Les devoirs en Première STMG

O. Lader

Table des matières

Devoir sur table 1 : Proportions et inclusions

mardi 23 septembre 2014

Exercice 1.

1) Calculer 20% de 150 ;

2) Calculer $\frac{2}{3}$ de 150.

Exercice 2. On a interrogé 1 200 personnes sur la possession d'un ordinateur et d'une télévision. Les résultats sont donnés ci-dessous :

	ordinateur	Sans ordinateur
TV	414	462
Sans TV	90	234

Calculer la proportion de personnes ayant :

1) un ordinateur ;

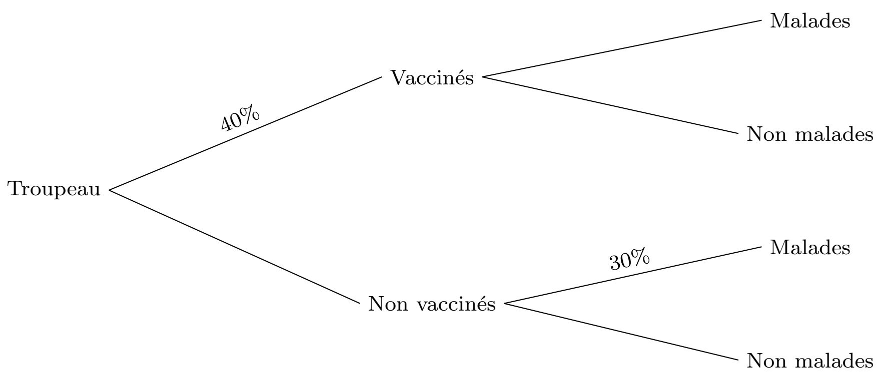
2) une télévision ;

3) un ordinateur et une télévision ;

4) au moins l'un de ces deux objets.

Exercice 3. Face à la menace d'une épidémie frappant les troupeaux de bovins, les services sanitaires décident d'organiser une vaccination de masse sur 800 bovins.
40% des animaux ont été vaccinés. Les experts considèrent que 30% des animaux non vaccinés contracteront la maladie tandis que 1% des animaux vaccinés contracteront quand même la maladie.

1) Compléter l'arbre



2) Calculer le nombre estimé de bovins malades.

3) Compléter le tableau à deux entrées suivant :

	Malades	Non malades	Total
Vaccinés			
Non vaccinés			
Total			

Exercice 4. Selon une étude, en France, le nombre de diabétiques traités en 2007 s'élève à 2.5 millions ; 800 000 d'entre eux ont moins de 20 ans.
Il existe deux types de diabète.

- Le diabète de type 1, qui nécessite un traitement en insuline. Il touche 10% des diabétiques ; 50% des diabétiques traités à l'insuline ont moins de 20 ans ;
- le diabète de type 2, qui se retrouve généralement chez les sujets âgés.

1) Compléter le tableau d'effectifs suivant.

	Type 1	Type 2	Total
≤ 20 ans			
> 20 ans			
Total			

2) Représenter cette situation par un arbre pondéré.

Devoir sur table 1 : Proportions et inclusions

corrigé

Exercice 1. Notons que :

1) 20% de 150 est égal à $0.20 \times 150 = 30$;
2) $\frac{2}{3}$ de 150 est égal à $\frac{2}{3} \times 150 = 100$.

Exercice 2. On a interrogé 1 200 personnes sur la possession d'un ordinateur et d'une télévision. Les résultats sont donnés ci-dessous :

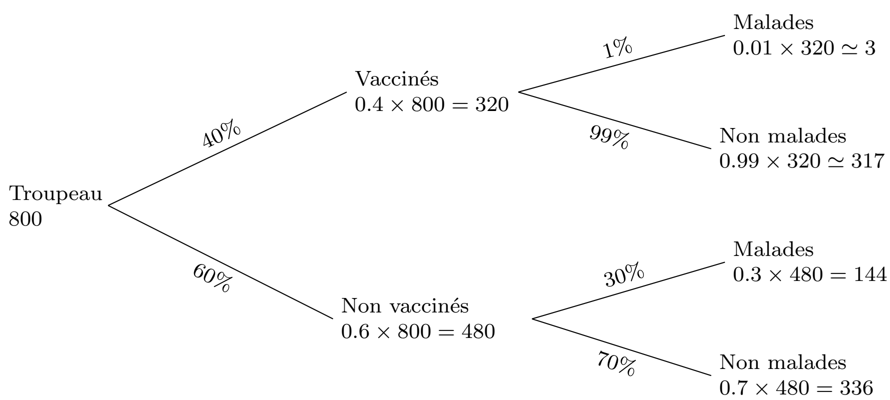
	ordinateur	Sans ordinateur
TV	414	462
Sans TV	90	234

La proportion de personnes ayant :

1) un ordinateur est $\frac{414+90}{1200} = 0.42 = 42\%$;
2) une télévision est $\frac{414+462}{1200} = 0.73 = 73\%$;
3) un ordinateur et une télévision est $\frac{414}{1200} = 0.345 = 34.5\%$;
4) au moins l'un de ces deux objets est $\frac{414+90+462}{1200} = 0.805 = 80.5\%$.

Exercice 3. Face à la menace d'une épidémie frappant les troupeaux de bovins, les services sanitaires décident d'organiser une vaccination de masse sur 800 bovins.
40% des animaux ont été vaccinés. Les experts considèrent que 30% des animaux non vaccinés contracteront la maladie tandis que 1% des animaux vaccinés contracteront quand même la maladie.

1) Résumons les donnés avec l'arbre suivant :



2) Le nombre estimé de bovins malades est de $3 + 144 = 147$. On aurait aussi pu trouver se résultat par un calcul direct en utilisant les inclusions :

$$0.40 \times 0.01 \times 800 + 0.6 \times 0.3 \times 800 \simeq 147$$

3) Le tableau à deux entrées associé :

	Malades	Non malades	Total
Vaccinés	3	317	320
Non vaccinés	144	336	480
Total	147	653	800

Exercice 4. Selon une étude, en France, le nombre de diabétiques traités en 2007 s'élève à 2.5 millions ; 800 000 d'entre eux ont moins de 20 ans.
Il existe deux types de diabète.

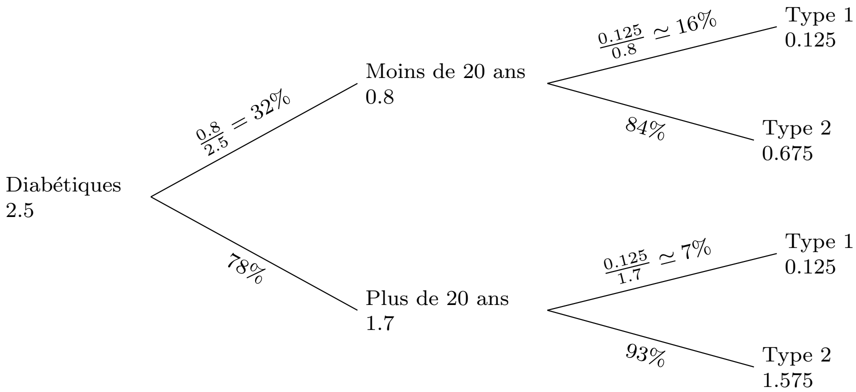
- Le diabète de type 1, qui nécessite un traitement en insuline. Il touche 10% des diabétiques ; 50% des diabétiques traités à l'insuline ont moins de 20 ans ;
- le diabète de type 2, qui se retrouve généralement chez les sujets âgés.

1) Compléter le tableau d'effectifs suivant.

	Type 1	Type 2	Total
≤ 20 ans	$0.50 \times 0.25 = 0.125$	0.675	**0.8**
> 20 ans	0.125	1.575	1.7
Total	$0.1 \times 2.5 = 0.25$	2.25	**2.5**

Les données sont représentées en millions.

2) Une possibilité d'arbre pondéré associé à cette situation :



On note au passage que parmi les plus de 20 ans, environs 93% des diabètes sont de type 2. D'où l'affirmation dans l'énoncé que la diabète de type 2 "se retrouve généralement chez les sujets âgés".

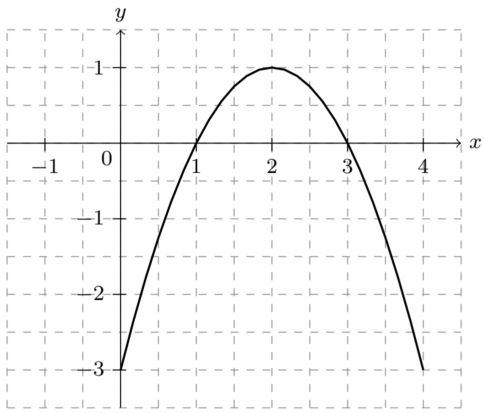
Devoir sur table 2 : Les fonctions polynômes du second degré

jeudi 9 octobre 2014

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant :

$$\begin{cases} x + 3y &= 5 \\ 2x - y &= 3 \end{cases}$$

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $[0; 4]$ par $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.
La courbe représentative $\mathcal{P}$ de f est donnée sur la figure suivante.



1) Déterminer graphiquement les solutions dans $[0; 4]$ de l'équation $-x^2 + 4x - 3 = 0$.
2) Résoudre graphiquement dans $[0; 4]$ l'inéquation $-x^2 + 4x - 3 \geq 0$.
3) Retrouver par le calcul les résultats obtenus aux questions 1) et 2).

Exercice 3. Un artisan fabrique des vases qu'il met en vente. On suppose que tous les vases fabriqués sont vendus.
L'artisan veut faire une étude sur la production d'un nombre de vases compris entre 0 et 60. Il estime que le coût de production de x vases fabriqués est modélisé par la fonction C dont l'expression est :

$$C(x) = x^2 - 10x + 500$$

où x appartient à l'intervalle $[0; 60]$.
Chaque vase est vendu 50 euros.

1) Déterminer le coût de production de 40 vases fabriqués.
2) À l'aide de la calculatrice déterminer, à une unité près, la production qui correspond à un coût total de 1 300 euros.
3) On note $B(x)$ le bénéfice, en euros, réalisé par la fabricaion et la vente de x vases.
   a) Déterminer le bénéfice, en euros, réalisé par la fabricaion et la vente de 20 vases.
   b) Justifier, par un calcul, que $B(x) = -x^2 + 60x - 500$.
   c) Dresser le tableau de variations de la fonction polynôme du second degré $B(x)$.
   d) Résoudre l'équation du second degré $-x^2 + 60x - 500 = 0$.
   e) Déterminer le nombre vases que l'artisan doit fabriquer et vendre pour réaliser un bénéfice.

f) Calculer le bénéfice pour trente vases fabriqués et vendus.

g) Combien de vases faut-il fabriquer et vendre pour que le bénéfice soit maximal.

Exercice 4. Un commerçant accorde deux remises successices de $x\%$, pour un achat dont le prix initial est de 1000 euros. Après les deux remises, le prix à payer est de 902.50 euros. Déterminer le pourcentage x.

Devoir sur table 2 : Les fonctions polynômes du second degré

corrigé

Exercice 1. Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant :

$$\begin{cases} x + 3y &= 5 \\ 2x - y &= 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x &= 5 - 3y \\ 2x - y &= 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x &= 5 - 3y \\ 2(5 - 3y) - y &= 3 \end{cases}$$

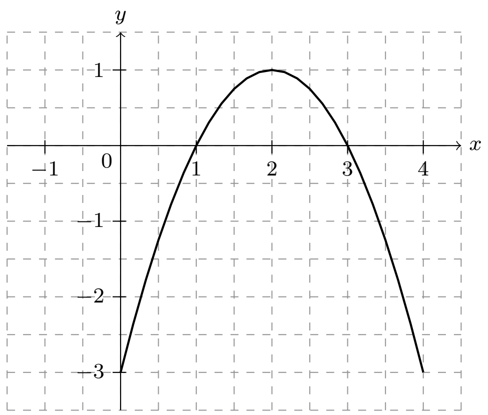
$$\begin{cases} x &= 5 - 3y \\ 10 - 6y - y &= 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x &= 5 - 3y \\ -7y &= 3 - 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x &= 5 - 3y \\ y &= \frac{-7}{-7} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x &= 5 - 3 \times 1 = 2 \\ y &= 1 \end{cases}$$

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $[0; 4]$ par $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.
La courbe représentative $\mathcal{P}$ de f est donnée sur la figure suivante.



1) Graphiquement les solutions dans $[0; 4]$ de l'équation $-x^2+4x-3 = 0$ sont $x = 1$ et $x = 3$.
2) Graphiquement l'intervalle solution de l'inéquation $-x^2 + 4x - 3 \geq 0$ est $[1; 3]$.
3) Le discriminant du polynôme du second degré $-x^2+4x-3$ est $\Delta = 4^2-4\times(-1)\times(-3) = 4$, ainsi les solutions de $-x^2 + 4x - 3 = 0$ sont

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - \sqrt{4}}{2 \times (-1)} = 3 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 1$$

De plus, on note que $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2$ et comme le coefficient dominant de f est -1 qui est négatif, on en déduit le tableau de variation de f :

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	-3	0	1	0	-3

D'où l'intervalle solution de l'inéquation $f(x) \geq 0$ est $[1; 3]$.

Exercice 3. Un artisan fabrique des vases qu'il met en vente. On suppose que tous les vases fabriqués sont vendus.
L'artisan veut faire une étude sur la production d'un nombre de vases compris entre 0 et 60. Il estime que le coût de production de x vases fabriqués est modélisé par la fonction C dont l'expression est :

$$C(x) = x^2 - 10x + 500$$

où x appartient à l'intervalle $[0; 60]$.
Chaque vase est vendu 50 euros.

