Première ES : Les contrôles et corrigés

O. Lader

Table des matières

Devoir maison 1 : Polynômes et suites numériques

pour le jeudi 7 janvier 2016

Exercice 1 (Évolution de la démographie de France)**.**

	A	B	C
1	Année	Population(en millions d'habitants)	Taux d'évolution
2	2000	58.86	
3	2001	59.27	0.70%
4	2002	59.69	
5	2003	60.10	
6	2004	60.51	
7	2005	60.96	
8	2006	61.40	
9	2007	61.80	
10	2008	62.13	
11	2009	62.47	

1. Recopier le tableau dans un tableur.
2. Dans la cellule C3, parmis les formules suivantes, lesquelles donnent le bon résultat ?
   - `=B3 - B2 / B2`
   - `=(B3 - B2) / B2`
   - `=(B2 - B3) / B3`
   - `=(B3 - $B2) / $B2`
   - `=(B3 - $B$2) / $B$2`
   - `=(B3 - B$2) / B$2`

   Justifier.
   Pour afficher les taux d'évolution sous la forme d'un pourcentage dans le tableur, il suffit de les sélectionner, clic droit, formater les cellules et dans la rubrique Nombres, choisir Pourcentage et sélectionner l'un des Formats proposés.
3. Ensuite parmis les formules identifiés comme juste dans la question précédente, lesquelles permettent de compléter le tableau en copiant la cellule C3 vers le bas ? Justifier.
4. Compléter votre tableau sur le tableur.
5. Tracer, avec le tableur, le graphe avec en abscisse les années et en ordonnée la taille de la population française.
   Pour tracer le graphe, il faut sélectionner les données des deux premières colonnes, ensuite dans le menu, insertion/diagramme, puis sélectionner le type de diagramme : XY (dispersion) et valider.
6. Tracer, avec le tableur, le graphe avec en abscisse les années et en ordonnée les taux d'évolution.
7. Interpréter la différence de variations entre les deux graphiques.
8. Calculer le taux d'évolution global d'augmentation de la population française de 2000 à 2009 arrondi à 0.01% près.
9. Imprimer le résultat ou me l'envoyer à l'adresse : `Olivier.Lader@ac-strasbourg.fr`

Exercice 2. Le loyer d'une personne est de 600 euros la première année et on suppose qu'il augmente tous les ans de 5 euros.

1. Calculer le montant du loyer lors de la 2, 3, 4, 5 et 10ème année ?
2. Quel est le montant du loyer lors de la n-ème année ?

Exercice 3. Un objet coûte 104.5 euros. On fait une remise de 26% sur le prix.

1. Combien coûte l'objet après remise.
2. Supposons qu'après la remise de 26%, on augmente à nouveau le prix de 26%, combien vaut alors l'objet ?
3. Soit p% le pourcentage d'augmentation pour revenir au prix de départ.
   a) Justifier qu'on a l'équation :
   $$(1-0.26)\times(1+\frac{p}{100})=1$$
   b) En déduire que
   $$\frac{p}{100}=\frac{1}{1-0.26}-1$$
   et déterminer p à 10^{-2} près.

Devoir maison 1 : Polynômes et suites numériques

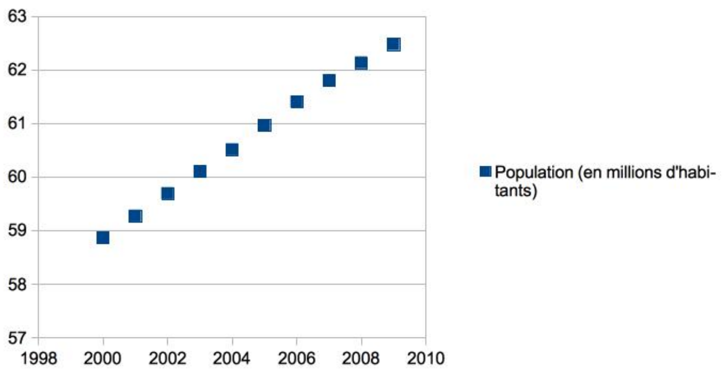
corrigé

Exercice 1 (Évolution de la démographie de France)**.**

	A	B	C
1	Année	Population(en millions d'habitants)	Taux d'évolution
2	2000	58.86	
3	2001	59.27	0.70%
4	2002	59.69	0.71%
5	2003	60.10	0.69%
6	2004	60.51	0.68%
7	2005	60.96	0.74%
8	2006	61.40	0.72%
9	2007	61.80	0.65%
10	2008	62.13	0.53%
11	2009	62.47	0.55%

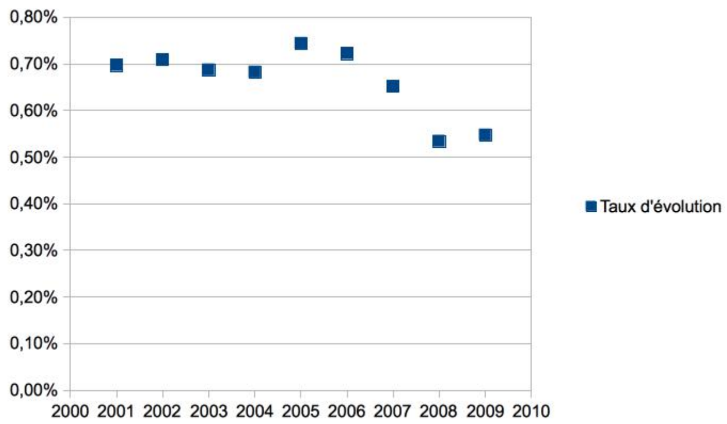
1. (Recopier le tableau dans un tableur.)
2. Dans la cellule C3, parmis les formules suivantes, lesquelles donnent le bon résultat ?
   - ~~`=B3 - B2 / B2`~~ **Il faut faire attention aux parenthèses !**
   - `=(B3 - B2) / B2`
   - ~~`=(B2 - B3) / B3`~~ **Il ne faut pas confondre la valeur de départ et la valeur d'arrivée !**
   - `=(B3 - $B2) / $B2`
   - `=(B3 - $B$2) / $B$2`
   - `=(B3 - B$2) / B$2`

