{x}\end{aligned}$$

2. Avant d'étudier le signe de $f'(x)$, résolvons l'inéquation

$$\begin{aligned}3-2\ln(x)&\geq 0\\ -2\ln(x)&\geq -3\\ \ln(x)&\leq\frac{-3}{-2} \qquad \text{on divise par un nombre négatif, l'inégalité change de sens}\\ x&\leq e^{1.5}\end{aligned}$$

Notons que le dénominateur de $f'(x)$ est positif lorsque x est positif. Ainsi, le signe de $f'(x)$ dépend uniquement du numérateur et on en déduit le tableau de variation de f :

x	0		$e^{1.5}$		$+\infty$
$3-2\ln(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	↗	0.25	↘	

3. * Le signe de $f(x)$ est donné pour tout réel de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par le tableau suivant :

x	0		e		e^2		$+\infty$
signe de $f(x)$	$\|\|$	$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	

4. * D'après le tableau de variation de la question 2., on déduit que pour tout nombre réel x dans l'intervalle $]0; +\infty[$, $f(x) \leq 0.25 < 1$. Ainsi, l'équation $f(x) = 1$ n'admet pas de solution.

Devoir sur table 6 : Lois à densité

jeudi 10 mars 2016

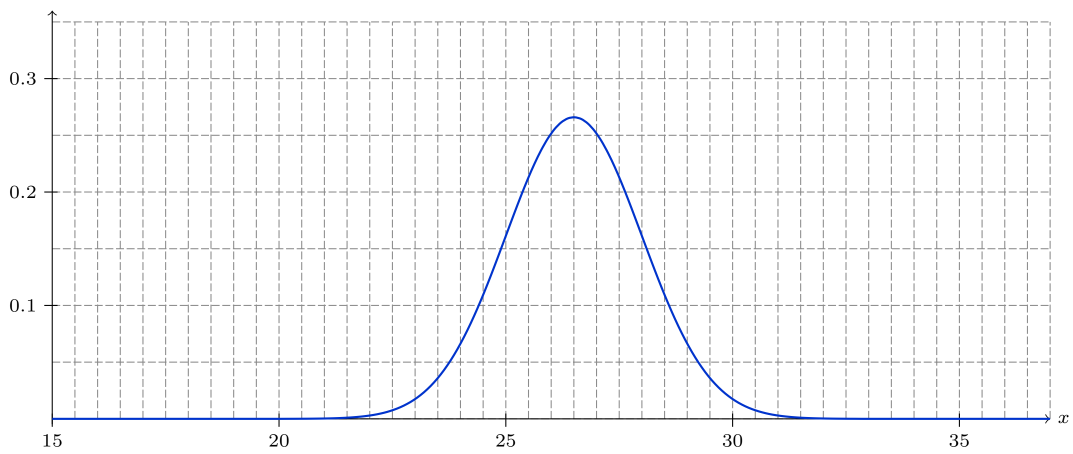
On prendra soin de justifier toutes les réponses.

Exercice 1. Lorsqu'elle est chez sa grand-mère, Fatou arrive pour prendre son petit déjeuner entre 7h et 8h30, de façon aléatoire. Son cousin Moussa le prend toujours à 8h et y consacre 15 minutes.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par l'heure d'arrivée de Fatou ?
2. Calculer la probabilité que Fatou arrive avant Moussa ?
3. Quelle est la probabilité qu'ils se croisent ?
4. Sachant que Fatou est arrivée après 8h, quelle est la probabilité qu'elle passe un moment à table avec Moussa ?
5. En moyenne, lorsqu'elle est chez sa grand-mère, à quelle heure arrive Fatou pour prendre son petit déjeuner ?

Exercice 2. Le responsable d'un projet doit fixer une échéance pour sa réalisation. À partir de projets similaires, le responsable estime que la durée de réalisation du projet, notée X, suit une loi normale d'espérance 26.5 jours et d'écart type 1.5 jours.

1. À l'aide de la calculatrice, déterminer la probabilité que la durée de réalisation du projet soit comprise entre 25 et 27 jours.
2. Colorier en rouge la surface correspondant à $\mathbb{P}(25 \leq X \leq 28)$:



3. Sans utiliser la calculatrice, déterminer :
   a) $\mathbb{P}(25 \leq X \leq 28)$;
   b) $\mathbb{P}(X \leq 26.5)$;
   c) $\mathbb{P}(X = 26.5)$;
   d) $\mathbb{P}(26.5 \leq X \leq 28)$;
   e) $\mathbb{P}(X \leq 28)$.
4. Le responsable souhaite donner comme durée du projet une valeur telle qu'il soit sûr à au moins 95 de ne pas la dépasser. Quelle doit être cette durée ?
5. Vingt-trois jours plus tard, le projet n'est pas encore achevé.
   a) Quelle est la probabilité que le projet soit achevé avant 29.5 jours ?
   b) Quelle est la probabilité que le responsable ne respecte pas le délai fixé ?

Devoir sur table 6 : Lois à densité

corrigé

On prendra soin de justifier toutes les réponses.

Exercice 1. Lorsqu'elle est chez sa grand-mère, Fatou arrive pour prendre son petit déjeuner entre 7h et 8h30, de façon aléatoire. Son cousin Moussa le prend toujours à 8h et y consacre 15 minutes.