1) Le coût de production de 40 vases fabriqués est de $C(40) = 40^2 - 10 \times 40 + 500 = 1700$ euros.
2) À l'aide de la calculatrice, la production qui correspond à un coût total d'environ 1 300 euros est de 34 vases.
3) On note $B(x)$ le bénéfice, en euros, réalisé par la fabricaion et la vente de x vases.
   a) Déterminer le bénéfice, en euros, réalisé par la fabricaion et la vente de 20 vases est de $20 \times 50 - C(20) = 100 - 700 = 300$ euros.
   b) Pour déterminer le bénéfice, on retranche à la recette des ventes de x vases le coût de production de ses x vases :

   $$B(x) = 50x - C(x) = -x^2 + 60x - 500.$$

   c) Le coefficient dominant de la fonction polynôme du second degré $B(x)$ est négatif et $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-60}{-2} = 30$. Ainsi, le tableau de variations de la fonction polynôme du second degré $B(x)$ est :

x	0	30	60
$f(x)$	-500	400	-500

   d) Résolvons l'équation du second degré $-x^2 + 60x - 500 = 0$: Son discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = 60^2 - 4 \times (-1) \times (-500) = 1600$. D'où, il y a deux solutions :

   $$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-60 - \sqrt{1600}}{-2} = 50 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 10$$

   e) On en déduit que le nombre vases que l'artisan doit fabriquer et vendre pour réaliser un bénéfice est entre 10 et 50 vases.
   f) Le bénéfice pour trente vases fabriqués et vendus est $B(30) = 400$ euros.
   g) D'après le précédent tableau de variation, il faut produire 30 vases et les vendre pour que le bénéfice soit maximal.

Exercice 4. Un commerçant accorde deux remises successices de $x\%$, pour un achat dont le prix initial est de 1000 euros. Après les deux remises, le prix à payer est de 902.50 euros.
On a l'équation suivante :

$$
\begin{array}{ll}
& 1000 \times (1 - \frac{x}{100}) \times (1 - \frac{x}{100}) = 902.50 \\
\Longleftrightarrow & (1 - \frac{x}{100})^2 = \frac{902.50}{1000} = 0.9025 \\
\Longleftrightarrow & 1 - \frac{x}{100} = \sqrt{0.9025} \quad \text{ou} \quad 1 - \frac{x}{100} = -\sqrt{0.9025} \\
\Longleftrightarrow & \frac{x}{100} = 1 + \sqrt{0.9025} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{100} = 1 - \sqrt{0.9025} \\
\Longleftrightarrow & x = 100 \times (1 + \sqrt{0.9025}) = 195 \quad \text{ou} \quad x = 100 \times (1 - \sqrt{0.9025}) = 5
\end{array}
$$

On en déduit que les deux diminutions ont été de 5%.

Devoir maison 1 : taux d'évolution

jeudi 6 novembre 2014

Exercice 1. Résoudre l'équation du second degré $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Exercice 2. Une entreprise fabrique et vend une quantité x d'objets par jour, x étant un nombre entier compris entre 10 et 120. Elle doit assumer des charges représentant un coût total quotidien dont le montant en euros est donné par

$$C(x) = 0.2x^2 + 8x + 500$$

Le prix de vente d'un objet dépend de la quantité produite et s'exprime, en euros, par la relation $p(x) = 62 - \frac{x}{4}$.

1) a) Déterminer la recette totale obtenue avec une vente de 40 objets.
   b) Déterminer en fonction de la quantité x vendue le montant de la recette totale $R(x)$.
2) Montrer que le bénéfice, en euros, réalisé par la vente de x objets est alors donné par

$$B(x) = -0.45x^2 + 54x - 500$$

3) a) Quelle quantité d'objets doit-on produire et vendre pour réaliser un bénéfice ?
   b) Quelle quantité d'objets doit-on produire et vendre pour réaliser un bénéfice de 400 euros ?
   c) Quelle quantité d'objets doit-on produire et vendre pour réaliser un bénéfice maximal ? Justifier à l'aide d'un tableau de variations de la fonction $B(x)$.

Exercice 3 (Évolution de la démographie de France)**.**

	A	B	C
1	Année	Population(en millions d'habitants)	Taux d'évolution
2	2000	58.86	
3	2001	59.27	0.70%
4	2002	59.69	
5	2003	60.10	
6	2004	60.51	
7	2005	60.96	
8	2006	61.40	
9	2007	61.80	
10	2008	62.13	
11	2009	62.47	

1) Recopier le tableau dans un tableur.
2) Dans la cellule C3, parmis les formules suivantes, lesquelles donnent le bon résultat ?

- `=B3 - B2 / B2`
- `=(B3 - B2) / B2`
- `=(B2 - B3) / B3`
- `=(B3 - $B2) / $B2`
- `=(B3 - $B$2) / $B$2`
- `=(B3 - B$2) / B$2`

Justifier.
Pour afficher les taux d'évolution sous la forme d'un pourcentage dans le tableur, il suffit de les sélectionner, clic droit, formater les cellules et dans la rubrique Nombres, choisir Pourcentage et sélectionner l'un des Formats proposés.

3) Ensuite parmis les formules identifiés comme juste dans la question précédente, lesquelles permettent de compléter le tableau en copiant la cellule C3 vers le bas ? Justifier.
4) Compléter votre tableau sur le tableur.
5) Tracer, avec le tableur, le graphe avec en abscisse les années et en ordonnée la taille de la population française.
Pour tracer le graphe, il faut sélectionner les données des deux premières colonnes, ensuite dans le menu, insertion/diagramme, puis sélectionner le type de diagramme : XY (dispersion) et valider.
6) Tracer, avec le tableur, le graphe avec en abscisse les années et en ordonnée les taux d'évolution.
7) Interpréter la différence de variations entre les deux graphiques.
8) Calculer le taux d'évolution global d'augmentation de la population française de 2000 à 2009 arrondi à 0.01% près.
9) Imprimer le résultat ou me l'envoyer à l'adresse : `Olivier.Lader@ac-creteil.fr`

Exercice 4. Un objet coûte 104.5 euros. On fait une remise de 26% sur le prix.

1) Combien coûte l'objet après remise.
2) Supposons qu'après la remise de 26%, on augmente à nouveau le prix de 26%, combien vaut alors l'objet ?
3) Soit p% le pourcentage d'augmentation pour revenir au prix de départ.
   a) Justifier qu'on a l'équation :
   $$(1 - 0.26) \times (1 + \frac{p}{100}) = 1$$
   b) En déduire que
   $$\frac{p}{100} = \frac{1}{1 - 0.26} - 1$$
   et déterminer p à 10^{-2} près.

Devoir maison 1 : taux d'évolution

corrigé

Exercice 1. Résolvons l'équation du second degré $x^2 - 5x + 6 = 0$. Son discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1 > 0$, ainsi il y a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 - \sqrt{1}}{2} = 2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + 1}{2} = 3$$

Exercice 2. Une entreprise fabrique et vend une quantité x d'objets par jour, x étant un nombre entier compris entre 10 et 120. Elle doit assumer des charges représentant un coût total quotidien dont le montant en euros est donné par

$$C(x) = 0.2x^2 + 8x + 500$$

Le prix de vente d'un objet dépend de la quantité produite et s'exprime, en euros, par la relation $p(x) = 62 - \frac{x}{4}$.

1) a) La recette totale obtenue avec une vente de 40 objets est $40 \times p(40) = 40 \times (62 - \frac{40}{4}) = 2080$ euros.

   b) En fonction de la quantité x vendue, le montant de la recette totale est

$$R(x) = x \times p(x) = x \times (62 - \frac{x}{4}) = 62x - \frac{x^2}{4}$$

2) Le bénéfice, en euros, réalisé par la vente de x objets est alors donné par

$$B(x) = C(x) - R(x) = 62x - \frac{x^2}{4} - (0.2x^2 + 8x + 500) = 62x - \frac{x^2}{4} - 0.2x^2 - 8x - 500 = -0.45x^2 + 54x - 500$$

3) a) L'entreprise réalise un bénéfice lorsque $B(x) \geq 0$. Commençons par résoudre $B(x) = 0$, c'est-à-dire $-0.45x^2 + 54x - 500 = 0$, une équation du second degré. Son discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = 54^2 - 4 \times (-0.45) \times (-500) = 2016 > 0$. Il y a donc deux solutions $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \simeq 109.9$ et $x_2 \simeq 10.1$. On note aussi que $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-54}{2 \times (-0.45)} = 60$ et que le coefficient dominant $a = -0.45$ est négatif. D'où le tableau de variations de la fonction B :

x	10	10.1	60	109.9	120
$B(x) = -0.45x^2 + 54x - 500$	-5	0	1120	0	-500

   Ainsi, il faut produire et vendre entre 11 et 109 objets pour réaliser un bénéfice.

   b) À l'aide de la calculatrice, on note qu'il faut produire et vendre 20 ou 100 objets pour réaliser un bénéfice de 400 euros.
   On aurait aussi pu résoudre l'équation du seconde degré $B(x) = 400$.

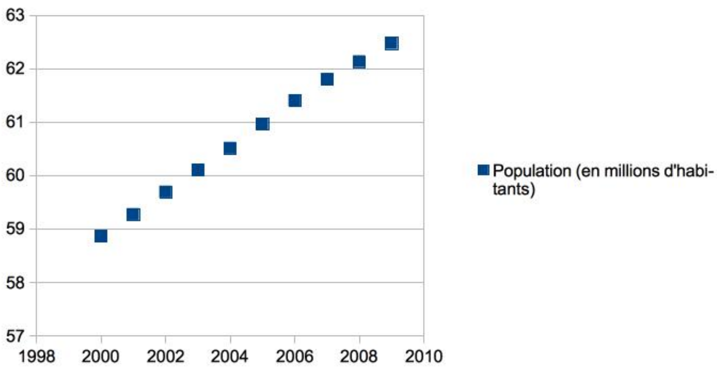
   c) D'après le précédent tableau de variation, on déduit qu'il faut produire et vendre 60 objets pour réaliser un bénéfice maximal.

Exercice 3 (Évolution de la démographie de France)**.**

	A	B	C
1	Année	Population(en millions d'habitants)	Taux d'évolution
2	2000	58.86	
3	2001	59.27	0.70%
4	2002	59.69	0.71%
5	2003	60.10	0.69%
6	2004	60.51	0.68%
7	2005	60.96	0.74%
8	2006	61.40	0.72%
9	2007	61.80	0.65%
10	2008	62.13	0.53%
11	2009	62.47	0.55%

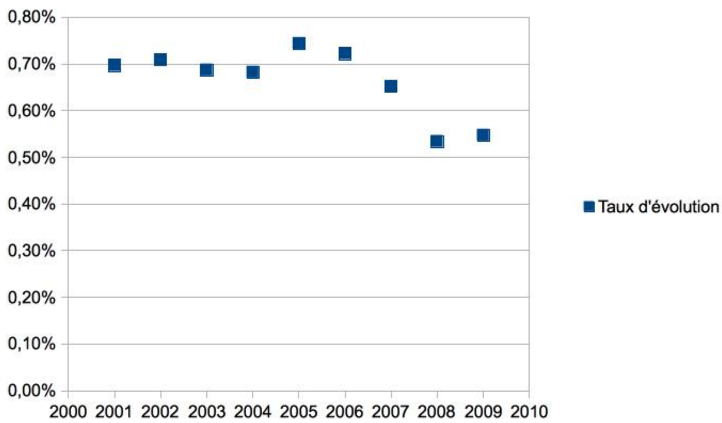
1) (Recopier le tableau dans un tableur.)
2) Dans la cellule C3, parmis les formules suivantes, lesquelles donnent le bon résultat ?
   - ~~`=B3 - B2 / B2`~~ **Il faut faire attention aux parenthèses !**
   - `=(B3 - B2) / B2`
   - ~~`=(B2 - B3) / B3`~~ **Il ne faut pas confondre la valeur de départ et la valeur d'arrivée !**
   - `=(B3 - $B2) / $B2`
   - `=(B3 - $B$2) / $B$2`
   - `=(B3 - B$2) / B$2`

   Pour afficher les taux d'évolution sous la forme d'un pourcentage dans le tableur, il suffit de les sélectionner, clic droit, formater les cellules et dans la rubrique Nombres, choisir Pourcentage et sélectionner l'un des Formats proposés.
3) Ensuite parmis les formules identifiés comme juste dans la question précédente, lesquelles permettent de compléter le tableau en copiant la cellule C3 vers le bas ?
   - `=(B3 - B2) / B2`
   - `=(B3 - $B2) / $B2`
   - ~~`=(B3 - $B$2) / $B$2`~~ **Il ne faut pas fixer l'indice de ligne avec le symbole $**
   - ~~`=(B3 - B$2) / B$2`~~ **Idem ! Il ne faut pas fixer l'indice de ligne avec le symbole $**
4) (Compléter votre tableau sur le tableur.)
5) Tracer, avec le tableur, le graphe avec en abscisse les années et en ordonnée la taille de la population française.



Pour tracer le graphe, il faut sélectionner les données des deux premières colonnes, ensuite dans le menu, insertion/diagramme, puis sélectionner le type de diagramme : XY (dispersion) et valider.

6) Tracer, avec le tableur, le graphe avec en abscisse les années et en ordonnée les taux d'évolution.



7) Le premier graphe montre bien l'augmentation continue de la population entre 2000 et 2009. Le graphe suggère qu'elle est très régulière (voir linéaire). Mais, en obsevant les taux d'évolution avec le second graphe, on se rend compte que les évolutions ne sont pas pas toujours les même. À partir de 2007, la vitesse d'augmentation diminue considérablement.

8) Le taux d'évolution global d'augmentation de la population française de 2000 à 2009 arrondi à 0.01% près est de

$$T = \frac{62.47 - 58.86}{58.86} \simeq 0.0613 \simeq 6.13\%$$

Exercice 4. Un objet coûte 104.5 euros. On fait une remise de 26% sur le prix.

1) L'objet coûte $104.5 \times (1 - \frac{26}{100}) = 104.5 \times 0.74 = 77.33$ euros après remise.

2) Supposons qu'après la remise de 26%, on augmente à nouveau le prix de 26%, l'objet vaut alors

$$77.33 \times (1 + \frac{26}{100}) = 77.33 \times 1.26 = 104.5 \times 0.74 \times 1.26 \simeq 97.44 \neq 104.5$$

On note qu'**une augmentation de 26% ne permet pas de revenir au prix de départ !**

3) Soit $p\%$ le pourcentage d'augmentation pour revenir au prix de départ.

a) On a alors

$$104.5 \times (1-0.26) \times (1+\frac{p}{100}) = 105.5 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (1-0.26) \times (1+\frac{p}{100}) = 1$$

b) D'où

$$1+\frac{p}{100} = \frac{1}{(1-0.26)} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{p}{100} = \frac{1}{1-0.26} - 1 \simeq 0.3514$$

D'où, une augmentation de 35.14% après une diminution de 26% permet de revenir au prix de départ.

Devoir sur table 3 : Taux d'évolution

Mardi 18 novembre 2014

Exercice 1. Un objet coûte 104.5 euros. On fait une remise de 26% sur le prix.