   Pour afficher les taux d'évolution sous la forme d'un pourcentage dans le tableur, il suffit de les sélectionner, clic droit, formater les cellules et dans la rubrique Nombres, choisir Pourcentage et sélectionner l'un des Formats proposés.
3. Ensuite parmis les formules identifiés comme juste dans la question précédente, lesquelles permettent de compléter le tableau en copiant la cellule C3 vers le bas ?
   - `=(B3 - B2) / B2`
   - `=(B3 - $B2) / $B2`
   - ~~`=(B3 - $B$2) / $B$2`~~ **Il ne faut pas fixer l'indice de ligne avec le symbole $**
   - ~~`=(B3 - B$2) / B$2`~~ **Idem ! Il ne faut pas fixer l'indice de ligne avec le symbole $**
4. (Compléter votre tableau sur le tableur.)
5. Tracer, avec le tableur, le graphe avec en abscisse les années et en ordonnée la taille de la population française.



Pour tracer le graphe, il faut sélectionner les données des deux premières colonnes, ensuite dans le menu, insertion/diagramme, puis sélectionner le type de diagramme : XY (dispersion) et valider.

6. Tracer, avec le tableur, le graphe avec en abscisse les années et en ordonnée les taux d'évolution.



7. Le premier graphe montre bien l'augmentation continue de la population entre 2000 et 2009. Le graphe suggère qu'elle est très régulière (voir linéaire). Mais, en obsevant les taux d'évolution avec le second graphe, on se rend compte que les évolutions ne sont pas toujours les même. À partir de 2007, la vitesse d'augmentation diminue considérablement.
8. Le taux d'évolution global d'augmentation de la population française de 2000 à 2009 arrondi à 0.01% près est de
$$T = \frac{62.47 - 58.86}{58.86} \simeq 0.0613 \simeq 6.13\%$$

Exercice 2. Le loyer d'une personne est de 600 euros la première année et on suppose qu'il augmente tous les ans de 5 euros.

1. Le montant du loyer lors 2, 3, 4, 5 et 10 année est 605, 610, 615, 620 et 645 euros respectivement.
2. Le montant du loyer lors de la n-ème année est $600 + (n-1) \times 5 = 595 + 5n$.

Exercice 3. Un objet coûte 104.5 euros. On fait une remise de 26% sur le prix.

1. L'objet coûte $104.5 \times (1 - \frac{26}{100}) = 104.5 \times 0.74 = 77.33$ euros après remise.
2. Supposons qu'après la remise de 26%, on augmente à nouveau le prix de 26%, l'objet vaut alors
$$77.33 \times (1 + \frac{26}{100}) = 77.33 \times 1.26 = 104.5 \times 0.74 \times 1.26 \simeq 97.44 \neq 104.5$$

On note qu'**une augmentation de 26% ne permet pas de revenir au prix de départ !**

3. Soit $p\%$ le pourcentage d'augmentation pour revenir au prix de départ.
   a) On a alors

$$104.5 \times (1 - 0.26) \times (1 + \frac{p}{100}) = 105.5 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (1 - 0.26) \times (1 + \frac{p}{100}) = 1$$

   b) D'où

$$1 + \frac{p}{100} = \frac{1}{(1 - 0.26)} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{p}{100} = \frac{1}{1 - 0.26} - 1 \simeq 0.3514$$

   D'où, une augmentation de 35.14% après une diminution de 26% permet de revenir au prix de départ.

Devoir sur table 1 : Polynômes et statistiques

jeudi 17 décembre 2016

Exercice 1. Dans un lycée on étudie les moyennes trimestrielles du premier trimestre de deux classes appelées respectivement Jaune et Rouge.

Partie A Les élèves de la classe Jaune ont obtenu les moyennes trimestrielles suivantes au premier trimestre :

3; 4; 5; 7; 7; 10; 10; 10; 10; 10; 11; 11; 12; 12; 12; 12; 12; 13; 13; 13; 14; 15; 16; 18