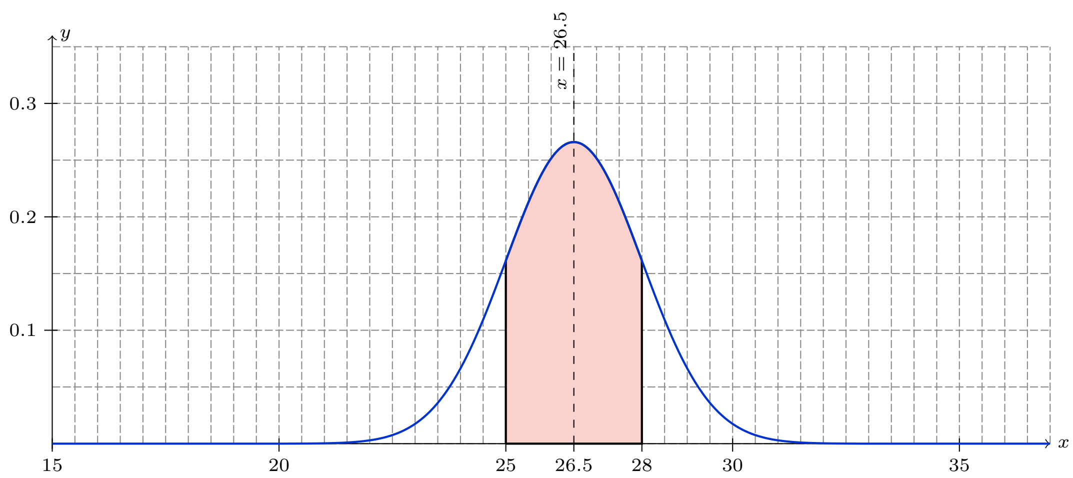
1. La loi de probabilité suivie par l'heure d'arrivée de Fatou est une loi uniforme sur l'intervalle $[7; 8.5]$.

Notons X l'heure d'arrivée de Fatou et Y le nombre de minutes écoulées entre 7h et l'heure d'arrivée de Fatou. La variable aléatoire Y suit aussi un loi uniforme sur mais sur l'intervalle $[0; 90]$ ($1\,\text{h}\,30 = 90\,\text{minutes}$).

2. La probabilité que Fatou arrive avant Moussa est
$$\mathbb{P}(X < 8) = \frac{8-7}{8.5-7} = \frac{2}{3}$$
(ou bien $\mathbb{P}(Y \leq 60) = \frac{60-0}{90} = \frac{2}{3}$).
3. La probabilité qu'ils se croisent est $P(8 \leq X \leq 8.25) = \frac{0.25}{1.5} = \frac{1}{6}$ (ou bien $\mathbb{P}(60 \leq Y \leq 75) = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$).
4. Sachant que Fatou est arrivée après 8h, la probabilité qu'elle passe un moment à table avec Moussa est
$$\mathbb{P}_{(X\geq 8)}(X \leq 8.25) = \frac{\mathbb{P}(8 \leq X \leq 8.25)}{\mathbb{P}(X \geq 8)} = \frac{0.25}{0.5} = \frac{1}{2}$$
(ou bien $\mathbb{P}_{(Y\geq 60)}(60 \leq Y \leq 75) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$).
5. En moyenne, lorsqu'elle est chez sa grand-mère, Fatou arriver vers $\mathbb{E}(X) = \frac{7+8.5}{2} = 7.75\,\text{h} = 7\,\text{h}\,45\,\text{min}$ pour prendre son petit déjeuner ?

Exercice 2. Le responsable d'un projet doit fixer une échéance pour sa réalisation. À partir de projets similaires, le responsable estime que la durée de réalisation du projet, notée X, suit une loi normale d'espérance 26.5 jours et d'écart type 1.5 jours.

1. À l'aide de la calculatrice, la probabilité que la durée de réalisation du projet soit comprise entre 25 et 27 jours est `Ncd(25,27,1.5,26.5)` $\simeq 0.4719$.
2. Colorions en rouge la surface correspondant à $\mathbb{P}(25 \leq X \leq 28)$:



3. Sans utiliser la calculatrice :
   a) $\mathbb{P}(25 \leq X \leq 28) = \mathbb{P}(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \simeq 68\%$, d'après la propriété 9.14 du cours ;
   b) $\mathbb{P}(X \leq 26.5) = \mathbb{P}(X \leq \mu) = 0.5$ par symétrie de la densité de la loi normale par rapport à la droite verticale d'équation $x = \mu$;

c) $\mathbb{P}(X = 26.5) = 0$ car X est un variable aléatoire à densité continue et l'aire d'un « rectangle » de largeur nulle est nulle ;

d) $\mathbb{P}(26.5 \leq X \leq 28) = \frac{1}{2}\,\mathbb{P}(25 \leq X \leq 28) = 34\%$, encore une fois par symétrie de la densité de la loi normale ;

e) $\mathbb{P}(X \leq 28) = \mathbb{P}(X \leq 26.5) + \mathbb{P}(26.5 < X \leq 28) = 0.5 + 0.34 = 84\%$.