1) Combien coûte l'objet après remise.
2) Supposons qu'après la remise de 26%, on augmente à nouveau le prix de 26%, combien vaut alors l'objet ?
3) Déterminer le pourcentage d'augmentation (réciproque) pour revenir au prix de départ.

Exercice 2. Le tableau ci-dessous donne les dépenses, en millions d'euros, et les parts, en pour-cent, sur les dépenses totals, des ménages en France de 2000 à 2009 pour les programmes audiovisuels.

	2000		2009		Taux d'évolution
	Dépense	Part	Dépense	Part	de 2000 à 2009
Cinéma	894	14.73 %	1233	15.6 %	37.92 %
Redevance audiovisuelle	1572		1872	23.68 %	
Abonnement à des bouquets télé	2551		3308		
Achat et location de vidéos	1051		1493		
Total	6068		7906		30.29 %

1) De combien de pour-cents la dépense totale des ménages en France a augmenté de 2000 à 2009 ?
2) Déterminer de combien de pour-cents la dépense totale des ménages devrait baisser pour revenir à sa valeur initiale de 2000 ?
3) Quel était le montant des dépenses (au million près) en achats et locations de vidéos en 1999, sachant qu'elles ont diminué de 19,22% entre 1999 et 2000 ?
4) Quel est le taux d'évolution, exprimé en pourcentage (arrondi à 0,01% près), des dépenses en abonnement à des bouquets télé entre 2000 et 2009 ?
5) Calculer les proportions, exprimés en pourcentage (arrondi à 0,01% près), de chaque dépense par rapport à la dépense totale, pour les années 2000 et 2009 ?
6)
   a) Compléter le tableau.
   b) Quelle est la dépense qui a le plus augmenté entre 2000 et 2009 ?
   c) Quelle est la dépense dont la part par rapport au montant total, exprimée en pourcentage, a le plus augmenté entre 2000 et 2009 ?

Exercice 3. Le calcul du revenu imposable d'un contribuable commence par un abattement de 10% sur le salaire, suivi d'un abattement de 20% sur la somme ainsi obtenue.

1) Supposons que le salaire d'une personne est de 1300 euros, calculer le revenu imposable après les deux abattements.
2) Quel taux d'abattement unique est équivalent à ces deux abattements ?
3) L'ordre dans lequel sont effectués ces deux abattements a-t-il une influence sur le résultat ? Justifier.

Exercice 4. Le loyer d'une personne est de 600 euros la première année et on suppose qu'il augmente tous les ans de 5 euros.

1) Calculer le montant du loyer lors de la 2, 3, 4, 5 et 10ème année ?
2) Quel est le montant du loyer lors de la n-ème année ?

Devoir sur table 3 : Taux d'évolution

corrigé

Exercice 1. Un objet coûte 104.5 euros. On fait une remise de 26% sur le prix.

1) L'objet coûte $104.5 \times (1 - \frac{26}{100}) = 104.5 \times 0.74 = 77.33$ euros après remise.
2) Supposons qu'après la remise de 26%, on augmente à nouveau le prix de 26%, l'objet vaut alors

$$77.33 \times (1 + \frac{26}{100}) = 77.33 \times 1.26 = 104.5 \times 0.74 \times 1.26 \simeq 97.44 \neq 104.5$$

On note qu'**une augmentation de 26% ne permet pas de revenir au prix de départ !**

3) Le taux d'évolution réciproque est

$$t' = \frac{1}{(1 - 0.26)} - 1 \simeq 0.3514$$

D'où, une augmentation de 35.14% après une diminution de 26% permet de revenir au prix de départ.

Exercice 2. Le tableau ci-dessous donne les dépenses, en millions d'euros, et les parts, en pour-cent, sur les dépenses totals, des ménages en France de 2000 à 2009 pour les programmes audiovisuels.

	2000		2009		Taux d'évolution	
	Dépense	Part	Dépense	Part	de 2000 à 2009	
Cinéma	894	14.73 %	1233	15.6 %	37.92 %	5.86%
Redevance audiovisuelle	1572	25.91 %	1872	23.68 %	19.08 %	-8.60%
Abonnement à des bouquets télé	2551	42.04 %	3308	41.84 %	29.67 %	-0.47%
Achat et location de vidéos	1051	17.32 %	1493	18.88 %	42.06 %	9.03%
Total	6068		7906		30.29 %	

1) D'après le tableau la dépense totale des ménages en France a augmenté environ de 30.29% de 2000 à 2009.
2) Le taux d'évolution réciproque est

$$t' = \frac{1}{1 + 0.3029} - 1 \simeq -0.2325 = -23.25\,\%$$

Ainsi, la dépense totale des ménages devrait baisser de 23.25% pour revenir à sa valeur initiale de 2000.

3) Supposons que le montant des dépenses (au million près) en achats et locations de vidéos ont diminué de 19,22% entre 1999 et 2000. Soit X le montant des dépenses (au million près) en achats et locations de vidéos en 1999. Alors, on a $X \times (1 - 0.1922) = 1051$. D'où $X = \frac{1051}{0.8078} \simeq 1301$ millions d'euros est le montant des dépenses en 1999.
4) Le taux d'évolution (arrondi à 0,01% près), des dépenses en abonnement à des bouquets télé entre 2000 et 2009 est $t = \frac{y_2 - y_1}{y_1} = \frac{3308-2551}{2551} \simeq 0.2967 = 29.67\%$.

5) (Calculer les proportions, exprimés en pourcentage (arrondi à 0,01% près), de chaque dépense par rapport à la dépense totale, pour les années 2000 et 2009.) Voir tableau.

6) a) (Compléter le tableau.)

   b) La dépense qui a le plus augmenté entre 2000 et 2009 est celle des achats et locations de vidéos.

   c) Les taux d'évolutions des parts ont été ajouté à droite du tableau précédent. On voit que la dépense dont la part par rapport au montant total, exprimée en pourcentage, a le plus augmenté entre 2000 et 2009 est aussi celle des achats et locations de vidéos, elle a augmenté de 9.03%.

Exercice 3. Le calcul du revenu imposable d'un contribuable commence par un abattement de 10% sur le salaire, suivi d'un abattement de 20% sur la somme ainsi obtenue.

1) Supposons que le salaire d'une personne est de 1300 euros, le revenu imposable après les deux abattements est
$$1300 \times (1 - 0.1) \times (1 - 0.2) = 936$$

2) Le taux d'abattement unique qui est équivalent à ces deux abattements est $(1-0.1)\times(1-0.2) = 0.72$.

3) L'ordre dans lequel sont effectués ces deux abattements n'a pas d'influence sur le résultat, car $(1 - 0.1) \times (1 - 0.2) = (1 - 0.2) \times (1 - 0.1) = 0.72$.

Exercice 4. Le loyer d'une personne est de 600 euros la première année et on suppose qu'il augmente tous les ans de 5 euros.

1) Le montant du loyer lors 2, 3, 4, 5 et 10 année est 605, 610, 615, 620 et 645 euros respectivement.

2) Le montant du loyer lors de la n-ème année est $600 + (n - 1) \times 5 = 595 + 5n$.

Devoir sur table 4 : Statistiques

jeudi 11 décembre 2014

Exercice 1. Dans un lycée on étudie les moyennes trimestrielles du premier trimestre de deux classes appelées respectivement Jaune et Rouge.

Partie A Les élèves de la classe Jaune ont obtenu les moyennes trimestrielles suivantes au premier trimestre :

3; 4; 5; 7; 7; 10; 10; 10; 10; 10; 11; 11; 12; 12; 12; 12; 12; 13; 13; 13; 14; 15; 16; 18

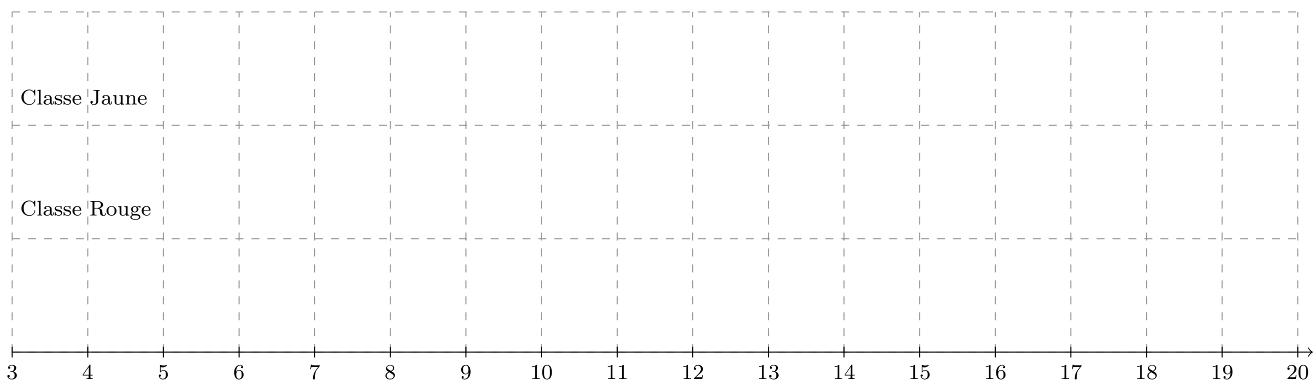
La moyenne trimestrielle de la classe s'obtient à partir des notes moyennes de chaque élève.

1) Déterminer la médiane Me, le premier quartile Q_1 et le troisième quartile Q_3 de cette série statistique de moyennes trimestrielles.
2) Représenter, sur l'annexe, le diagramme en boîte correspondant en faisant apparaître les valeurs extrêmes.
3) Calculer la moyenne et l'écart type trimestrielle de la classe Jaune.

Partie B Les indicateurs de la classe Rouge permettant de résumer la série statistique des moyennes du premier trimestre sont les suivants : Minimum 3 ; premier quartile $Q'_1 = 8$; médiane $Me' = 10$; troisième quartile $Q'_3 = 12$; maximum 17.

1) Représenter, sur l'annexe, le diagramme en boîte correspondant.
2) Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, fausses ou indécidables ? (indécidable signifie qu'on ne peut pas conclure avec les éléments connus.)
   Justifier votre réponse dans chacun des cas.
   a) 50% des élèves de la classe Rouge ont une note comprise entre 10 et 12.
   b) 75% des élèves de la classe Rouge ont une note inférieure ou égale à 12.
   c) Au moins 50% des élèves de la classe Rouge ont une note inférieure ou égale à la note médiane de la série de la classe Jaune.

Annexe :



Exercice 2. Lors de la dernière session d'un examen, on a pris un échantillon de trente copies parmi celles des candidats aux épreuves n° 1, 2, 3. Les résultats figurent dans le tableau suivant :

Notes sur 20	Effectifs des copies		
	Épreuve 1	Épreuve 2	Épreuve 3
5	0	3	0
6	6	0	0
7	5	5	2
8	8	0	1
9	1	8	6
10	3	0	3
11	0	3	5
12	2	4	0
13	0	0	2
14	1	1	6
15	2	4	3
16	2	2	2

Déterminer, pour chacune des trois épreuves, la moyenne et l'écart type des notes. Quelle est l'épreuve qui a été la mieux réussie ? Quelle est celle dont les résultats ont été les plus homogènes ?

Exercice 3. On donne les quatres listes de nombres suivantes :

A : 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 B : 1 ; 3 ; 9 ; 27 ; 81 C : 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 D : 3 ; 6 ; 11 ; 18 ; 27

1) Indiquer comment chacune est construite.
2) Donner les deux nombres suivants de chaque liste.
3) Pour quelles listes est-il possible de trouver le vingtième nombre de la liste sans calculer tous ceux qui le précèdent ?

Devoir sur table 4 : Statistiques

corrigé

Exercice 1. Dans un lycée on étudie les moyennes trimestrielles du premier trimestre de deux classes appelées respectivement Jaune et Rouge.

Partie A Les élèves de la classe Jaune ont obtenu les moyennes trimestrielles suivantes au premier trimestre :

3; 4; 5; 7; 7; 10; 10; 10; 10; 10; 11; 11; 12; 12; 12; 12; 12; 13; 13; 13; 14; 15; 16; 18

La moyenne trimestrielle de la classe s'obtient à partir des notes moyennes de chaque élève.

1 pt 1) La médiane est de 11,5, le premier quartiele $Q_1 = 10$ et le troisième quartile $Q_3 = 13$.

1 pt 2) (Représenter, sur l'annexe, le diagramme en boîte correspondant en faisant apparaître les valeurs extrêmes.)

1 pt 3) La moyenne est de $\bar{x} \simeq 10.83$ et l'écart type est de $\sigma \simeq 3.54$ pour la classe Jaune.

Partie B Les indicateurs de la classe Rouge permettant de résumer la série statistique des moyennes du premier trimestre sont les suivants : Minimum 3 ; premier quartile $Q_1' = 8$; médiane $Me' = 10$; troisième quartile $Q_3' = 12$; maximum 17.

1 pt 1) Représenter, sur l'annexe, le diagramme en boîte correspondant.

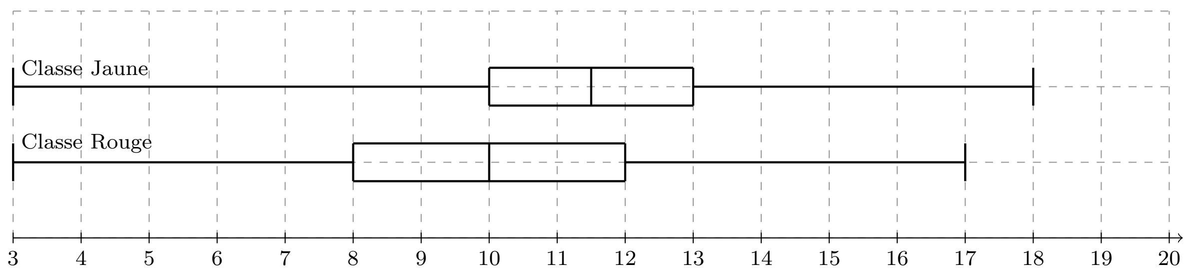
2) Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, fausses ou indécidables ? (indécidable signifie qu'on ne peut pas conclure avec les éléments connus.)

2 pt a) 50% des élèves de la classe Rouge ont une note comprise entre 10 et 12. **Indécidable.** Entre la mediane 10 et le troisième quartile 12, il y a environ 25% de l'effectif mais dans certains cas il peut bien y avoir 50% de l'effectif total.

2 pt b) 75% des élèves de la classe Rouge ont une note inférieure ou égale à 12. **Vraie.** Le troisième quartile Q_3 est égal à 12.