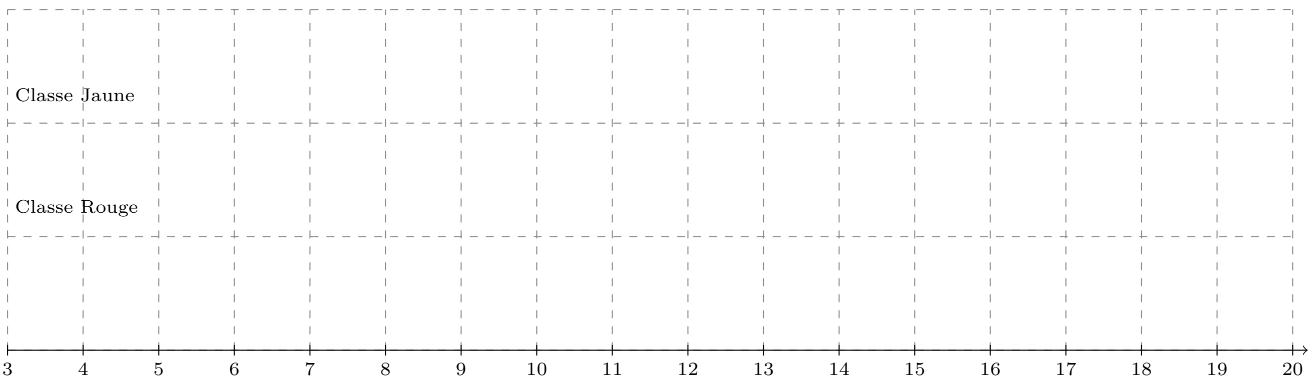
La moyenne trimestrielle de la classe s'obtient à partir des notes moyennes de chaque élève.

1. Déterminer la médiane Me, le premier quartile Q_1 et le troisième quartile Q_3 de cette série statistique de moyennes trimestrielles.
2. Représenter, sur l'annexe, le diagramme en boîte correspondant en faisant apparaître les valeurs extrêmes.
3. Calculer la moyenne et l'écart type trimestrielle de la classe Jaune.

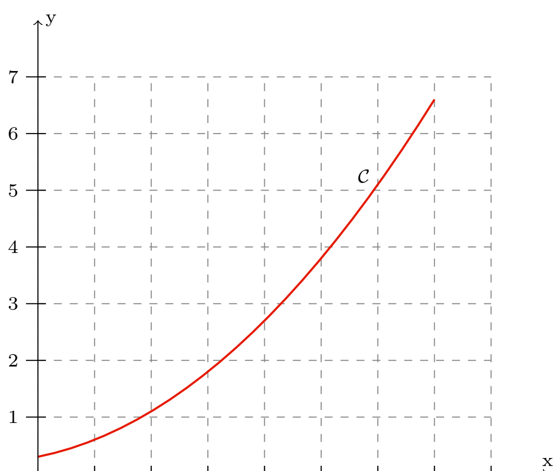
Partie B Les indicateurs de la classe Rouge permettant de résumer la série statistique des moyennes du premier trimestre sont les suivants : Minimum 3 ; premier quartile $Q'_1 = 8$; médiane $Med = 10$; troisième quartile $Q'_3 = 12$; maximum 17.

1. Représenter, sur l'annexe, le diagramme en boîte correspondant.
2. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, fausses ou indécidables ? (indécidable signifie qu'on ne peut pas conclure avec les éléments connus.)
   Justifier votre réponse dans chacun des cas.
   a) 50% des élèves de la classe Rouge ont une note comprise entre 10 et 12.
   b) 75% des élèves de la classe Rouge ont une note inférieure ou égale à 12.
   c) Au moins 50% des élèves de la classe Rouge ont une note inférieure ou égale à la note médiane de la série de la classe Jaune.

Annexe :



Exercice 2. Un artisan frabrique des objets. Il ne peut pas en produire plus de 70 par semaine. On suppose que tout objet fabriqué est vendu. Le coût de production de x dizaines d'objets, en milliers d'euros, est modélisé par la fonction f, définie sur l'intervalle [0; 7]. Voici sa courbe représentative :



1. a) Par lecture graphique, donner le coût de

production de 50 objets.

b) Par lecture graphique, donner le nombre d'objets produits pour un coût de 3 000 euros ?

2. Chaque objet est vendu 80 euros. On note $g(x)$ la recette obtenue par la vente de x dizaines d'objets, en milliers d'euros.
   a) Justifier que $g(x) = 0.8\,x$.
   b) Tracer dans le repère de l'annexe le droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 0.8\,x$.
   c) Par lecture graphique, déterminer à quel intervalle doit appartenir x pour que l'artisan réalise un bénéfice.
3. On admet que la fonction f est définie sur $[0; 7]$ par $f(x) = 0.1x^2 + 0.2x + 0.3$.
   On note $B(x)$ le bénéfice réalisé par la production et la vente de x objets.
   a) Montrer que $B(x) = -0.1x^2 + 0.6x - 0.3$.
   b) Dresser le tableau de variation de la fonction B.

   Dans les questions suivantes, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

   c) Combien d'objets l'artisan peut-il fabriquer et vendre pour réaliser un bénéfice (positif) ?
   d) Pour quel nombre d'objets fabriqués et vendus le bénéfice est-il maximal ?

Exercice 3. Lors de la dernière session d'un examen, on a pris un échantillon de trente copies parmi celles des candidats aux épreuves $n°$ 1, 2, 3. Les résultats figurent dans le tableau suivant :

	Effectifs des copies		
Notes sur 20	Épreuve 1	Épreuve 2	Épreuve 3
5	0	3	0
6	6	0	0
7	5	5	2
8	8	0	1
9	1	8	6
10	3	0	3
11	0	3	5
12	2	4	0
13	0	0	2
14	1	1	6
15	2	4	3
16	2	2	2

Déterminer, pour chacune des trois épreuves, la moyenne et l'écart type des notes. Quelle est l'épreuve qui a été la mieux réussie ? Quelle est celle dont les résultats ont été les plus homogènes ?

Devoir sur table 1 : Polynômes et statistiques

corrigé

Exercice 1. Dans un lycée on étudie les moyennes trimestrielles du premier trimestre de deux classes appelées respectivement Jaune et Rouge.