4. D'après le cours,
$$\mathbb{P}(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = \mathbb{P}(23.5 \leq X \leq 29.5) \simeq 95\%.$$
Ainsi, le responsable peut donner comme durée du projet 29.5 jours et il sera sûr à au moins 95 de ne pas la dépasser.
Autre solution : À l'aide de la calculatrice, on fait une table des probabilités $\mathbb{P}(X \leq x)$ (avec la casio : `Ncd(-10`^{99}`,X,1.5,26.5)`) et on note que le plus petit nombre x tel que $\mathbb{P}(X \leq x) \geq 95\%$ est $x \simeq 28.97$. D'où, on délai de 29 jours pour garantir les 95%.

5. Vingt-trois jours plus tard, le projet n'est pas encore achevé.

a) La probabilité que le projet soit achevé avant 29.5 jours est
$$\mathbb{P}_{(X\geq 23)}(X \leq 29.5) = \frac{\mathbb{P}(23.5 \leq X \leq 29.5)}{\mathbb{P}(X \geq 23)} = \frac{\mathrm{Ncd}(23.5, 29.5, 1.5, 26.5)}{\mathrm{Ncd}(23, 10^{99}, 1.5, 26.5)} \simeq 0.977 = 97.7\%$$

b) La probabilité que le responsable ne respecte pas le délai fixé est
$$\mathbb{P}_{(X\geq 23)}(X > 29.5) = 1 - \mathbb{P}_{(X\leq 23)}(X \geq 29.5) \simeq 1 - 0.977 = 2.3\%$$

Devoir sur table 6 : Lois à densité (bis)

mars 2016

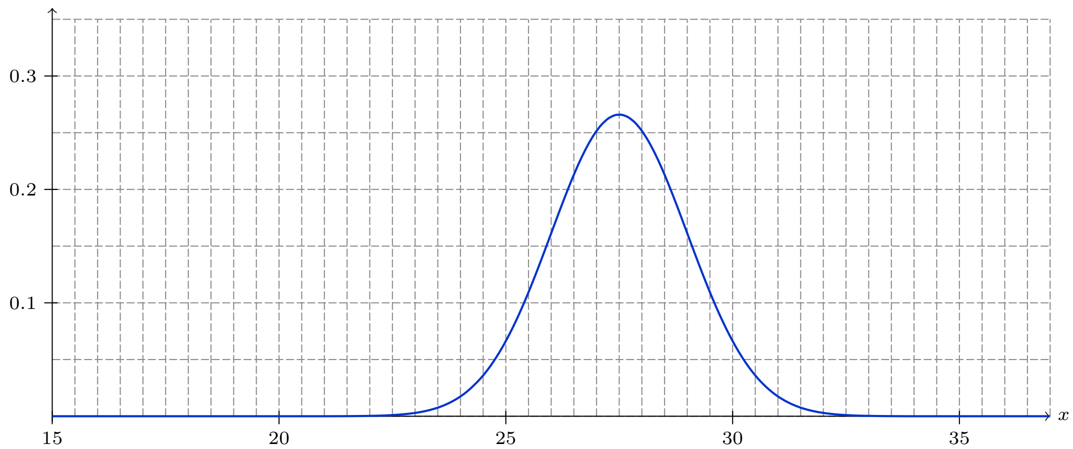
On prendra soin de justifier toutes les réponses.

Exercice 1. Chaque soir, deux copains, Axel et Matthieu, se connectent en réseau pour jouer. Matthieu, ponctuel, se connecte chaque soir à 19h précises tandis qu'Axel se connecte de manière aléatoire entre 19h et 19h30.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par le temps d'attente de Matthieu sur Axel ?
2. Quelle est la probabilité qu'un soir, Matthieu attende plus de 10 minutes ?
3. Quelle est la probabilité que Matthieu attende entre 10 et 20 minutes ?
4. Un soir, Matthieu attend depuis 20 minutes. Agacé, il décide de se déconnecter dans les deux minutes qui suivent, si Axel n'est toujours pas connecté. Quelle est la probabilité qu'Axel et Matthieu jouent ensemble en réseau ce soir-là ?
5. Quelle est la temps moyen d'attente de Matthieu sur Axel ?

Exercice 2. Le responsable d'un projet doit fixer une échéance pour sa réalisation. À partir de projets similaires, le responsable estime que la durée de réalisation du projet, notée X, suit une loi normale d'espérance 27.5 jours et d'écart type 1.5 jours.

1. À l'aide de la calculatrice, déterminer la probabilité que la durée de réalisation du projet soit comprise entre 25 et 29 jours.
2. Colorier en rouge la surface correspondant à $\mathbb{P}(25 \leq X \leq 29)$:



3. Sans utiliser la calculatrice, déterminer :
   a) $\mathbb{P}(26 \leq X \leq 29)$;
   b) $\mathbb{P}(X \leq 27.5)$;
   c) $\mathbb{P}(X = 27.5)$;
   d) $\mathbb{P}(27.5 \leq X \leq 29)$;
   e) $\mathbb{P}(X \leq 29)$.
4. Le responsable souhaite donner comme durée du projet une valeur telle qu'il soit sûr à au moins 95 de ne pas la dépasser. Quelle doit être cette durée ?
5. Vingt-trois jours plus tard, le projet n'est pas encore achevé.
   a) Quelle est la probabilité que le projet soit achevé avant 30.5 jours ?
   b) Quelle est la probabilité que le responsable ne respecte pas le délai fixé ?