2 pt c) Au moins 50% des élèves de la classe Rouge ont une note inférieure ou égale à la note médiane de la série de la classe Jaune. **Vraie.** La médiane de la classe rouge est de 10 qui est inférieur à la médiane de la classe jaune qui vaut 11.5.

Annexe :



Exercice 2. Lors de la dernière session d'un examen, on a pris un échantillon de trente copies parmi celles des candidats aux épreuves n° 1, 2, 3. Les résultats figurent dans le tableau suivant :

Notes sur 20	Effectifs des copies		
	Épreuve 1	Épreuve 2	Épreuve 3
5	0	3	0
6	6	0	0
7	5	5	2
8	8	0	1
9	1	8	6
10	3	0	3
11	0	3	5
12	2	4	0
13	0	0	2
14	1	1	6
15	2	4	3
16	2	2	2

Déterminons, pour chacune des trois épreuves, la moyenne et l'écart type des notes.

Épreuve	Moyenne $\bar{x}$	Écart-type σ
1	9.13	3.15
2	10.3	3.33
3	11.6	2.69

3+3 pt L'épreuve qui a été la mieux réussie en moyenne est l'épreuve 3. Celle dont les résultats ont été les plus homogènes est l'épreuve 3 car son écart-type est le plus faible comparer aux autres.

Exercice 3. On donne les quatres listes de nombres suivantes :

A : 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11 ; 13 B : 1 ; 3 ; 9 ; 27 ; 81 ; 243 ; 729

C : 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36 ; 49 D : 3 ; 6 ; 11 ; 18 ; 27 ; 38 ; 51

2 pt 1)
- La liste A est la liste des entiers impairs ;
- La liste B est la liste des puissances de 3 ;
- La liste C est la liste des entiers au carré ;
- La liste C est la liste des entiers au carré plus deux.

2 pt 2) (Donner les deux nombres suivants de chaque liste.)

+2 pt 3) Pour les trois listes, il est possible de trouver le vingtième nombre de la liste sans calculer tous ceux qui le précèdent. Le vingtième terme de la liste

- A est $2 \times 20 - 1 = 39$;
- B est $3^{19} = 1\,162\,261\,467$;
- C est $20^2 = 400$;
- D est $20^2 + 2 = 402$.

Devoir sur table 5 : Suites numériques

mardi 27 janvier 2015

Exercice 1. 1) On considère la suite arithmétique (u_n) de raison $R = -1.5$ et de terme initial $u_0 = 10$.

a) Compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5
u_n						

b) Compléter la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n \ldots$.

c) Représenter graphiquement les premiers termes de la suite (u_n).

d) Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ? Jusitifier.

e) Tracer la droite d'équation $y = -1.5x + 10$.

2) On considère la suite géométrique (v_n) de raison $q = 1.05$ et de terme initial $v_0 = 5$.

a) Compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5
v_n						

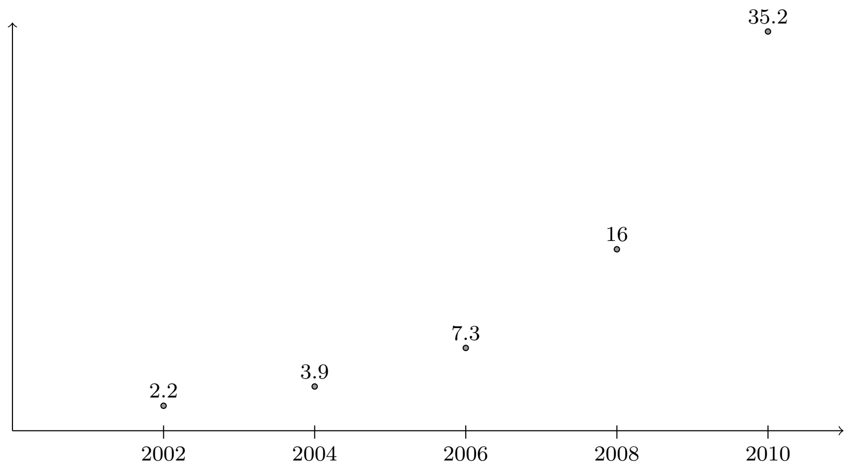
b) Compléter la relation de récurrence : $v_{n+1} = v_n \ldots$.

c) En choisissant une échelle adaptée, représenter graphiquement les premiers termes de la suite (v_n).

d) Est-ce que les points sont relativement alignées ?

e) Quel est le sens de variation de la suite (v_n) ? Jusitifier.

Exercice 2. La figure ci-dessous donne l'évolution de la puissance installée cumulée d'électricité photovoltaïque dans le monde, en gigawatts entre 2002 et 2010.



1) Déterminer le pourcentage de la hausse de la puissance installée cumulée entre 2002 et 2010.

2) On considère la suite (p_n) définie par :

n	0	1	2	3	4
p_n	$p_0 = 2.2$	$p_1 = 3.9$	7.3	16	35.2

a) Lire p_2 et p_3.

b) Calculer $p_2 - p_1$ et $p_3 - p_2$. La suite (p_n) est-elle une suite arithmétique ?

c) La suite (p_n) est-elle une suite géométrique ?

3) a) Déterminer le coefficient multiplicateur permettant de passer de p_3 à p_4.

b) En déduire le pourcentage de la hausse de la puissance installée cumulée entre 2008 et 2010.

4) À partir de 2006, on décide d'approcher la suite des puissances installées par la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 7.3$ et de raison $q = 2.2$.
En déduire une estimation de la puissance installée pour 2012.

Exercice 3. On place un capital de 1 500 euros à 3,25% par an, avec intérêts composés, le premier janvier 2011.
On note $C_0 = 1\,500$ et C_n le capital disponible le premier janvier de l'année $2011 + n$.

1) Compléter le tableau suivant :

Année	2011	2012	2013	
Rang n	0	1	2	3
Capital C_n	1 500			

2) a) Déterminer, pour tout entier n, l'expression du capital C_{n+1} en fonction du capital C_n de l'année précédente.

b) En déduire que les nombres C_0, C_1, C_2, ..., C_n, ... sont des termes succéssifs d'une suite géométrique de premier terme 1 500 dont on précisera la raison.

c) Donner une valeur approchée arrondie au centième de C_5.

d) Donner une valeur approchée arrondie au centième du capital disponible au premier janvier 2016.

e) Déterminer en quelle année le capital aura doublé.

Exercice 4. Deux ateliers A et B d'une même entreprise produisent chaque jour respectivement 100 et 300 pièces du même modèle. L'atelier A produit 1% de pièces défectueuses, l'atelier B en produit 2%.
On prélève au hasard une pièce parmi la production d'une journée des deux ateliers. Toutes les pièces ont la même probabilité d'être choisies. Déterminer la probabilité que la pièce soit défectueuse.

Devoir sur table 5 : Suites numériques

corrigé

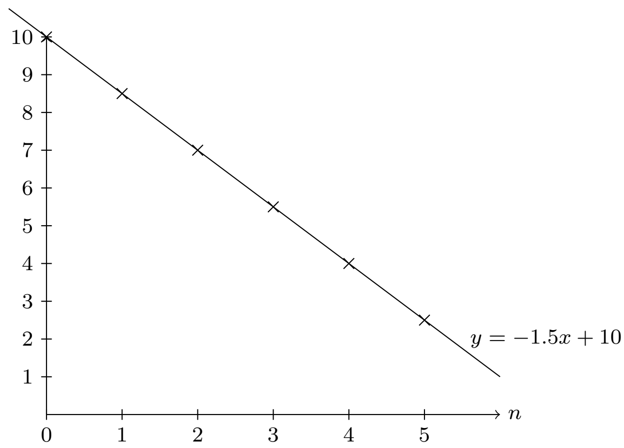
Exercice 1. 1) On considère la suite arithmétique (u_n) de raison $R = -1.5$ et de terme initial $u_0 = 10$.

a) Compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5
u_n	10	8.5	7	5.5	4	2.5

b) Compléter la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n - 1.5$.

c) Représenter graphiquement les premiers termes de la suite (u_n) :



d) La suite arithmétique (u_n) est décroissante car sa raison $R = -1.5$ est négative.

e) (Tracer la droite d'équation $y = -1.5x + 10$.)

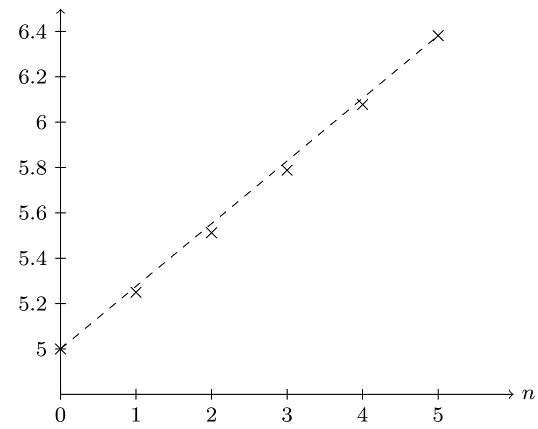
2) On considère la suite géométrique (v_n) de raison $q = 1.05$ et de terme initial $v_0 = 5$.

a) Compléter le tableau suivant (arrondi au centième) :

n	0	1	2	3	4	5
v_n	5	5.25	5.51	5.79	6.08	6.38

b) Compléter la relation de récurrence : $v_{n+1} = v_n \ldots$.

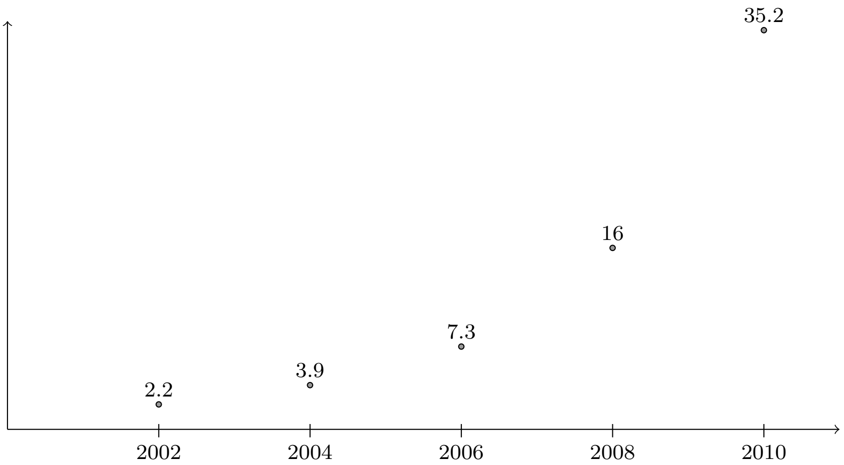
c) En choisissant une échelle adaptée, représenter graphiquement les premiers termes de la suite (v_n).



d) Les points ne sont pas exactement alignées.

e) La suite géométrique (v_n) est strictement croissante car sa raison $q = 1.05$ est sritctement supérieur à 1.

Exercice 2. La figure ci-dessous donne l'évolution de la puissance installée cumulée d'électricité photovoltaïque dans le monde, en gigawatts entre 2002 et 2010.



1) Le taux d'évolution de 2002 à 2010 de la puissance installée cumulée est

$$t = \frac{35.2 - 2.2}{2.2} = 15 = 1500\%$$

La puissance installée cumulée entre 2002 et 2010 a augmenté de 1 500%.

2) On considère la suite (p_n) définie par :

Année	2002	2004	2006	2008	2010	2012
n	0	1	2	3	4	
p_n	$p_0 = 2.2$	$p_1 = 3.9$	7.3	16	35.2	
u_m			$u_0 = 7.3$	u_1	u_2	u_3

a) Ainsi $p_2 = 7.3$ et $p_3 = 16$.

b) Comparons les différences des termes successifs : on note que $p_2 - p_1 = 3.4$ est différent de $p_3 - p_2 = 8.7$. Ainsi, la suite (p_n) n'est pas arithmétique.

c) Comparons les coefficients multiplicateurs des termes successifs : on note aussi que $\frac{p_1}{p_0} \simeq 1.77$ est différent de $\frac{p_2}{p_1} \simeq 1.87$. Ainsi, la suite (p_n) n'est pas géométrique.

3) a) Le coefficient multiplicateur permettant de passer de p_3 à p_4 est $c = \frac{p_4}{p_3} = \frac{35.2}{16} = 2.2$.

b) Le pourcentage de la hausse de la puissance installée cumulée entre 2008 et 2010 est $t = c - 1 = 2.2 - 1 = 1.2 = 120\%$.

4) À partir de 2006, on décide d'approcher la suite des puissances installées par la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 7.3$ et de raison $q = 2.2$.
On peut estimer la puissance installée pour 2012 à $u_3 = 7.3 \times 2.2^3 \simeq 77.7$.

Exercice 3. On place un capital de 1 500 euros à 3,25% par an, avec intérêts composés, le premier janvier 2011.
On note $C_0 = 1\,500$ et C_n le capital disponible le premier janvier de l'année $2011 + n$.

1) Compléter le tableau suivant :

Année	2011	2012	2013	2014	2015	2015
Rang n	0	1	2	3	4	5
Capital C_n	1 500	1 548.75	1 599.08	1 651.05	1 704,71	1 760,12

2) a) Pour tout entier n, l'expression du capital C_{n+1} en fonction du capital C_n de l'année précédente est $C_{n+1} = C_n \times 1.0325$.

b) Ainsi on en déduit que es nombres C_0, C_1, C_2, $\ldots$, C_n, $\ldots$ sont des termes succéssifs d'une suite géométrique de premier terme 1 500 de raison $q = 1.0325$.

c) Une valeur approchée arrondie au centième de C_5 est $1\,500 \times 1.0325^5 \simeq 1\,760.12$ euros.

d) Le capital l'année 2016 est réprésenté par le terme u_5. Ainsi, le capital disponible au premier janvier 2016 est d'environ 1 760.12 euros.

e) En faisant une table de la suite (u_n) à l'aide de la calculatrice, on note que $u_{21} \simeq 2\,936.1 < 3\,000 < u_{22} \simeq 3\,031,6$. Ainsi, le capital aura doublé, au bout de 22 ans en 2033.

Exercice 4. Deux ateliers A et B d'une même entreprise produisent chaque jour respectivement 100 et 300 pièces du même modèle. L'atelier A produit 1% de pièces défectueuses, l'atelier B en produit 2%.

On prélève au hasard une pièce parmi la production d'une journée des deux ateliers. Toutes les pièces ont la même probabilité d'être choisies.