Partie A Les élèves de la classe Jaune ont obtenu les moyennes trimestrielles suivantes au premier trimestre :

3; 4; 5; 7; 7; 10; 10; 10; 10; 10; 11; 11; 12; 12; 12; 12; 12; 13; 13; 13; 14; 15; 16; 18

La moyenne trimestrielle de la classe s'obtient à partir des notes moyennes de chaque élève.

1.5 pt 1. La médiane est de 11,5, le premier quartiele $Q_1 = 10$ et le troisième quartile $Q_3 = 13$.

1 pt 2. (Représenter, sur l'annexe, le diagramme en boîte correspondant en faisant apparaître les valeurs extrêmes.)

1 pt 3. La moyenne est de $\bar{x} \simeq 10.83$ et l'écart type est de $\sigma \simeq 3.54$ pour la classe Jaune.

Partie B Les indicateurs de la classe Rouge permettant de résumer la série statistique des moyennes du premier trimestre sont les suivants : Minimum 3 ; premier quartile $Q'_1 = 8$; médiane $Med = 10$; troisième quartile $Q'_3 = 12$; maximum 17.

1 pt 1. (Représenter, sur l'annexe, le diagramme en boîte correspondant.)

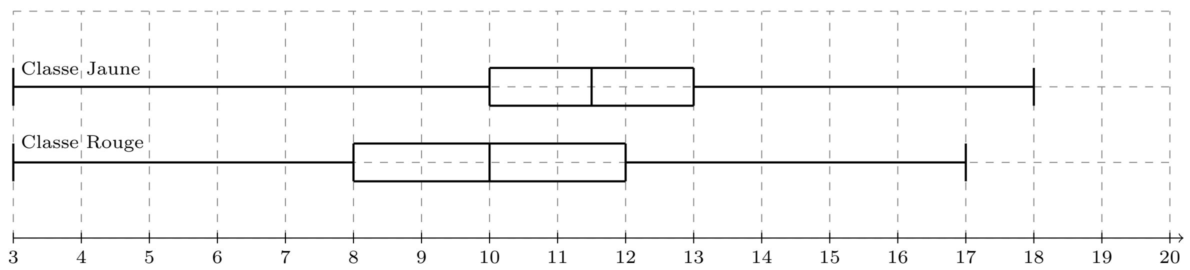
2. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, fausses ou indécidables ? (indécidable signifie qu'on ne peut pas conclure avec les éléments connus.)

1.5 pt a) 50% des élèves de la classe Rouge ont une note comprise entre 10 et 12. **Indécidable.** Entre la mediane 10 et le troisième quartile 12, il y a environ 25% de l'effectif mais dans certains cas il peut bien y avoir 50% de l'effectif total.

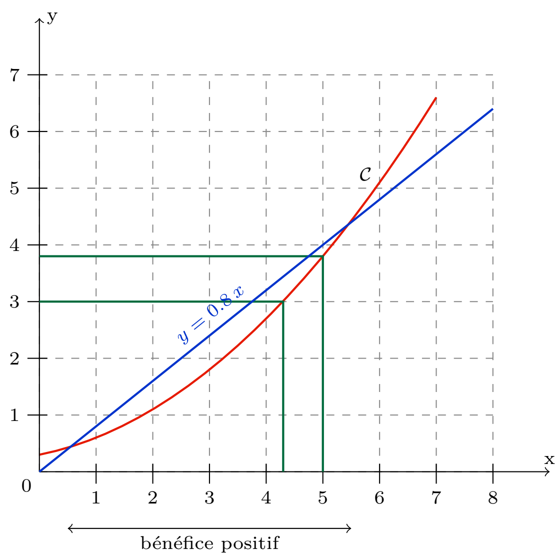
1.5 pt b) 75% des élèves de la classe Rouge ont une note inférieure ou égale à 12. **Vraie.** Le troisième quartile Q_3 est égal à 12.

1.5 pt c) Au moins 50% des élèves de la classe Rouge ont une note inférieure ou égale à la note médiane de la série de la classe Jaune. **Vraie.** La médiane de la classe rouge est de 10 qui est inférieur à la médiane de la classe jaune qui vaut 11.5.

Annexe :



Exercice 2. Un artisan frabrique des objets. Il ne peut pas en produire plus de 70 par semaine. On suppose que tout objet fabriqué est vendu. Le coût de production de x dizaines d'objets, en milliers d'euros, est modélisé par la fonction f, définie sur l'intervalle [0; 7]. Voici sa courbe représentative :



1 pt 1. a) Par lecture graphique, le coût de production de 50 objets est d'environ 4 milliers d'euros.

1 pt b) Par lecture graphique, le nombre d'objets produits pour un coût de 3 000 euros est environ 43.

2. Chaque objet est vendu 80 euros. On note $g(x)$ la recette obtenue par la vente de x dizaines d'objets, en milliers d'euros.

1 pt a) Si l'on vend x dizaines d'objets, la recette est $80 \times x \times 10 = 800\,x$ euros soit $g(x) = 0.8\,x$ milliers d'euros.

1 pt b) (Tracer dans le repère de l'annexe le droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 0.8\,x$.)

1 pt c) Par lecture graphique, pour que l'artisan réalise un bénéfice il doit produire et vendre entre 5 et 55 objets.

3. On admet que la fonction f est définie sur $[0; 7]$ par $f(x) = 0.1x^2 + 0.2x + 0.3$.
On note $B(x)$ le bénéfice réalisé par la production et la vente de x objets.