Devoir maison 4 : Loi normale

pour le lundi 21 mars 2016

Exercice 1. Un serveur, travaillant dans une pizzeria, remarque qu'en moyenne, 40 % des clients sont des familles, 25 % des clients sont des personnes seules et 35 % des clients sont des couples.

Il note aussi que :

- 70 % des familles laissent un pourboire ;
- 90 % des personnes seules laissent un pourboire ;
- 40 % des couples laissent un pourboire.

Un soir donné, ce serveur prend au hasard une table occupée dans la pizzeria.

On s'intéresse aux évènements suivants :

F : « la table est occupée par une famille »

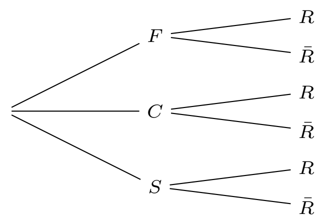
S : « la table est occupée par une personne seule »

C : « la table est occupée par un couple »

R : « le serveur reçoit un pourboire »

Partie A

1. D'après les données de l'énoncé, préciser les probabilités $\mathbb{P}(F)$ et $\mathbb{P}_S(R)$.
2. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



3. a) Calculer $\mathbb{P}(F \cap R)$.
   b) Déterminer $\mathbb{P}(R)$.
4. Sachant que le serveur a reçu un pourboire, calculer la probabilité que ce pourboire vienne d'un couple. Le résultat sera arrondi à 10^{-3} .

Partie B

On note X la variable aléatoire qui, à un soir donné, associe le montant total en euro des pourboires obtenus par le serveur.

On admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 15$ et d'écart-type $\sigma = 4,5$.

Dans les questions suivantes, les calculs seront effectués à la calculatrice et les résultats arrondis à 10^{-2}.

1. Calculer, éventuellement à l'aide de la calculatrice :
   a) la probabilité que le montant total des pourboires reçus par le serveur soit compris entre 6 et 24 euros.
   b) $\mathbb{P}(X \geqslant 20)$.
2. Supposons qu'au milieu de son service le serveur ait déjà obtenu 10 euros de pourboires, quelle est la probabilité qu'il termine son service avec plus de 20 euros de pourboires ?
3. Sans utiliser la calculatrice et en justifiant vos réponses, calculer :
   a) $\mathbb{P}(6 \leq X \leq 24)$;
   b) $\mathbb{P}(X \geq 15)$;
   c) $\mathbb{P}(X = 16)$;
   d) $\mathbb{P}(6 \leq X \leq 15)$;

e) $\mathbb{P}(X \leq 6)$.

Exercice 2. Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 20 \\ u_{n+1} &= 1.2\,u_n - 1 \qquad \text{pour tout entier } n \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2.
2. Compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche u_5 :

   Variables : n, U sont des nombres
   U prend la valeur _ _ _ _ _ _
   Pour n allant de 1 à _ _ _ **faire**
       U prend la valeur _ _ _ _ _ _
   Fin Pour
   Afficher U

   Calculer u_5.
3. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 5$ pour tout entier n.
   a) Calculer v_0.
   b) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 1.2.
   c) Exprimer v_n en fonction de n.
   d) En déduire u_n en fonction de n.
   e) Calculer $v_0 + v_1 + \ldots + v_{10}$.
4. * Calculer $u_0 + u_1 + \ldots + u_{10}$.
5. * Déterminer le plus petit entier n tel que la somme $u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ soit supérieure à 2 000.

Devoir maison 4 : Loi normale

corrigé

Exercice 1. Un serveur, travaillant dans une pizzeria, remarque qu'en moyenne, 40 % des clients sont des familles, 25 % des clients sont des personnes seules et 35 % des clients sont des couples.

Il note aussi que :

- 70 % des familles laissent un pourboire ;
- 90 % des personnes seules laissent un pourboire ;
- 40 % des couples laissent un pourboire.

Un soir donné, ce serveur prend au hasard une table occupée dans la pizzeria.

On s'intéresse aux évènements suivants :

F : « la table est occupée par une famille »

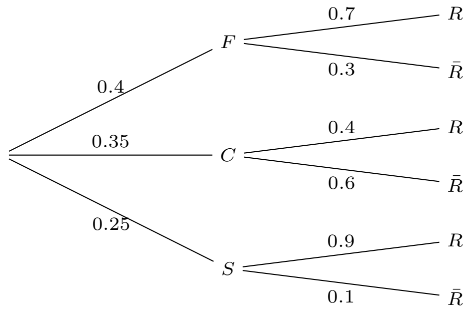
S : « la table est occupée par une personne seule »

C : « la table est occupée par un couple »

R : « le serveur reçoit un pourboire »

Partie A

1. D'après les données de l'énoncé, $\mathbb{P}(F) = 0.4$ et $\mathbb{P}_S(R) = 0.9$.
2. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



3. a) $\mathbb{P}(F \cap R) = \mathbb{P}(F) \times \mathbb{P}_F(R) = 0.4 \times 0.7 = 0.28$.

   b) $\mathbb{P}(R) = 0.4 \times 0.7 + 0.35 \times 0.4 + 0.25 \times 0.9 = 0.645$.
4. Sachant que le serveur a reçu un pourboire, la probabilité que ce pourboire vienne d'un couple est
$$\mathbb{P}_R(C) = \frac{\mathbb{P}(R \cap C)}{\mathbb{P}(R)} = \frac{0.35 \times 0.4}{0.645} \simeq 0.217$$
à 10^{-3} près.