Le nombre de pièces défectueuses est $\frac{1}{100} \times 100 + \frac{2}{300} = 1 + 6 = 7$ sur les 400 produites au total.

Ainsi, la probabilité qu'une pièce soit défectueuse est $\frac{7}{400} \simeq 0,0175 = 1.75\%$.

Devoir sur table 6 : Probabilités

jeudi 12 février 2015
Sujet A

Exercice 1. Quatre candidats A, B, C et D se présentent à une élection régionale.
Avant le scrutin, on a interrogé 1 000 personnes âgées de 18 à 90 ans s'étant prononcées sur leur intention de vote et ayant communiqué leur tranche d'âge.
On a obtenu le tableau incomplet de répartition suivant :

Candidat / Âge	A	B	C	D	Total
[18,30[	100	50	30	20	
[30,50[	150	50	20		300
[50,90[	50	300		100	
Total		400	100	200	1 000

1) Compléter le tableau.
2) Quel est l'âge moyen des personnes interrogées qui ont l'intention de voter pour le candidat B ?
   On prendra les centres des classes d'âge pour effectuer le calcul.
3) Combien y a-t-il de personnes qui ont choisi de voter pour A ?
4) Combien y a-t-il de personnes de plus de 50 ans qui ont choisi de voter pour A ?
5) On choisit au hasard une des 1 000 personnes interrogées et on considère les deux événements suivants :
   - E : "la personne choisie appartient à la tranche d'âge [18; 30["\;
   - F : "la personne choisie a voté pour le candidat B".

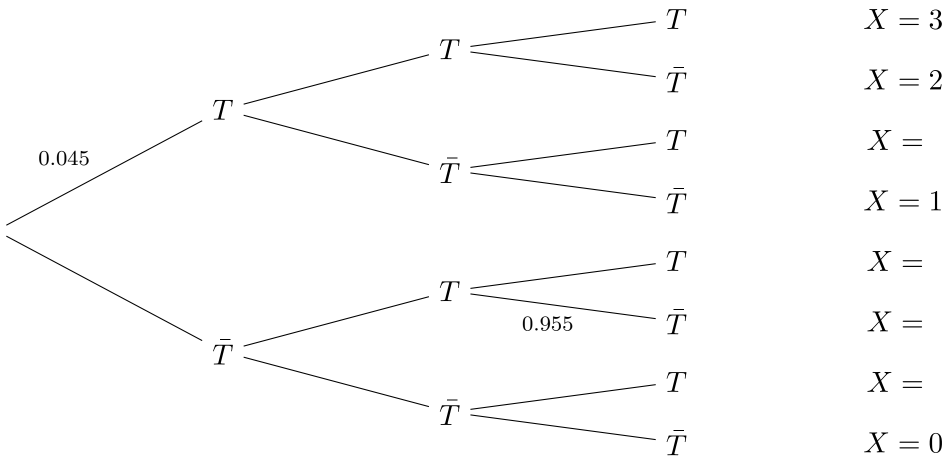
   On donnera tous les résultats sous forme décimale.
   a) Calculer la probabilité des deux événements E et F.
   b) Traduire par une phrase l'événement $\bar{F}$ et calculer sa probabilité.
   c) Traduire par une phrase l'événement $E \cap \bar{F}$ et calculer sa probabilité.
   d) En déduire $P(E \cup \bar{F})$.
6) On choisit au hasard une personne dans la tranche d'âge [18; 30[.
   Quelle est la probabilité que la personne choisie n'ait pas voté pour le candidat B ?

Exercice 2. Lors d'une épidémie chez des ovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle. Un test est mis au point. La probabilité pour que le test soit positif est 0,045.
On choisit trois animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise.
On note X la variable aléatoire qui, aux trois animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.

1) La configuration correspond donc à un schéma de Bernoulli de paramètres n et p. Déterminer n et p.

On note T l'événement "un test est positif".

2) Quelle est la probabilité que le test soit négatif ?
3) Compléter l'arbre de probabilités :



4) Colorier en rouge la branche de l'arbre correspondante à l'issue élémentaire $T\bar{T}T$.
5) Calculer la probabilité de l'issue élémentaire $T\bar{T}T$: le premier et le troisième tests sont positifs.
6) Calculer $P(X = 0)$, la probabilité que les trois tests soient négatifs.
7) Décrire par une phrase, l'événement $(X = 1)$.
8) Vérifier que $P(X = 1) \simeq 0.123$.
9) Calculer $P(X = 2)$.
10) Compléter le tableau suivant :

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	0.871			

11) Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des trois animaux ait un test positif ?

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

1) Compléter la table de f :

x	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$f(x)$											

2) Sur votre feuille, tracer la courbe représentative de la fonction f.
3) Tracer la droite d'équation $y = x - 3$ sur la figure précédente.
4) Que constate-t-on ? Vérifier avec la calculatrice en traçant la fonction f et la droite précédente.
5) Résoudre l'équation du second degré $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Devoir sur table 6 : Probabilités

jeudi 12 février 2015
Sujet B

Exercice 1. Quatre candidats A, B, C et D se présentent à une élection régionale.
Avant le scrutin, on a interrogé 1 000 personnes âgées de 18 à 90 ans s'étant prononcées sur leur intention de vote et ayant communiqué leur tranche d'âge.
On a obtenu le tableau incomplet de répartition suivant :

Âge \ Candidat	A	B	C	D	Total
[18,30[	100	50	30	20	200
[30,50[		50	20	80	
[50,90[	50		50	100	500
Total		400		200	1 000

1) Compléter le tableau.
2) Quel est l'âge moyen des personnes interrogées qui ont l'intention de voter pour le candidat B ?
On prendra les centres des classes d'âge pour effectuer le calcul.
3) Combien y a-t-il de personnes qui ont choisi de voter pour C ?
4) Combien y a-t-il de personnes de plus de 50 ans qui ont choisi de voter pour C ?
5) On choisit au hasard une des 1 000 personnes interrogées et on considère les deux événements suivants :
   - E : "la personne choisie appartient à la tranche d'âge [30; 50[" ;
   - F : "la personne choisie a voté pour le candidat B".

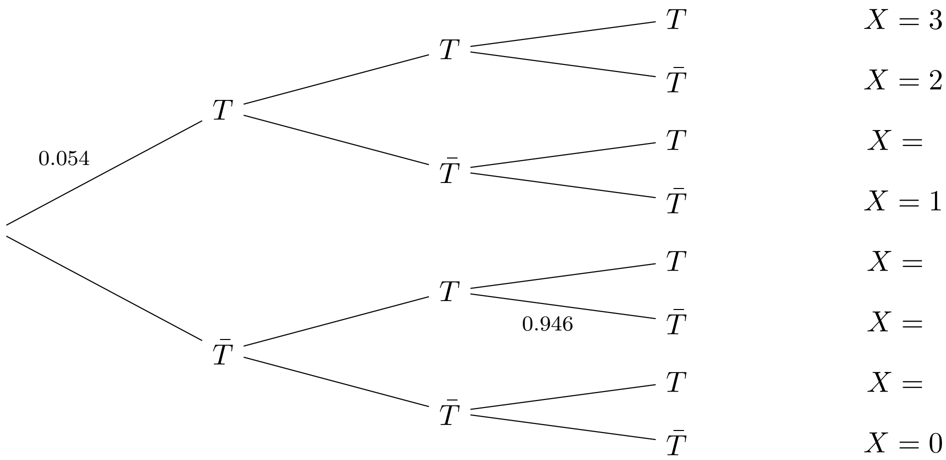
   On donnera tous les résultats sous forme décimale.
   a) Calculer la probabilité des deux événements E et F.
   b) Traduire par une phrase l'événement $\bar{F}$ et calculer sa probabilité.
   c) Traduire par une phrase l'événement $E \cap \bar{F}$ et calculer sa probabilité.
   d) En déduire $P(E \cup \bar{F})$.
6) On choisit au hasard une personne dans la tranche d'âge [30; 50[.
Quelle est la probabilité que la personne choisie n'ait pas voté pour le candidat B ?

Exercice 2. Lors d'une épidémie chez des ovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle. Un test est mis au point. La probabilité pour que le test soit positif est 0,054.
On choisit trois animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise.
On note X la variable aléatoire qui, aux trois animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.

1) La configuration correspond donc à un schéma de Bernoulli de paramètres n et p. Déterminer n et p.

On note T l'événement "un test est positif".

2) Quelle est la probabilité que le test soit négatif ?
3) Compléter l'arbre de probabilités :



4) Colorier en rouge la branche de l'arbre correspondante à l'issue élémentaire $\bar{T}TT$.
5) Calculer la probabilité de l'issue élémentaire $\bar{T}TT$: le second et le troisième tests sont positifs.
6) Calculer $P(X = 0)$, la probabilité que les trois tests soient négatifs.
7) Décrire par une phrase, l'événement $(X = 1)$.
8) Vérifier que $P(X = 1) \simeq 0.145$.
9) Calculer $P(X = 2)$.
10) Compléter le tableau suivant :

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	0.847			

11) Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des trois animaux ait un test positif ?

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

1) Compléter la table de f :

x	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$f(x)$											

2) Sur votre feuille, tracer la courbe représentative de la fonction f.
3) Tracer la droite d'équation $y = x - 3$ sur la figure précédente.
4) Que constate-t-on ? Vérifier avec la calculatrice en traçant la fonction f et la droite précédente.
5) Résoudre l'équation du second degré $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Devoir sur table 6 : Probabilités

Sujet A
corrigé

Exercice 1. Quatre candidats A, B, C et D se présentent à une élection régionale.
Avant le scrutin, on a interrogé 1 000 personnes âgées de 18 à 90 ans s'étant prononcées sur leur intention de vote et ayant communiqué leur tranche d'âge.
On a obtenu le tableau incomplet de répartition suivant :

Âge \ Candidat	A	B	C	D	Total
[18,30[	100	50	30	20	200
[30,50[	150	50	20	80	300
[50,90[	50	300	50	100	500
Total	300	400	100	200	1 000

1) (Compléter le tableau.)
2) L'âge moyen des personnes interrogées qui ont l'intention de voter pour le candidat B est

$$\bar{x} = \frac{24 \times 50 + 40 \times 50 + 70 \times 300}{400} = \frac{121}{2} = 60.5$$

Soit environ 57 ans.
3) Il y a 300 personnes qui ont choisi de voter pour A.
4) Il y a 50 personnes de plus de 50 ans qui ont choisi de voter pour A.
5) On choisit au hasard une des 1 000 personnes interrogées et on considère les deux événements suivants :
   - E : "la personne choisie appartient à la tranche d'âge [18; 30[" ;
   - F : "la personne choisie a voté pour le candidat B".

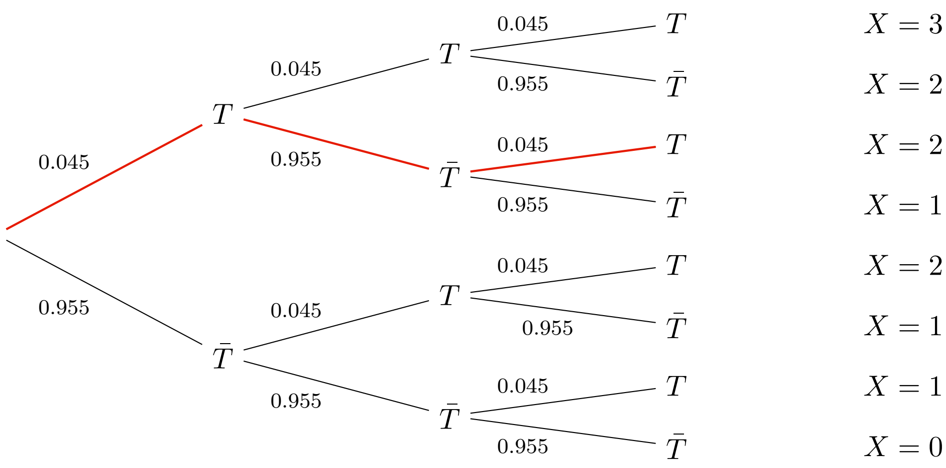
   On donnera tous les résultats sous forme décimale.
   a) La probabilité des deux événements E et F : $P(E) = \frac{200}{1000} = 0.2$ et $P(F) = \frac{400}{1000} = 0.4$.
   b) L'événement contraire $\bar{F}$ est "la personne choisie n'a pas voté pour le candidat B" et $P(\bar{F}) = 1 - P(F) = 1 - 0.4 = 0.6$.
   c) L'événement $E \cap \bar{F}$ est "la personne choisie a entre 18 et 30 ans et n'a pas voté pour le candidat B". D'après le tableau, $P(E \cap F) = \frac{100+30+20}{1000} = 0.15 = 15\%$.
   d) D'après le théorème revu en cours, $P(E \cup \bar{F}) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) = 0.2 + 0.6 - 0.15 = 0.65 = 65\%$.
6) On choisit au hasard une personne dans la tranche d'âge [18; 30[. La probabilité que la personne choisie n'ait pas voté pour le candidat B est $1 - \frac{50}{200} = 0.75 = 75\%$.

Exercice 2. Lors d'une épidémie chez des ovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle. Un test est mis au point. La probabilité pour que le test soit positif est 0,045.
On choisit trois animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise.
On note X la variable aléatoire qui, aux trois animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.

1) La configuration correspond donc à un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 4$ et $p = 0.045$.

On note T l'événement "un test est positif".