1 pt a) Alors, pour x dizaines d'objets produits et vendus, le bénéfice est $B(x) = g(x) - f(x) = 0.8x - (0.1x^2 + 0.2x + 0.3) = -0.1x^2 + 0.6x - 0.3$.

2 pt b) La fonction $B(x)$ est un polynôme du second degré. La courbe représentative de la fonction B est une parabole orienté vers le bas, car son coefficient dominant $a = -0.1$ est négatif. L'abscisse du sommet de la parabole est $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-0.6}{2\times(-0.1)} = 3$. On en déduit le tableau de variation de B sur $[0; 7]$:

x	0		3		7
$B(x) = -0.1x^2 + 0.6x - 0.3$	-0.3	↗	0.6	↘	-1

Dans les questions suivantes, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

+1 pt c) Commençons par résoudre l'équation du second degré $-0.1x^2 + 0.6x - 0.3 = 0$: Le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 0.6^2 - 4 \times (-0.1) \times (-0.3) = 0.24$, ainsi, il y a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-0.6 - \sqrt{0.24}}{2 \times (-0.1)} = 3 + \sqrt{6} \simeq 5.5 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \simeq 0.6$$

On peut ajouter ces données au précédent tableau de variation de la fonction bénéfice :

x	0		0.6		3		5.5		7
$B(x) = -0.1x^2 + 0.6x - 0.3$	-0.3	↗ $-$	0	$+$ ↗	0.6	↘ $+$	0	$-$ ↘	-1

L'artisan peut fabriquer et vendre entre $0.6 \times 10 = 6$ et $5.5 \times 10 = 55$ objets pour réaliser un bénéfice.

+0.5 pt d) D'après le tableau de variation de la fonction bénéfice B, le bénéfice maximal que l'entreprise peut réaliser est de $0.6 \times 1000 = 600$ euros en produisant et vendant $3 \times 10 = 30$ objets.

3 pt **Exercice 3.** Lors de la dernière session d'un examen, on a pris un échantillon de trente copies parmi celles des candidats aux épreuves $n°$ 1, 2, 3. Les résultats figurent dans le tableau suivant :

	Effectifs des copies		
Notes sur 20	Épreuve 1	Épreuve 2	Épreuve 3
5	0	3	0
6	6	0	0
7	5	5	2
8	8	0	1
9	1	8	6
10	3	0	3
11	0	3	5
12	2	4	0
13	0	0	2
14	1	1	6
15	2	4	3
16	2	2	2

Déterminons, pour chacune des trois épreuves, la moyenne et l'écart type des notes.

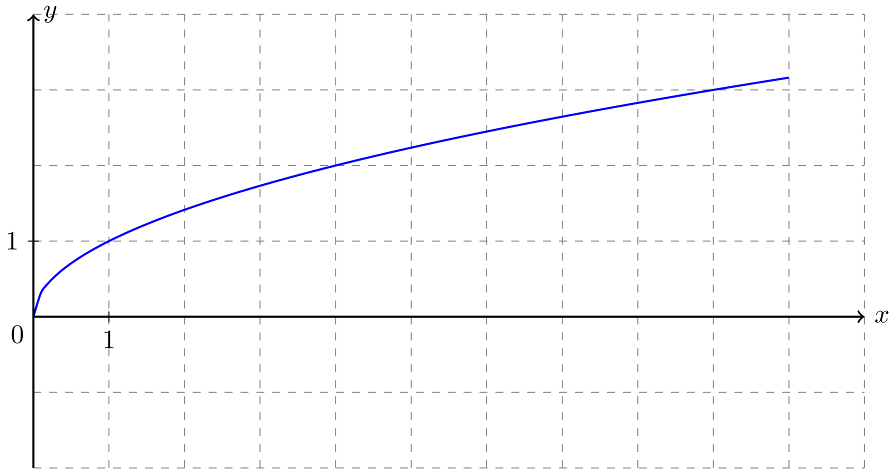
Épreuve	Moyenne $\bar{x}$	Écart-type σ
1	9.13	3.15
2	10.3	3.33
3	11.6	2.69

L'épreuve qui a été la mieux réussie en moyenne est l'épreuve 3. Celle dont les résultats ont été les plus homogènes est l'épreuve 3 car son écart-type est le plus faible comparer aux autres.

Activité notée : Fonctions de référence (sujet A)

jeudi 21 janvier 2016

Exercice 1. Soit f la fonction racine carrée :



1. Rappeler les variations de la fonction f sur $[0; +\infty[$.
2. Donner un encadrement de $f(x)$ pour x élément de l'intervalle $[4; 8]$.
3. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 3$.
4. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) \leq 3$.
5. Intersection de deux courbes : On considère la droite d'équation $y = \frac{3}{4}x - 1$.
   a) Compléter le tableau suivant :

x	0	5
$y = \frac{3}{4}x - 1$		

   b) Tracer la droite d'équation $y = \frac{3}{4}x - 1$ sur le précédent graphique.
   c) Résoudre graphiquement l'équation $\sqrt{x} = \frac{3}{4}x - 1$.