Partie B

On note X la variable aléatoire qui, à un soir donné, associe le montant total en euro des pourboires obtenus par le serveur.

On admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 15$ et d'écart-type $\sigma = 4,5$.

Dans les questions suivantes, les calculs seront effectués à la calculatrice et les résultats arrondis à 10^{-2}.

1. Calculer, éventuellement à l'aide de la calculatrice :

   a) la probabilité que le montant total des pourboires reçus par le serveur soit compris entre 6 et 24 euros est `Ncd(6,24,4.5,15)`$\simeq 0.95$.

   b) $\mathbb{P}(X \geq 20) \simeq$ `Ncd(20,`10^{99}`,4.5,15)`$\simeq 0.13$.

2. Supposons qu'au milieu de son service le serveur ait déjà obtenu 10 euros de pourboires, la probabilité qu'il termine son service avec plus de 20 euros de pourboires est

$$\mathbb{P}_{(X\geq 10)}(X \geq 20) = \frac{\mathbb{P}(X \geq 20)}{\mathbb{P}(X \geq 10)} \simeq 0.15$$

3. Sans utiliser la calculatrice et en justifiant vos réponses, calculer :
   a) $\mathbb{P}(6 \leq X \leq 24) = \mathbb{P}(15 - 2 \times 4.5 \leq X \leq 15 + 2 \times 4.5) \simeq 95\%$;
   b) $\mathbb{P}(X \geq 15) = 0.5$ car la densité est symétrique par la droite d'équation $x = 15$;
   c) $\mathbb{P}(X = 16) = 0$, car X est une variable aléatoire a densité continue ;
   d) $\mathbb{P}(6 \leq X \leq 15) = \frac{95\%}{2} = 47.5\%$, par symétrie de la densité.
   e) $\mathbb{P}(X \leq 6) = \frac{1-\mathbb{P}(6\leq X\leq 24)}{2} = 2.5\%$, par symétrie de la densité.

Exercice 2. Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 & = 20 \\ u_{n+1} & = 1.2\, u_n - 1 \qquad \text{pour tout entier } n \end{cases}$$

1. D'après la relation de récurrence, on a $u_1 = 1.2u_0 - 1 = 1.2 \times 20 - 1 = 23$ et $u_2 = 1.2 \times 23 - 1 = 26.6$.
2. L'algorithme suivant permet d'afficher u_5 :

   Variables : n, U sont des nombres
   U prend la valeur **20**
   Pour n allant de 1 à **5 faire**
   $\quad$ U prend la valeur $\mathbf{1.2 \times U - 1}$
   Fin Pour
   Afficher U

   À l'aide de la calculatrice, on obtient $u_5 = 42.3248$.
3. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 5$ pour tout entier n.
   a) Alors, en particulier, pour $n = 0$, on a $v_0 = u_0 - 5 = 20 - 5 = 15$.
   b) Soit n un entier naturel, alors

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 5 \\ &= 1.2u_n - 1 - 5 \\ &= 1.2(u_n - \frac{6}{1.2}) \\ &= 1.2(u_n - 5) \\ &= 1.2v_n \end{aligned}$$

   Ainsi, la suite (v_n) est géométrique de raison 1.2.
   c) On en déduit que $v_n = v_0 \times q^n = 15 \times 1.2^n$ en fonction de n.
   d) En revenant à la définition de la suite (v_n) et à l'aide de la question précédente, on déduit que pour tout entier n, on a $u_n = v_n + 5 = 15 \times 1.2^n + 5$ en fonction de n.
   e) D'après le cours,

$$v_0 + v_1 + \ldots + v_{10} = v_0 \times \frac{1.2^{11} - 1}{1.2 - 1} = 75 \times (1.2^{11} - 1) \simeq 482.26$$

4. D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \ldots + u_{10} &= v_0 + 5 + v_1 + 5 + \ldots + v_{10} + 5 \\ &= v_0 + \ldots v_{10} + 11 \times 5 \\ &= 75(1.2^{11} - 1) + 55 \\ &\simeq 537.26 \end{aligned}$$

5. En reprenant le raisonnement de la question précédente, on déduit que :

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = 75 \times (1.2^{n+1} - 1) + 5(n+1)$$

À l'aide de la calculatrice, en faisant une table, on observe que la somme $u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ est supérieure à 2 000 lorsque $n \geq 17$.
Autre solution : On aurait aussi pu implémenter l'algorithme suivant dans la calculatrice :

Variables : n, U, S sont des nombres
N prend la valeur 0
U prend la valeur 20
Somme prend la valeur 20
Tant que *Somme* < 2000 **faire**
    N prend la valeur $N + 1$
    U prend la valeur $1.2 \times U - 1$
    Somme prend la valeur $Somme + U$
Fin Tant que
Afficher N

Devoir sur table 7 : Primitive, Échantillonnage, fonction exponentielle

lundi 9 mai 2016

Exercice 1.