2) La probabilité que le test soit négatif est $1 - 0.045 = 0.955$.
3) Compléter l'arbre de probabilités :



4) (Colorier en rouge la branche de l'arbre correspondante à l'issue élémentaire $T\bar{T}T$.)
5) La probabilité de l'issue élémentaire $T\bar{T}T$: le premier et le troisième tests sont positifs est $P(T\bar{T}T) = 0.045 \times 0.955 \times 0.045 \simeq 0.0019$.
6) La probabilité que les trois tests soient négatifs est $P(X = 0) = P(\bar{T}\bar{T}\bar{T}) = 0.955^3 = 0.871$.
7) L'événement $(X = 1)$ correspond au fait qu'un seul ovins parmi les trois ait un test positif.
8) Il y a trois branches dans l'arbre avec la même probabilité correspondant à $X = 1$. Ainsi $P(X = 1) = 3 \times 0.045 \times 0.955^2 \simeq 0.123$.
9) De même, $P(X = 2) = 3 \times 0.045^2 \times 0.955 \simeq 0.0058$.
10) Compléter le tableau suivant :

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	0.871	0.123	0.0058	0.0001

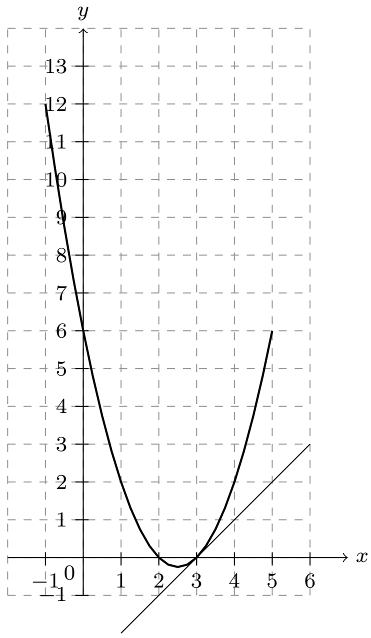
11) La probabilité pour qu'au moins un des trois animaux ait un test positif est $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.0001 = 0.9999$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

1) Compléter la table de f :

x	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$f(x)$	12	8.75	6	3.75	2	0.75	0	-0.25	0	0.75	2

2) (Sur votre feuille, tracer la courbe représentative de la fonction f.)



3) (Tracer la droite d'équation $y = x - 3$ sur la figure précédente.)
4) On constate que la droite précédente est tangente à la courbe $\mathcal{C}$.
5) Le discriminant de l'équation du second degré $x^2 - 5x + 6 = 0$ est $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 6 = 1$. Ainsi, il y a deux solutions :

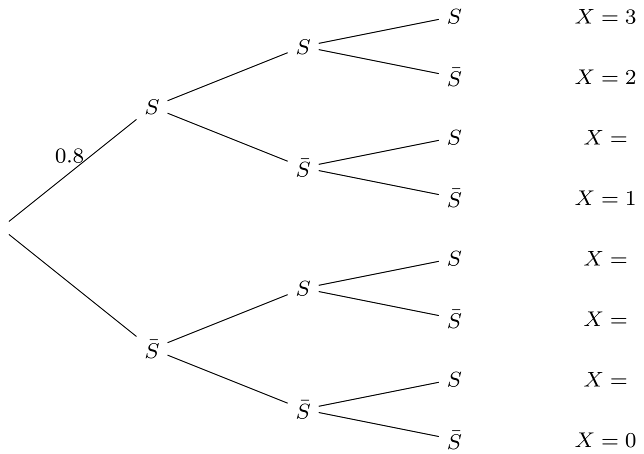
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5)-\sqrt{1}}{2} = 2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 3$$

Devoir maison 2 : Probabilités, taux d'évolution et fonction

mardi 3 mars 2015

Exercice 1. Dans une urne, on place 2 boules blanches et 8 boules noires. On tire successivement trois boules en les remettant à chaque fois. Note S l'événement "tirer une boule noire".
On pose X la variable aléatoire qui à l'expérience aléatoire associe le nombre de succès (c'est-à-dire, le nombre de boules noires tirées).

1) Compléter l'arbre de probabilités suivant :



2) Calculer $P(S\,\bar{S}\,S)$.
3) Calculer $P(X = 0)$, la probabilité que le nombre de boules noires tirées soit nul.
4) Décrire, par une phrase, l'événement $X = 1$ et faire la liste de toutes les issues de cette événement.
5) Vérifier que $P(X = 1) = 0.096$.
6) Calculer $P(X = 2)$ et $P(X = 3)$.
7) En résumé, compléter le tableau suivant :

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	0.008	0.096		

8) Calculer la probabilité de tirer au moins une boule noire.

Exercice 2. Parmi les 1 260 élèves d'un lycée, l'infirmière en a recensé 35% qui buvaient de l'alcool. Suite à une campagne de prévention, ce taux a baissé de 5 points.

1) Calculer le nombre d'élèves buvant de l'alcool avant la campagne.
2) Calculer le nombre d'élèves buvant de l'alcool après la campagne.
3) Quel est le taux d'évolution du nombre d'élèves buvant de l'alcool ?

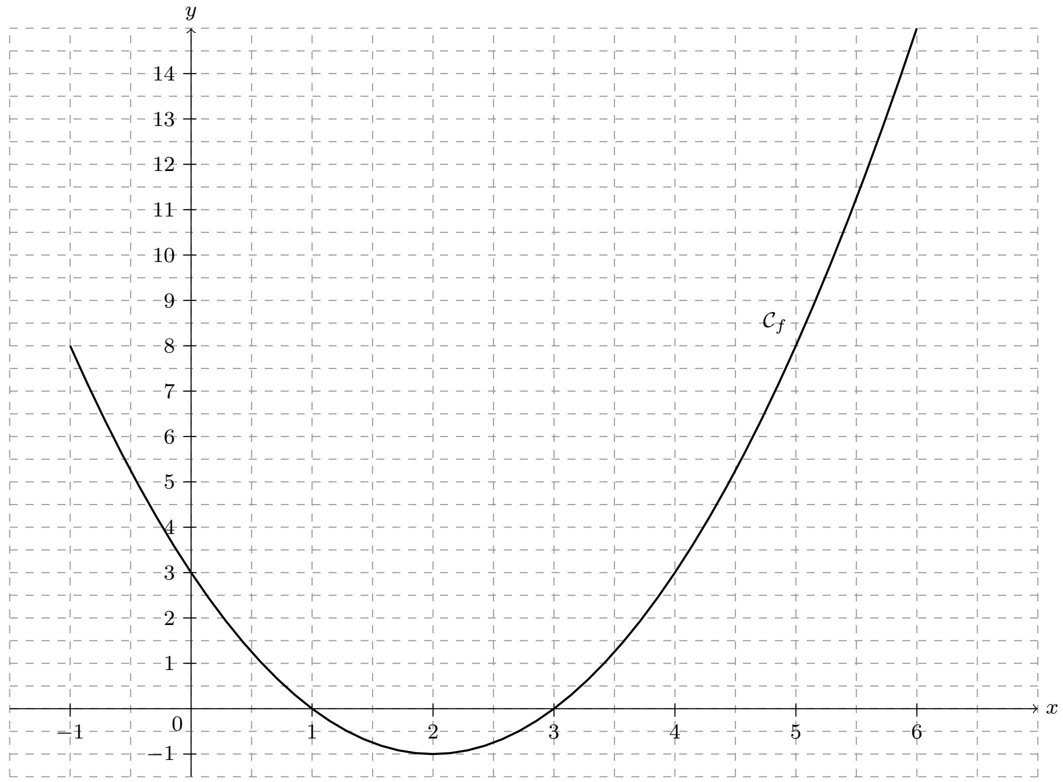
Exercice 3. On considère la fonction polynôme du second degré $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

1) Résoudre l'équation du second degré $x^2 - 4x + 3 = 0$.
2) Vérifier que $(x - 1)(x - 3) = f(x)$ pour tout réel x.

3) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

On considère les points $A(4;\,3)$, $B(3;\,-1)$ et $C(6;\,11)$.

4) Placer les points A, B et C sur la figure suivante où l'on a représenté le graphe de la fonction f.



5) Justifier que le point A appartient à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f.

6) Tracer la droite (BC). Que remarque-t-on entre cette droite et $\mathcal{C}_f$?

7) Calculer $a = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}$ le coefficient directeur de la droite (AC).

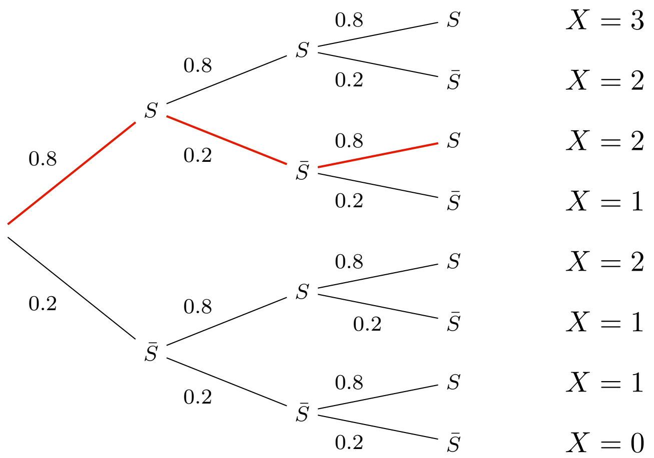
Le nombre a, coefficient directeur de la tangente à la courbe au point A d'abscisse 4, est appelé nombre dérivé de la fonction f en 4 et est noté $f'(4)$.

Devoir maison 2 : Probabilités, taux d'évolution et fonction

(corrigé)

Exercice 1. Dans une urne, on place 2 boules blanches et 8 boules noires. On tire successivement trois boules en les remettant à chaque fois. Note S l'événement "tirer une boule noire".
On pose X la variable aléatoire qui à l'expérience aléatoire associe le nombre de succès (c'est-à-dire, le nombre de boules noires tirées).

1) Voici l'arbre de probabilités associé :



Ainsi, d'après l'arbre de probabilités, on déduite les faits suivants.

1) En faisant le produit des probabilites sur la branche $S\,\bar{S}\,S$, on a que $P(S\,\bar{S}\,S) = 0.8 \times 0.2 \times 0.8 = 0.128$.
2) La probabilité que le nombre de boules noires tirées soit nul est $P(X = 0) = P(\bar{S}\,\bar{S}\,\bar{S}) = 0.2 \times 0.2 \times 0.2 = 0.2^3 = 0.008$.
3) L'événement $X = 1$ est "on tire exactement une boule noire sur les trois" et

$$(X = 1) = \{S\,\bar{S}\,\bar{S};\ \bar{S}\,S\,\bar{S};\ \bar{S}\,\bar{S}\,S\}$$

4) De la question précédente, on déduit que

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= P(\{S\,\bar{S}\,\bar{S};\ \bar{S}\,S\,\bar{S};\ \bar{S}\,\bar{S}\,S\}) \\ &= P(S\,\bar{S}\,\bar{S}) + P(\bar{S}\,S\,\bar{S}) + P(\bar{S}\,\bar{S}\,S) \\ &= 0.8 \times 0.2 \times 0.2 + 0.2 \times 0.8 \times 0.2 + 0.2 \times 0.2 \times 0.8 \\ &= 3 \times 0.2^2 \times 0.8 \\ &= 0.096 \end{aligned}$$

5) De même,

$$P(X = 2) = 3 \times 0.2 \times 0.8^2 = 0.384$$

et

$$P(X = 3) = 0.8^3 = 0.512$$

6) En résumé, on a le tableau suivant :

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	0.008	0.096	0.384	0.512

7) La probabilité de tirer au moins une boule noire est

$$P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0.008 + 0.096 + 0.384 + 0.512 = 0.992$$

Autre solution : L'événement contraire est de ne pas tirer de boule noire, d'où $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.008 = 0.992$.

Exercice 2. Parmi les 1 260 élèves d'un lycée, l'infirmière en a recensé 35% qui buvaient de l'alcool. Suite à une campagne de prévention, ce taux a baissé de 5 points.

1) Le nombre d'élèves buvant de l'alcool avant la campagne est $0,35 \times 1\,260 = 441$.
2) Suite à la campagne de prévention, le taux a baissé de 5 points, ainsi il est de 30% et le nombre d'élèves buvant de l'alcool après la campagne est $0.30 \times 1\,260 = 378$.
3) On a
$$t = \frac{y_2 - y_1}{y_1} = \frac{378 - 441}{441} = -\frac{1}{7} \simeq 0.143$$
Le taux d'évolution du nombre d'élèves buvant de l'alcool est de -14.3%.

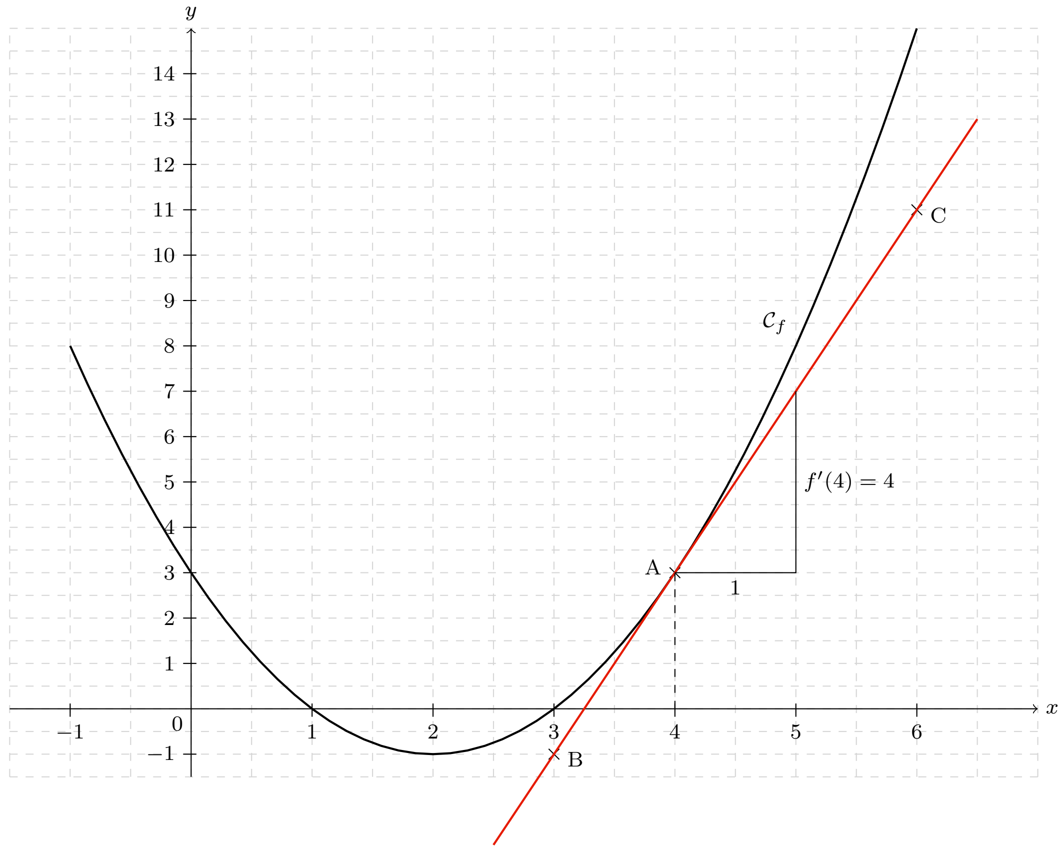
Exercice 3. On considère la fonction polynôme du second degré $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

1) Résolvons l'équation du second degré $x^2 - 4x + 3 = 0$: Son discriminant est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 16 - 12 = 4 > 0$. Donc, il y a 2 solutions :
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) - \sqrt{2}}{2} = 1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 3.$$
2) Soit x un nombre réel, alors
$$\begin{aligned} (x-1)(x-3) &= x^2 - 3x - x - 1 \times (-3) \\ &= x^2 - 4x + 3 \\ &= f(x) \end{aligned}$$
3) On note que $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$ et $f(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 3 = -1$. Le coefficient dominant $a = 1$ est positif, d'où le tableau de variation de la fonction f est :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

On considère les points $A(4;\, 3)$, $B(3;\, -1)$ et $C(6;\, 11)$.