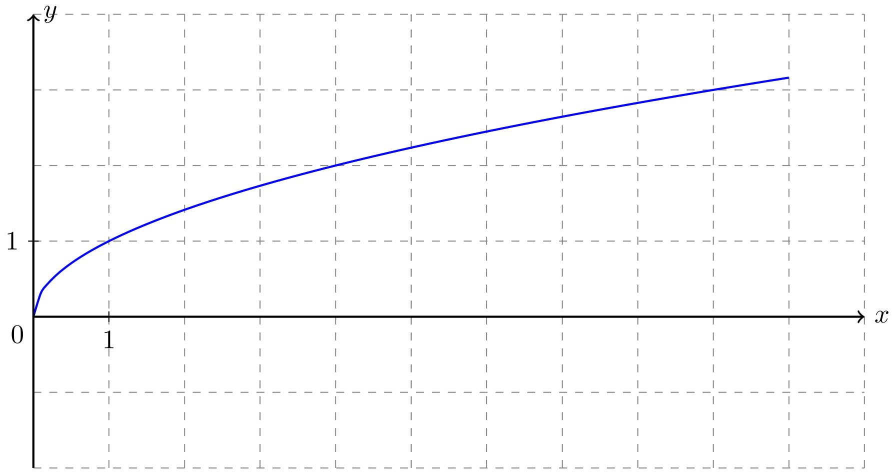
Exercice 2. Soit $f : [-3; 5] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^3 - 6x + 1$.

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer les variations de la fonction f sur $[-3; 5]$.
2. Les antécédents de 6 :
   a) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 0,01 des solutions de $f(x) = 6$.
   b) Développer l'expression $(x + 1)(x^2 - x - 5)$.
   c) En déduire que $f(x) = 6$ si et seulement si $(x + 1)(x^2 - x - 5) = 0$.
   d) Résoudre l'équation du second degré $x^2 - x - 5 = 0$.
   e) Donner une valeur exacte des antécédents de 6 par la fonction f.

Activité notée : Fonctions de référence (sujet B)

jeudi 21 janvier 2016

Exercice 1. Soit f la fonction racine carrée :



1. Rappeler les variations de la fonction f sur $[0; +\infty[$.
2. Donner un encadrement de $f(x)$ pour x élément de l'intervalle $[3; 9]$.
3. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 5$.
4. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) \leq 5$.
5. Intersection de deux courbes : On considère la droite d'équation $y = -\frac{1}{4}x + 3$.
   a) Compléter le tableau suivant :

x	0	5
$y = -\frac{1}{4}x + 3$		

   b) Tracer la droite d'équation $y = -\frac{1}{4}x + 3$ sur le précédent graphique.
   c) Résoudre graphiquement l'équation $\sqrt{x} = -\frac{1}{4}x + 3$.

Exercice 2. Soit $f : [-3; 5] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^3 - 8x + 1$.

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer les variations de la fonction f sur $[-3; 5]$.
2. Les antécédents de -6 :
   a) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 0,01 des solutions de $f(x) = 8$.
   b) Développer l'expression $(x + 1)(x^2 - x - 7)$.
   c) En déduire que $f(x) = 6$ si et seulement si $(x + 1)(x^2 - x - 7) = 0$.
   d) Résoudre l'équation du second degré $x^2 - x - 7 = 0$.
   e) Donner une valeur exacte des antécédents de 8 par la fonction f.

Devoir sur table 2 : Suites numériques, fonctions de références, probabilités

lundi 1 février 2016

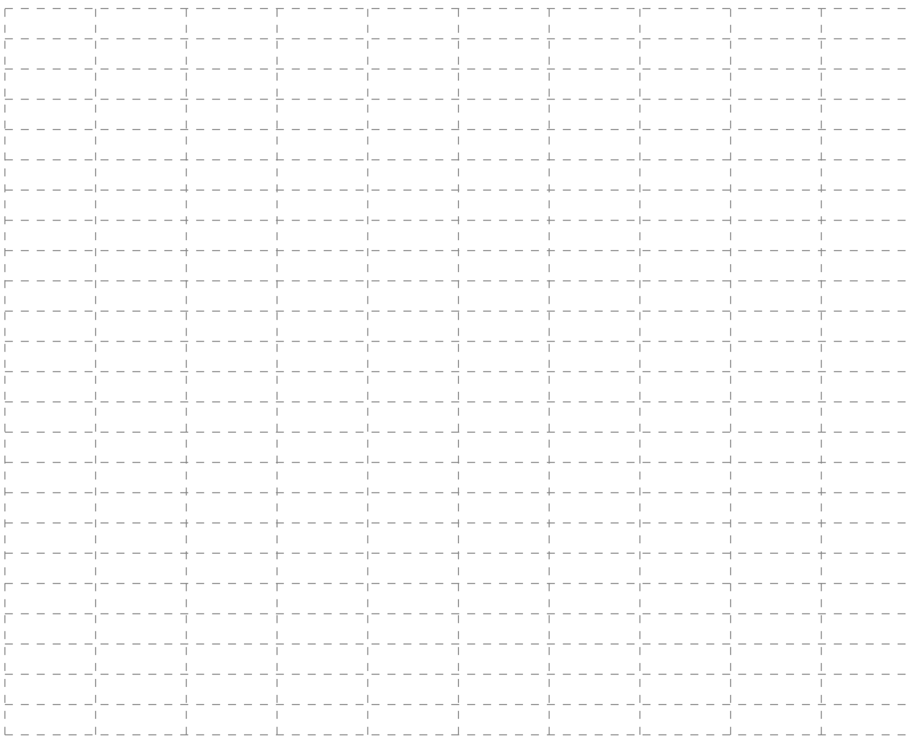
Exercice 1. Soit $f : [-3; 5] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x + \frac{14}{3}.$$

1. Compléter la table de f :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$									

2. À l'aide du cadrillage ci-dessous, tracer un repère et la courbe représentative de la fonction f.