1. Déterminer la primitive F de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 5$ et telle que $F(0) = 1$;
2. Déterminer une primitive F de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3.2x^2 + 1.4x + 0.5$;
3. Déterminer la primitive F de f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ et telle que $F(1) = 2$;
4. Déterminer une primitive F de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x+1}$.

Exercice 2. *Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.*
Chaque question ci-après comporte quatre propositions de réponse.
Pour chacune de ces questions, une seule des réponses proposées est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. On ne demande pas de justification.
Chaque réponse exacte rapportera 1 *point, une réponse fausse ou l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève de point.*

Un fumeur est dit fumeur régulier s'il fume au moins une cigarette par jour.
En 2010, en France, la proportion notée p de fumeurs réguliers, âgés de 15 à 19 ans, était de $0,236$

(*Source : Inpes*)

On a $p = 0,236$.

1. La probabilité que, sur un groupe de 10 jeunes âgés de 15 à 19 ans choisis au hasard et de manière indépendante, aucun ne soit fumeur régulier est, à 10^{-3} près :

   a. 0,136 **b.** 0 **c.** 0,068 **d.** 0,764

2. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 0,95 de la fréquence de fumeurs réguliers dans un échantillon de 500 jeunes âgés de 15 à 19 ans est :
   (Les bornes de chaque intervalle sont données à 10^{-3} près)

   a. [0,198 : 0,274] **b.** [0,134 ; 0,238] **c.** [0,191 ; 0,281] **d.** [0,192 ; 0,280]

3. Supposons qu'on soit en présence d'un échantillon de 500 jeunes âgés de 15 à 29 ans. On rejette l'hypothèse $p = 0.236$ avec un risque d'erreur de 5% si le nombre de fumeurs réguliers au sein de l'échantillon est de

   a. 100 **b.** 118 **c.** 136 **d.** 160

4. La taille n de l'échantillon choisi afin que l'amplitude de l'intervalle de fluctuation au seuil de 0,95 soit inférieure à 0,01, vaut :

   a. $n = 200$ **b.** $n = 400$ **c.** $n = 21\,167$ **d.** $n = 27\,707$

5.* Dans un échantillon de 250 jeunes fumeurs réguliers, âgés de 15 à 19 ans, 99 sont des filles.
   Au seuil de 95 %, un intervalle de confiance de la proportion de filles parmi les fumeurs réguliers âgés de 15 à 19 ans est :
   (*Les bornes de chaque intervalle sont données à* 10^{-2} près)

   a. [0,35 ; 0,45] **b.** [0,33 ; 0,46] **c.** [0,39 ; 0,40] **d.** [0,30 ; 0,50]

Exercice 3. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par

$$f(x) = (3x-4)\mathrm{e}^{-x} + 2.$$

1. On désigne par f' la dérivée de la fonction f.
   Montrer que l'on a, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,4]$,
   $f'(x) = (7-3x)\mathrm{e}^{-x}$.
2. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle. Toutes les valeurs du tableau seront données sous forme exacte.
3. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0\,;\,4]$.
   b) Donner à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de α à 0,01 près.
4. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par

$$F(x) = (1-3x)\mathrm{e}^{-x} + 2x.$$

   a) Montrer que F est une primitive de f sur $[0\,;\,4]$.
   b)* Calculer la valeur moyenne de f sur $[0\,;\,4]$
5. On admet que la dérivée seconde de la fonction f est la fonction f'' définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par $f''(x) = (3x-10)\mathrm{e}^{-x}$.
   a) Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.
   b) Montrer que la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f possède un point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.

Exercice 4.*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (2x+1)e^{3x}$$

Pour déterminer une primitve F définie sur $\mathbb{R}$ de f, on suppose qu'elle est de la forme $F(x) = (ax+b)e^{3x}$ où a et b sont deux nombres réels à déterminer.

1. Vérifier que $F'(x) = (3ax + a + 3b)e^{3x}$.
2. En déduire une primitive de f.

Devoir sur table 7 : Primitive, Échantillonnage, fonction exponentielle

corrigé

Exercice 1.

1. La primitive F de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 5$ et telle que $F(0) = 1$ est de la forme

$$F(x) = x^2 - 5x + \lambda$$

Comme $1 = F(0) = \lambda$, on déduit que $F(x) = x^2 - 5x + 1$ pour tout réel x.

2. Une primitive F de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3.2x^2 + 1.4x + 0.5$ est

$$F(x) = \frac{3.2}{3}x^3 + \frac{1.4}{2}x^2 + 0.5x$$

3. La primitive F de f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ telle que $F(1) = 2$ est de la forme

$$F(x) = x - \ln(x) + \lambda$$

Comme $2 = F(1) = 1 - \ln(1) + \lambda$, on déduit que $\lambda = 2 - 1 = 1$ et donc $F(x) = x - \ln(x) + 1$.

4. Pour déterminer une primitive F de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x+1}$, notons que

$$\left(e^{2x+1}\right)' = 2e^{2x+1}$$
$$\left(\frac{1}{2} \times e^{2x+1}\right)' = \frac{1}{2} \times 2\,e^{2x+1} = f(x)$$

D'où, une primitive de f est $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x+1}$.