4) (Placer les points A, B et C sur la figure suivante où l'on a représenté le graphe de la fonction f.)



5) Notons que $f(x_A) = f(4) = 4^2 - 4 \times 4 + 3 = 3 = y_A$, ainsi le point $A(4; 3)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f.

6) (Tracer la droite (BC).) On remarque que la droite (BC) est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$.

7) On a $a = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{11-(-1)}{6-3} = 4$ le coefficient directeur de la droite (AC).

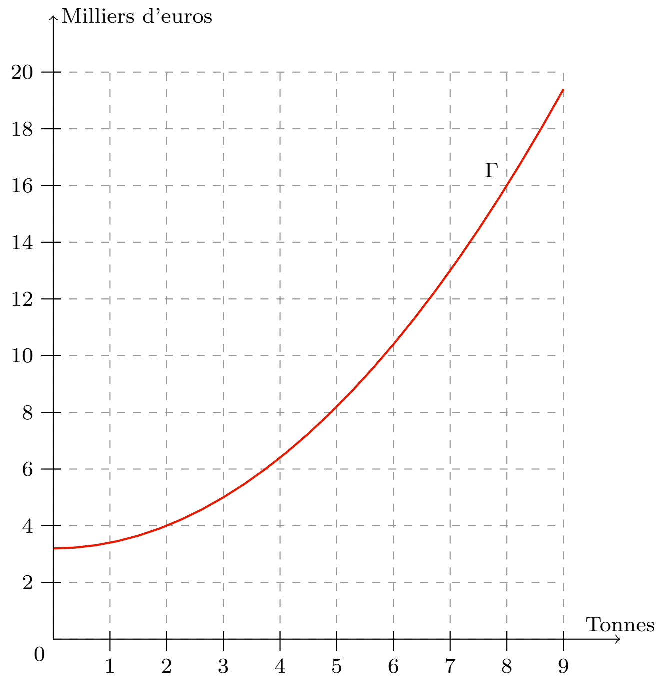
Le nombre a, coefficient directeur de la tangente à la courbe au point A d'abscisse 4, est appelé nombre dérivé de la fonction f en 4 et est noté $f'(4)$.

Devoir maison 3 : Dérivation

pour le mardi 31 mars 2015

Exercice 1 (ex 51 p 149)**.** Une entreprise fabrique et commercialise un produit chimique. La capacité de production est limitée à 9 tonnes par jour.
On note $C(x)$ le coût total en milliers d'euros pour fabriquer C sur l'intervalle $[0; 9]$. Ce produit est vendu 2 000 euros la tonne, ainsi la recette en milliers d'euros obtenue en vendant x tonnes de ce produit est $R(x) = 2\,x$ milliers d'euros.

A. Voici la courbe représentive Γ de la fonction coût C :



1) Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes :
   a) Quel est le coût de fabrication pour une production journalière de 3 tonnes ?
   b) Quelle production journalière correspond à un coût de fabrication de 13 000 euros ?
   c) Pour quelle quantité d'objets fabriqués le coût de fabrication n'excède-t-il pas 16 000 euros ?
2) Tracer sur l'annexe, à reproduire, la droite Δ d'équation $y = 2x$.
3) Déterminer graphiquement dans quel intervalle il faut choisir la quantité x produite et vendu pour que l'entreprise soit bénéficiaire.

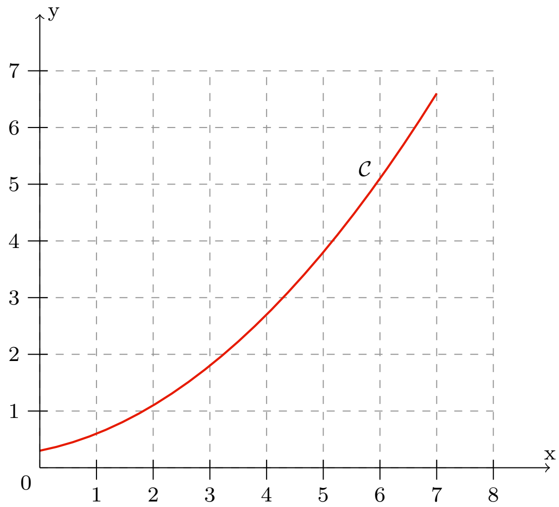
B. Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction coût C est définie sur l'intervalle $[0; 9]$ par $C(x) = 0.2x^2 + 3.2$.

1) Déterminer le montant en euros des coûts lorsque la production est nulle (Cette somme correspond à ce qu'on appelle : "les coûts fixes").
2) On note $B(x)$ le bénéfice lorsque l'entreprise produit et vend x tonnes de produit. Justifier qu'on a $B(x) = -0.2x^2 + 2x - 3.2$.
3) Déterminer la fonction dérivée B' de B sur $[0; 9]$.
4) Étudier le signe de $B'(x)$ et en déduire le tableau de variations de B sur $[0; 9]$.

5) a) Déduire de ce qui précède le bénéfice maximal que l'entreprise peut réaliser, en précisant la production journalière correspondante.

b) Comment retrouver graphiquement le résultat de la question précédente ?

Exercice 2. Un artisan frabrique des objets. Il ne peut pas en produire plus de 70 par semaine. On suppose que tout objet fabriqué est vendu. Le coût de production de x dizaines d'objets, en milliers d'euros, est modélisé par la fonction f, définie sur l'intervalle [0; 7]. Voici sa courbe représentative :



1) a) Par lecture graphique, donner le coût de production de 50 objets.

b) Par lecture graphique, donner le nombre d'objets produits pour un coût de 3 000 euros ?

2) Chaque objet est vendu 80 euros. On note $g(x)$ la recette obtenue par la vente de x dizaines d'objets, en milliers d'euros.

a) Justifier que $g(x) = 0.8\,x$.

b) Tracer dans le repère de l'annexe le droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 0.8\,x$.

c) Par lecture graphique, déterminer à quel intervalle doit appartenir x pour que l'artisan réalise un bénéfice.

3) On admet que la fonction f est définie sur [0; 7] par $f(x) = 0.1x^2 + 0.2x + 0.3$.
On note $B(x)$ le bénéfice réalisé par la production et la vente de x objets.

a) Montrer que $B(x) = -0.1x^2 + 0.6x - 0.3$.

b) Calculer B' la dérivée de la fonction bénéfice B.

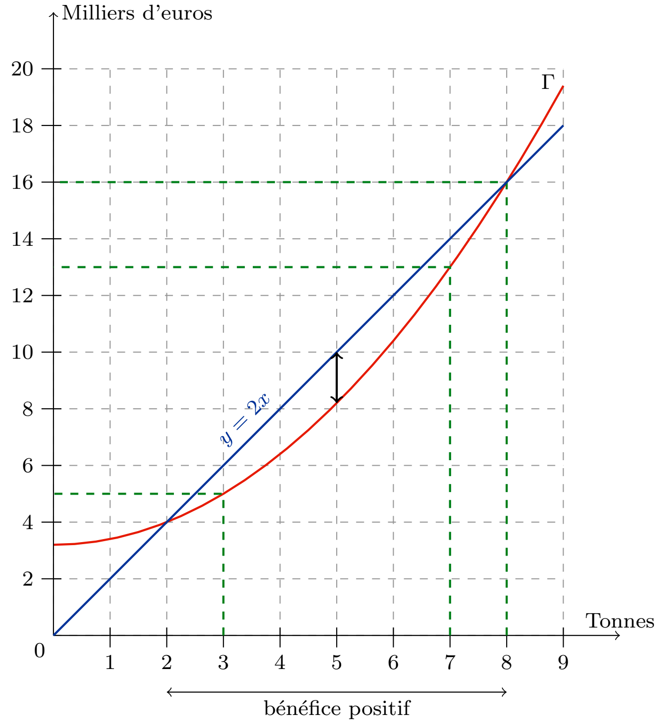
c) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Pour quel nombre d'objets fabriqués et vendus le bénéfice est-il maximal ?

Devoir maison 3 : Dérivation

corrigé

Exercice 1. Une entreprise fabrique et commercialise un produit chimique. La capacité de production est limitée à 9 tonnes par jour.
On note $C(x)$ le coût total en milliers d'euros pour fabriquer C sur l'intervalle $[0; 9]$. Ce produit est vendu 2 000 euros la tonne, ainsi la recette en milliers d'euros obtenue en vendant x tonnes de ce produit est $R(x) = 2\,x$ milliers d'euros.

A. Voici la courbe représentive Γ de la fonction coût C :



1) Par lecture graphique,
   a) le coût de fabrication pour une production journalière de 3 tonnes est de 5 000 euros.
   b) la production journalière correspondant à un coût de fabrication de 13 000 euros est de 7 tonnes.
   c) le coût de fabrication n'excède pas 16 000 euros lorsqu'on produit moins de 8 tonnes.
2) (Tracer sur l'annexe, à reproduire, la droite Δ d'équation $y = 2x$.)
3) Graphiquement, il faut choisir la quantité x produite et vendu pour que l'entreprise soit bénéficiaire dans l'intervalle $[2; 8]$.

B. Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction coût C est définie sur l'intervalle $[0; 9]$ par $C(x) = 0.2x^2 + 3.2$.

1) Le montant en euros des coûts lorsque la production est nulle est $C(0) = 3.2$ milliers d'euros (Cette somme correspond à ce qu'on appelle : "les coûts fixes").
2) On note $B(x)$ le bénéfice lorsque l'entreprise produit et vend x tonnes de produit. Alors, $B(x) = R(x) - C(x) = -0.2x^2 + 2x - 3.2$.

3) La fonction dérivée B' de B sur $[0; 9]$ est définie par

$$B'(x) = -0.2 \times 2x + 2 = -0.4x + 2$$

4) La fonction $B'(x)$ est affine de coefficient directeur -0.4 négatif et

$$B'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -0.4x + 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{-2}{-0.4} = 5.$$

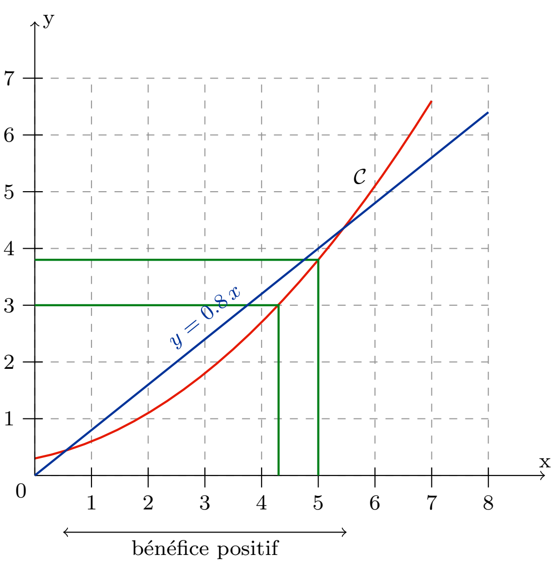
Ainsi, $B'(x)$ est positif lorsque $x \leq 5$ et négatif sinon. On en déduit le tableau de variations de B sur $[0; 9]$:

x	0		5		9
$B'(x) = -0.4x + 2$		+	0	-	
$B(x) = -0.2x^2 + 2x - 3.2$	-3.2	↗	1.8	↘	-1.4

5) a) De ce qui précède, on déduit que le bénéfice maximal que l'entreprise peut réaliser est de 1 800 euros en produisant et vendant 5 tonnes par jour.

b) On peut retrouver ce fait sur le précédent graphique, en cherchant dans l'intervalle $[2; 8]$, l'endroit où la différence entre $y = 2x$ et Γ est la plus importante.

Exercice 2. Un artisan frabrique des objets. Il ne peut pas en produire plus de 70 par semaine. On suppose que tout objet fabriqué est vendu. Le coût de production de x dizaines d'objets, en milliers d'euros, est modélisé par la fonction f, définie sur l'intervalle $[0; 7]$. Voici sa courbe représentative :



1) a) Par lecture graphique, le coût de production de 50 objets est d'environ 4 milliers d'euros.

b) Par lecture graphique, le nombre d'objets produits pour un coût de 3 000 euros est environ 43.

2) Chaque objet est vendu 80 euros. On note $g(x)$ la recette obtenue par la vente de x dizaines d'objets, en milliers d'euros.

a) Si l'on vend x dizaines d'objets, la recette est $80 \times x \times 10 = 800\,x$ euros soit $g(x) = 0.8\,x$ milliers d'euros.

b) (Tracer dans le repère de l'annexe le droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 0.8\,x$.)

c) Par lecture graphique, pour que l'artisan réalise un bénéfice il doit produire et vendre entre 5 et 55 objets.

3) On admet que la fonction f est définie sur $[0;\,7]$ par $f(x) = 0.1x^2 + 0.2x + 0.3$.
On note $B(x)$ le bénéfice réalisé par la production et la vente de x objets.

a) Alors, pour x dizaines d'objets produits et vendus, le bénéfice est $B(x) = g(x) - f(x) = 0.8x - (0.1x^2 + 0.2x + 0.3) = -0.1x^2 + 0.6x - 0.3$.

b) La dérivée de la fonction bénéfice B est

$$B'(x) = -0.1 \times 2\,x + 0.6 = -0.2x + 0.6$$

c) La fonction $B'(x)$ est affine de coefficient directeur -0.2 négatif et

$$B'(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -0.2x + 0.6 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \frac{-0.6}{-0.2} = 3$$

Ainsi, $B'(x)$ est positif lorsque $x \leq 3$ et négatif sinon. On en déduit le tableau de variation de B sur $[0;\,7]$:

x	0		3		7
$B'(x) = -0.2x + 0.6$		+	0	-	
$B(x) = -0.1x^2 + 0.6x - 0.3$	-0.3	↗	0.6	↘	-1

On en déduit que le bénéfice maximal que l'entreprise peut réaliser est de 600 euros en produisant et vendant 30 objets.