3. Conjecturer le tableau de variation de la fonction f.
4. On cherche à déterminer les antécédents de $\frac{14}{3}$ par f.
   a) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = \frac{14}{3}$.
   b) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{14}{3}$ équivaut à $x(x^2 - 3x - 6) = 0$.
   c) En déduire les valeurs exactes des antécédents de $\frac{14}{3}$.
5. On considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -3x + 5$
   a) Tracer la droite $\mathcal{D}$ sur la figure précédente.
   b) Qu'observez-vous ?

Exercice 2. La société Vélibre, spécialisée dans la location de vélos, a été créée en janvier 2010 avec un parc de 150 vélos neufs. Afin de conserver un parc en bonne qualité, le directeur de la société a décidé :

- de racheter 40 vélos neufs en janvier de chaque année ;
- de vendre 20% des vélos en janvier 2011 et en janvier 2012 ;
- de revendre 20% au moins des vélos les plus usagés en janvier de chaque année suivante.

Pour tout entier naturel n, on modélise le nombre approximatif de vélos du parc en janvier de l'année $(2010+n)$ par le terme u_n. En particulier, $u_0 = 150$.

1. Calculer u_1 et u_2 correspondant au nombre de vélos du parc en janvier de l'année 2011 et 2012 respectivement.
2. Justifier que s'il continue à vendre exactement 20% des vélos les plus usagés en janvier de chaque année suivante, on a la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = 0.8\,u_n + 40$$

3. Compléter l'algorithme suivant pour qu'il permette de calculer et d'afficher les termes de u_0 à u_{20} de la suite numérique (u_n).

```
Variables :
U est un nombre réel
n est un entier.
Traitement :
U prend la valeur ____
Afficher U
Pour n allant de 1 à ____ faire
    U prend la valeur ____________
    Afficher U
Fin Pour
```

4. À l'aide de la calculatrice, calculer les 20 premiers termes de la suite et les noter sur votre copie.
5. La municipalité prévoit d'implanter de nouvelles bornes dans la ville afin d'offrir aux usagers 250 vélos. La société Vélibre pourra-t-elle satisfaire cette demande d'ici quelques années ?

Exercice 3. Quatre candidats A, B, C et D se présentent à une élection régionale.
Avant le scrutin, on a interrogé 1 000 personnes âgées de 18 à 90 ans s'étant prononcées sur leur intention de vote et ayant communiqué leur tranche d'âge.
On a obtenu le tableau incomplet de répartition suivant :

Candidat / Âge	A	B	C	D	Total
[18,30[	100	50	30	20	
[30,50[	150	50	20		300
[50,90[	50	300		100	
Total		400	100	200	1 000

1. Compléter le tableau.
2. Quel est l'âge moyen des personnes interrogées qui ont l'intention de voter pour le candidat B ? *On prendra les centres des classes d'âge pour effectuer le calcul.*
3. Combien y a-t-il de personnes qui ont choisi de voter pour A ?
4. Combien y a-t-il de personnes de plus de 50 ans qui ont choisi de voter pour A ?
5. On choisit au hasard une des 1 000 personnes interrogées et on considère les deux événements suivants :
   - E : “la personne choisie appartient à la tranche d'âge [18; 30[" ;
   - F : "la personne choisie a voté pour le candidat B".

   On donnera tous les résultats sous forme décimale.

   a) Calculer la probabilité des deux événements E et F.
   b) Traduire par une phrase l'événement $\bar{F}$ et calculer sa probabilité.
   c) Traduire par une phrase l'événement $E \cap \bar{F}$ et calculer sa probabilité.
   d) En déduire $\mathbb{P}(E \cup \bar{F})$.
6. On choisit au hasard une personne dans la tranche d'âge [18; 30[.
   Quelle est la probabilité que la personne choisie n'ait pas voté pour le candidat B ?

Devoir sur table 2 : Suites numériques, fonctions de références, probabilités

corrigé

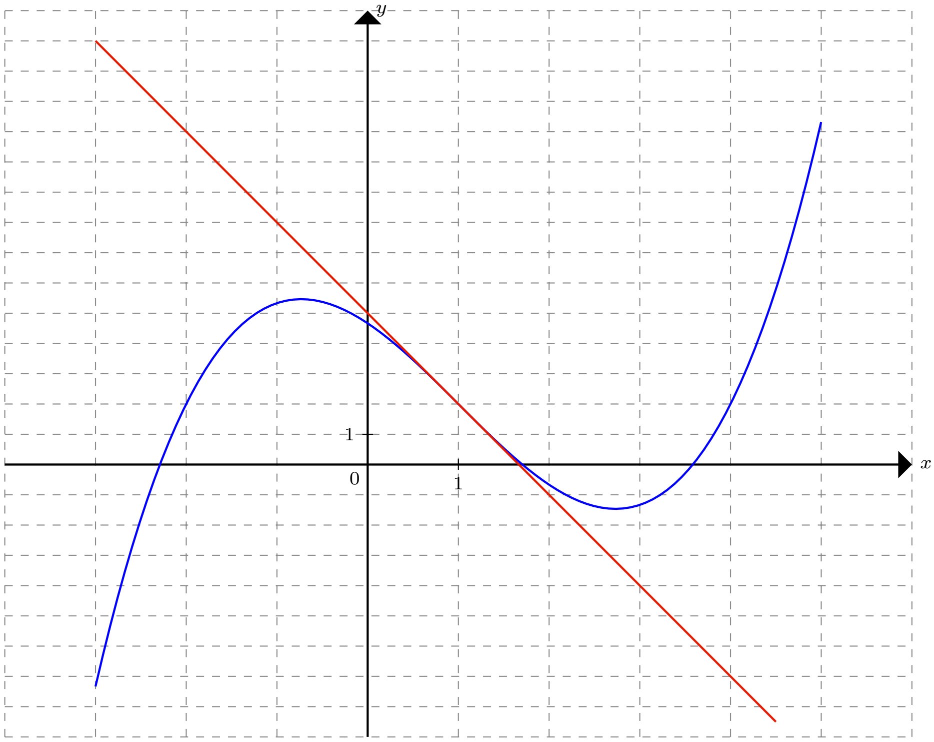
Exercice 1. Soit $f : [-3; 5] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x + \frac{14}{3}.$$