Exercice 2. *Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.*
Chaque question ci-après comporte quatre propositions de réponse.
Pour chacune de ces questions, une seule des réponses proposées est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. On ne demande pas de justification.
Chaque réponse exacte rapportera 1 *point, une réponse fausse ou l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève de point.*

Un fumeur est dit fumeur régulier s'il fume au moins une cigarette par jour.
En 2010, en France, la proportion notée p de fumeurs réguliers, âgés de 15 à 19 ans, était de $0,236$

(*Source : Inpes*)

On a $p = 0,236$.

1. Sur un groupe de 10 jeunes âgés de 15 à 19 ans choisis au hasard et de manière indépendante, notons X le nombre de fumeurs réguliers. Alors X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0.236$. On en déduit que la probabilité qu' aucun ne soit fumeur régulier est

$$\mathbb{P}(X = 0) = \text{Bpd}(0, 10, 0.236) \simeq 0.068$$

à 10^{-3} près (réponse **c**).

2. Notons que $n = 500 \geq 30$, que $n \times p = 500 \times 0.236 \geq 5$ et $n \times (1 - p) = 500 \times (1 - 0.236) \geq 5$, ainsi, d'après le cours, un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 0,95 de la fréquence de fumeurs réguliers dans un échantillon de 500 jeunes âgés de 15 à 19 ans est

$$I = [0.236 - 1.96\frac{\sqrt{0.236(1 - 0.236)}}{\sqrt{500}};\ 0.236 + 1.96\frac{\sqrt{0.236(1 - 0.236)}}{\sqrt{500}}] \simeq [0,198;\ 0,274]$$

(réponse **a**).

3. Supposons qu'on soit en présence d'un échantillon de 500 jeunes âgés de 15 à 29 ans. On rejette l'hypothèse $p = 0.236$ avec un risque d'erreur de 5% si le nombre de fumeurs réguliers au sein de l'échantillon est de 160 (réponse **d**).
4. La taille n de l'échantillon choisi afin que l'amplitude de l'intervalle de fluctuation au seuil de 0,95 soit inférieure à 0,01 est de $n = 27\,707$ au moins (réponse **d**).
*L'***amplitude** *de l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% pour un échantillon de n est égale à*

$$2 \times 1.96 \times \frac{\sqrt{0.236(1-0.236)}}{\sqrt{n}}$$

5.* Dans un échantillon de 250 jeunes fumeurs réguliers, âgés de 15 à 19 ans, 99 sont des filles.
Au seuil de 95 %, un intervalle de confiance de la proportion de filles parmi les fumeurs réguliers âgés de 15 à 19 ans est

$$[\frac{99}{250} - \frac{1}{\sqrt{250}}; \frac{99}{250} + \frac{1}{\sqrt{250}}] \simeq [0.33; 0.46]$$

(réponse **b**).

Exercice 3. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par

$$f(x) = (3x-4)\mathrm{e}^{-x} + 2.$$

1. Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,4]$, on a

$$f'(x) = 3 \times e^{-x} + (3x-4) \times (-e^{-x}) = (3-(3x-4))e^{-x} = (3-3x+4)e^{-x} = (7-3x)e^{-x}$$

2. Le tableau de variation de la fonction f :

x	0		$\frac{7}{3}$		4
$7-3x$		$+$	0	$-$	
$f'(x) = (7-3x)e^{-x}$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$3e^{-\frac{7}{3}}+2$	$\searrow$	$8e^{-4}+2$

3. a) D'après le tableau de variation de f, la fonction f est supérieur à $f(4) \simeq 2.15 > 0$ sur l'intervalle $[\frac{7}{3}; 4]$. Ainsi, sur cet intervalle l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution. Par contre sur l'intervalle $[0; \frac{7}{3}]$, la fonction f est continue et strictement croissante, ainsi elle prend une et une seule fois chacune des valeurs de -2 à $3e^{-\frac{7}{3}} + 2 > 0$. En particulier, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0\,;\,4]$.
   b) À l'aide de la calculatrice, $\alpha \simeq 0.36$ à 0,01 près.
4. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par

$$F(x) = (1-3x)\mathrm{e}^{-x} + 2x.$$

   a) Notons que

$$F'(x) = (-3) \times e^{-x} + (1-3x) \times (-e^{-x}) + 2 = (-3-1+3x)e^{-x} + 2 = (3x-4)e^{-x} + 2$$

   D'où F est une primitive de f sur $[0\,;\,4]$.
   b)* Par définition, la valeur moyenne de f sur $[0\,;\,4]$ est

$$m = \frac{1}{4-0}\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}(F(4)-F(0)) = \frac{1}{4}(-11e^{-4}+8-(1)) = \frac{1}{4}(7-11e^{-4}) \simeq 1.7$$

5. On admet que la dérivée seconde de la fonction f est la fonction f'' définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par $f''(x) = (3x-10)\mathrm{e}^{-x}$.

a) On a

x	0	$\frac{10}{3}$	4
$3x-10$	$-$	0	$+$
$f''(x) = (3x-10)e^{-x}$	$-$	0	$+$
$f(x)$	concave		convexe

D'où, f est convexe sur l'intervalle $[\frac{10}{3};\ 4]$.

b) La dérivée seconde de f s'annule en $\frac{10}{3}$ et la fonction f change de convexité au voisinage de $\frac{10}{3}$, d'où la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f possède un point d'inflexion d'abscisse $\frac{10}{3}$.