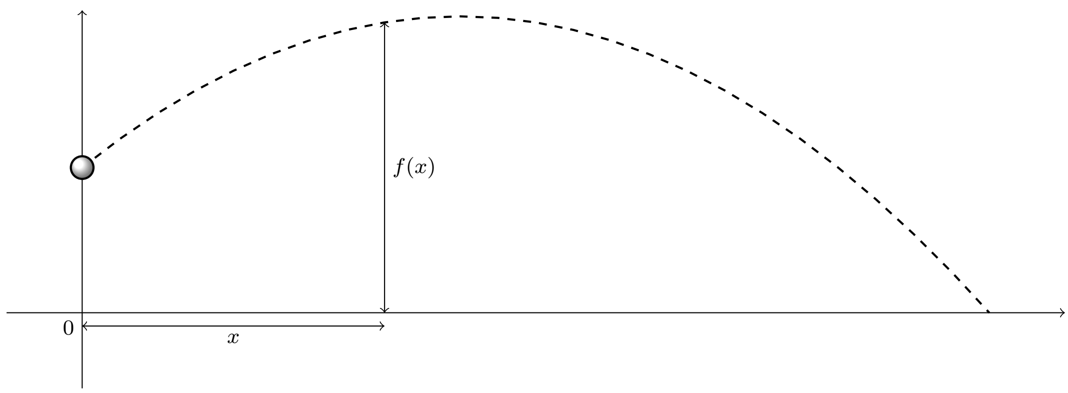
Devoir sur table 7 : Dérivation

jeudi 2 avril 2015

Exercice 1. Déterminer la fonction dérivée f' des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes :

1) $f(x) = x^2 + x + 1$;
2) $f(x) = -0.2x^2 + 3x + 5.2$;
3) $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}$;
4) $f(x) = x - 1$.

Exercice 2. Lors d'une compétition d'athlétisme, un entraîneur analyse la technique d'un lanceur de pois, et plus particulièrement la trajectoire du poids lors du lancer.
On considère la fonction f donnée par : $f(x) = -0.08x^2 + 0.8x + 1.92$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0;\ 12]$.
Cette fonction donne la hauteur (en mètres) du poids en fonction de la variable x (exprimée également en mètres). La variable x mesure la longueur entre les pieds du lanceur et l'ombre au sol du poids (en considérant que cette ombre au sol est projetée verticalement).



1) Compléter la table de valeurs suivante :

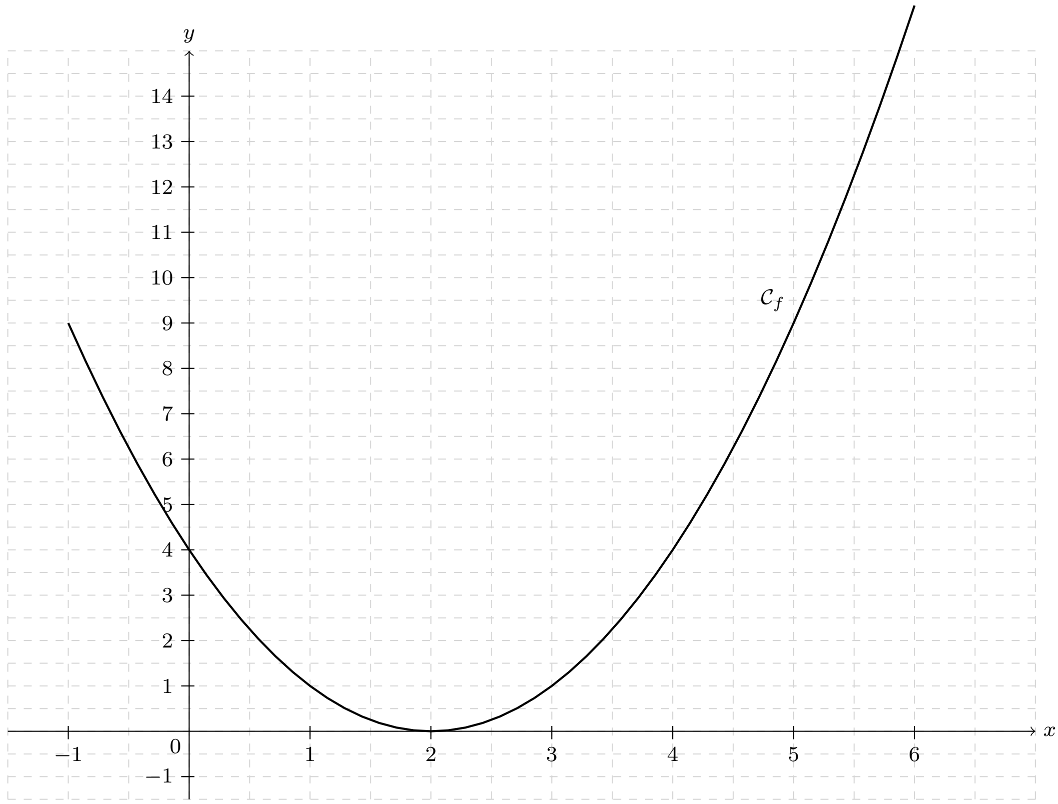
x en mètres	0	1	2	3	5	7	8	9	12
$f(x)$ en mètres									

2) Déterminer f' la fonction dérivée de la fonction f.
3) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
4) En déduire la hauteur maximale atteinte par le poids (au cm près).
5) a) À quoi correspond la (ou les) valeur(s) de x, solution(s) de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[0;\ 12]$?
   b) Quelle est la longueur du lancer ?

Exercice 3. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-1;\ 6]$ par

$$f(x) = x^2 - 4x + 4$$

Voici la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f :



1) Calculer $f(4)$. En déduire que le point $A(4; 4)$ appartient à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$. Placer le point sur la figure précédente.
2) Placer les points $B(3; 0)$ et $C(6, 12)$. Tracer la droite (BC). Que représente la droite (BC) pour la courbe $\mathcal{C}_f$?
3) On considère la droite d d'équation $y = -2x + 3$.
   a) Justifier que le point $D(1; 1)$ appartient à la droite d ainsi qu'à la courbe $\mathcal{C}_f$.
   b) Placer le point D et tracer la droite d.
   c) Que représente la droite d pour la courbe $\mathcal{C}_f$?
4) a) L'axe des abscisses est aussi tangent à la courbe $\mathcal{C}_f$ en un point. Donner l'abscisse de ce point.
   b) En déduire $f'(2)$.
5) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-1; 6]$.

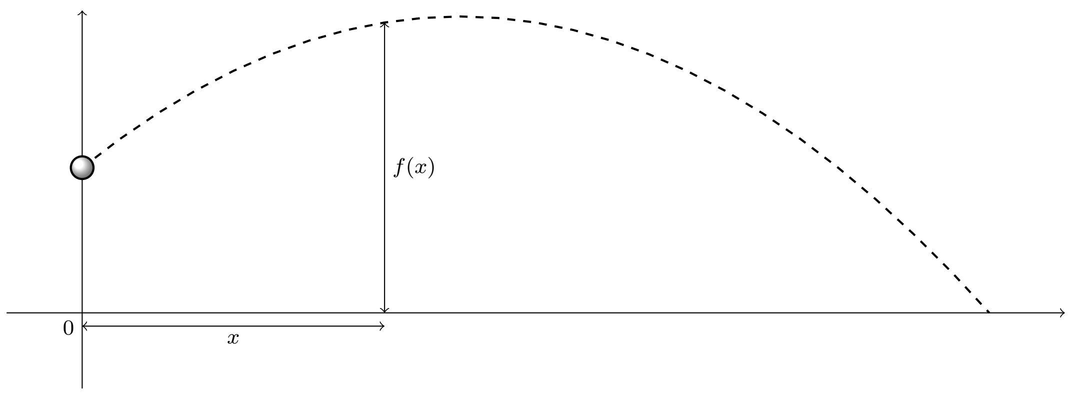
Devoir sur table 7 : Dérivation

corrigé

Exercice 1.

1) Soit $f(x) = x^2 + x + 1$, sa dérivée est $f'(x) = 3x + 1$;
2) Soit $f(x) = -0.2x^2 + 3x + 5.2$, sa dérivée est $f'(x) = -0.2 \times 2x + 3 = -0.4\,x + 3$;
3) Soit $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}$, sa dérivée est $f'(x) = 2x$;
4) Soit $f(x) = x - 1$, sa dérivée est $f'(x) = 1$.

Exercice 2. Lors d'une compétition d'athlétisme, un entraîneur analyse la technique d'un lanceur de pois, et plus particulièrement la trajectoire du poids lors du lancer.
On considère la fonction f donnée par : $f(x) = -0.08x^2 + 0.8x + 1.92$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0; 12]$.
Cette fonction donne la hauteur (en mètres) du poids en fonction de la variable x (exprimée également en mètres). La variable x mesure la longueur entre les pieds du lanceur et l'ombre au sol du poids (en considérant que cette ombre au sol est projetée verticalement).



1) Compléter la table de valeurs suivante :

x en mètres	0	1	2	3	5	7	8	9	12
$f(x)$ en mètres	1.92	2.64	3.2	3.6	3.92	3.6	3.2	2.64	0

2) Le fonction dérivée de la fonction f est définie par $f'(x) = -0.08 \times 2\,x + 0.8 = -0.16\,x + 0.8$.
3) On note que

$$f'(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -0.16\,x + 0.8 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \frac{-0.8}{-0.16} = 5.$$

Le coefficient directeur de la fonction affine $x \mapsto -0.16\,x + 0.8$ est -0.16 et il est négatif. On en déduit le tableau de variation de la fonction f :

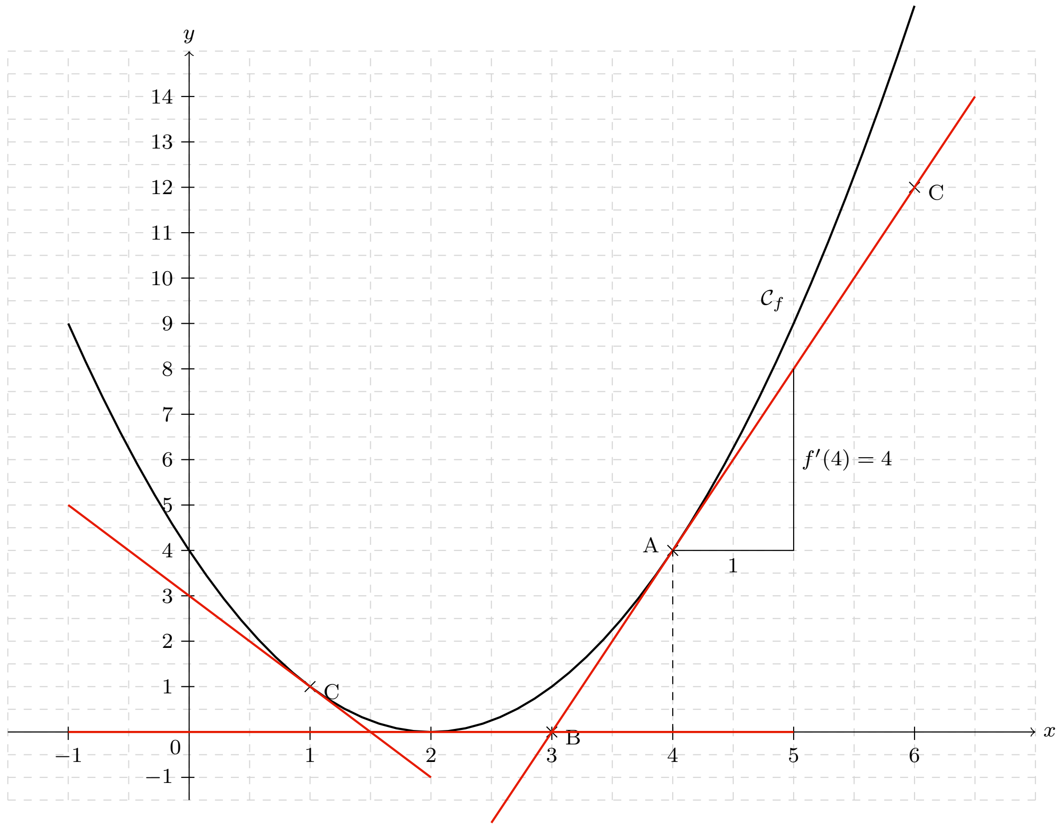
x	0		5		12
$f'(x) = -0.16\,x + 0.8$		+	0	-	
$f(x) = -0.08x^2 + 0.8x + 1.92$	1.92	$\nearrow$	3.92	$\searrow$	0

4) On en déduit que la hauteur maximale atteinte par le poids est de 3.92m au cm près.
5) a) La valeur de x solution de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[0; 12]$ est $x = 12$ est correspond à l'endroit où la hauteur du poids est nulle.
   b) Comme $f(12) = 0$, on déduit que le poids touche le sol à 12m du lanceur d'où la longueur du lancer est de 12m.

Exercice 3. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-1; 6]$ par

$$f(x) = x^2 - 4x + 4$$

Voici la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f :



1) On note que $f(4) = 4^2 - 4 \times 4 + 4 = 4$, d'où le point $A(4; 4)$ appartient à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$.
2) La droite (BC) représente la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ en A.
3) On considère la droite d d'équation $y = -2x + 3$.
   a) On note que $-2 \times 1 + 3 = 1$ et $f(1) = 1^2 - 4 \times 1 + 4 = 1$, donc le point $D(1; 1)$ appartient à la droite d ainsi qu'à la courbe $\mathcal{C}_f$.
   b) (Placer le point D et tracer la droite d.)
   c) La droite d représente la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point D.
4) a) L'axe des abscisses est aussi tangent à la courbe $\mathcal{C}_f$ en un point d'abscisse 2.
   b) Par définition $f'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2. Or l'axe des abscisse est horizontale, son coefficient directeur est nul et donc $f'(2) = 0$.
5) On note que la dérivée de la fonction f est définie par $f'(x) = 2x - 4$. De plus, $f'(x) = 0$ implique $2x - 4 = 0$ c'est-à-dire $x = \frac{4}{2} = 2$. On en déduit le tableau de la fonction f sur l'intervalle $[-1; 6]$:

x	-1		2		6
$f'(x) = 2x - 4$		-	0	+	
$f(x) = x^2 - 4x + 4$	9	$\searrow$	0	$\nearrow$	16