Exercice 4.*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (2x+1)e^{3x}$$

Pour déterminer une primitve F définie sur $\mathbb{R}$ de f, on suppose qu'elle est de la forme $F(x) = (ax+b)e^{3x}$ où a et b sont deux nombres réels à déterminer.

1. On a $F'(x) = a \times e^{3x} + (ax+b) \times 3e^{3x} = (a + 3(ax+b))e^{3x} = (3ax + a + 3b)e^{3x}$.
2. En identifiant $3ax + a + 3b$ avec $2x + 1$, on cherche a et b tels que

$$\begin{cases} 3a & = 2 \\ a + 3b & = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a & = \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} + 3b & = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a & = \frac{2}{3} \\ 3b & = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a & = \frac{2}{3} \\ b & = \frac{1}{9} \end{cases}$$

Ainsi, une primitive de f est $F(x) = (\frac{2}{3}x + \frac{1}{9})e^{3x}$.

Devoir sur table 7 : Primitive, Échantillonnage, fonction exponentielle (bis)

vendredi 13 mai 2016

Exercice 1.

1. Déterminer la primitive F de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 2x$ et telle que $F(0) = 1$;
2. Déterminer une primitive F de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5.6x^2 + 4.2x + 12.3$;
3. Déterminer la primitive F de f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ et telle que $F(1) = 2$;
4. Déterminer une primitive F de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{5x-1}$.

Exercice 2.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Chaque question ci-après comporte quatre propositions de réponse.
Pour chacune de ces questions, une seule des réponses proposées est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. On ne demande pas de justification.
Chaque réponse exacte rapportera 1 *point, une réponse fausse ou l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève de point.*

Un fumeur est dit fumeur régulier s'il fume au moins une cigarette par jour.
En 2010, en France, la proportion notée p de fumeurs réguliers, âgés de 15 à 19 ans, était de $0,236$

(*Source : Inpes*)

On a $p = 0,236$.

1. La probabilité que, sur un groupe de 10 jeunes âgés de 15 à 19 ans choisis au hasard et de manière indépendante, aucun ne soit fumeur régulier est, à 10^{-3} près :

   a. 0,136 **b.** 0 **c.** 0,068 **d.** 0,764

2. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 0,95 de la fréquence de fumeurs réguliers dans un échantillon de 500 jeunes âgés de 15 à 19 ans est :
   (Les bornes de chaque intervalle sont données à 10^{-3} près)

   a. [0,198 : 0,274] **b.** [0,134 ; 0,238] **c.** [0,191 ; 0,281] **d.** [0,192 ; 0,280]

3. Supposons qu'on soit en présence d'un échantillon de 500 jeunes âgés de 15 à 29 ans. On rejette l'hypothèse $p = 0.236$ avec un risque d'erreur de 5% si le nombre de fumeurs réguliers au sein de l'échantillon est de

   a. 100 **b.** 118 **c.** 136 **d.** 160

4. La taille n de l'échantillon choisi afin que l'amplitude de l'intervalle de fluctuation au seuil de 0,95 soit inférieure à 0,01, vaut :

   a. $n = 200$ **b.** $n = 400$ **c.** $n = 21\,167$ **d.** $n = 27\,707$

5.* Dans un échantillon de 250 jeunes fumeurs réguliers, âgés de 15 à 19 ans, 99 sont des filles.
   Au seuil de 95 %, un intervalle de confiance de la proportion de filles parmi les fumeurs réguliers âgés de 15 à 19 ans est :
   (*Les bornes de chaque intervalle sont données à* 10^{-2} près)

   a. [0,35 ; 0,45] **b.** [0,33 ; 0,46] **c.** [0,39 ; 0,40] **d.** [0,30 ; 0,50]

Exercice 3. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par

$$f(x) = (4 - 3x)\mathrm{e}^{-x} + 0.2.$$

1. On désigne par f' la dérivée de la fonction f.
   Montrer que l'on a, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,4]$,
   $f'(x) = (3x - 7)\mathrm{e}^{-x}$.
2. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle. Toutes les valeurs du tableau seront données sous forme exacte.
3. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β sur l'intervalle $[0\,;\,4]$.
   b) Donner à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de α et de β à 0,01 près.
4. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par

$$F(x) = (3x - 1)\mathrm{e}^{-x} + 0.2x.$$

   a) Montrer que F est une primitive de f sur $[0\,;\,4]$.
   b)* Calculer la valeur moyenne de f sur $[0\,;\,4]$
5. On admet que la dérivée seconde de la fonction f est la fonction f'' définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par $f''(x) = (10 - 3x)\mathrm{e}^{-x}$.
   a) Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.
   b) Montrer que la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f possède un point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.

Exercice 4.*
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (2x + 1)e^{3x}$$

Pour déterminer une primitve F définie sur $\mathbb{R}$ de f, on suppose qu'elle est de la forme $F(x) = (ax + b)e^{3x}$ où a et b sont deux nombres réels à déterminer.

1. Vérifier que $F'(x) = (3ax + a + 3b)e^{3x}$.
2. En déduire une primitive de f.