1. Compléter la table de f :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-7.33	2	5.33	5.67	2	-0.67	-1.33	2	11.33

2. À l'aide du cadrillage ci-dessous, tracer un repère et la courbe représentative de la fonction f.



3. Le tableau de variation de la fonction f :

x	-3	-0.74	2.76	5
$f(x)$	-7.33 ↗	5.46 ↘	-1.46 ↗	11.33

4. On cherche à déterminer les antécédents de $\frac{14}{3}$ par f.
   a) Graphiquement l'équation $f(x) = \frac{14}{3}$ admet 3 solutions $x_1 \simeq -1.35$, $x_2 \simeq 0$ et $x_3 \simeq 4.35$.
   b) On note que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{14}{3} \\ \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x + \frac{14}{3} &= \frac{14}{3} \\ \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x &= 0 \\ x^3 - 3x^2 - 6x &= 0 \\ x(x^2 - 3x - 6) &= 0 \end{aligned}$$

c) De la question précédente, on déduit que x est un antécédent de $\frac{14}{3}$ si $x = 0$ ou si x est une racine de l'équation du seconde degré $x^2 - 3x - 6 = 0$. Le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 33$ et donc

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - \sqrt{33}}{2} \simeq -1.37 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{3 + \sqrt{33}}{2} \simeq 4.37$$

En résumé, le nombre $\frac{14}{3}$ admet trois antécédents par la fonction f : $x_1 = \frac{3-\sqrt{11}}{2}$, $x_2 = 0$ et $x_3 = \frac{3+\sqrt{33}}{2}$.

5. On considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -3x + 5$
   a) (Tracer la droite $\mathcal{D}$ sur la figure précédente.)
   b) On observe que la droite est tangente à la courbe au point d'abscisse 1.

Exercice 2. La société Vélibre, spécialisée dans la location de vélos, a été créée en janvier 2010 avec un parc de 150 vélos neufs. Afin de conserver un parc en bonne qualité, le directeur de la société a décidé :

- de revendre 20% des vélos les plus usagés en janvier de chaque année suivante ;
- de racheter 40 vélos neufs en janvier de chaque année ;

Pour tout entier naturel n, on modélise le nombre approximatif de vélos du parc en janvier de l'année $(2010 + n)$ par le terme u_n. En particulier, $u_0 = 150$.

1. En 2011, le nombre de vélos est $u_1 = (1 - \frac{20}{100}) \times 150 + 40 = 0.8 \times 150 + 40 = 160$ et en 2012, $u_2 = 0.8 \times 160 + 40 = 168$.
2. S'il continue à vendre exactement 20% des vélos les plus usagés en janvier de chaque année suivante, on a alors la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = (1 - \frac{20}{100})u_n + 40 = 0.8\, u_n + 40$$

3. L'algorithme suivant permet de calculer et d'afficher les termes de u_0 à u_{20} de la suite numérique (u_n).

Variables :
U est un nombre réel
n est un entier.
Traitement :
U prend la valeur 150
Afficher U
Pour n allant de 1 à 20 **faire**
  U prend la valeur 0.8 × U + 40
  Afficher U
Fin Pour

4. À l'aide de la calculatrice, on a :

n	0	1	2	3	...	15	16	17	18	19	20
u_n	150	160	168	174	...	198	199	199	199	199	199

5. La municipalité prévoit d'implanter de nouvelles bornes dans la ville afin d'offrir aux usagers 250 vélos. La société Vélibre ne pourra pas satisfaire cette demande d'ici quelques années. D'après la question précédente, le nombre de vélos semble se stabiliser à 200.
   Plus précisément, on peut remarquer que $0.8 \times 200 + 40 = 200$. C'est-à-dire, si u_n vaut 200 alors u_{n+1} aussi vaut 200.

Exercice 3. Quatre candidats A, B, C et D se présentent à une élection régionale.
Avant le scrutin, on a interrogé 1 000 personnes âgées de 18 à 90 ans s'étant prononcées sur leur intention de vote et ayant communiqué leur tranche d'âge.
On a obtenu le tableau incomplet de répartition suivant :

Candidat / Âge	A	B	C	D	Total
[18,30[	100	50	30	20	200
[30,50[	150	50	20	80	300
[50,90[	50	300	50	100	500
Total	300	400	100	200	1 000

1. (Compléter le tableau.)
2. L'âge moyen des personnes interrogées qui ont l'intention de voter pour le candidat B est

$$\bar{x} = \frac{24 \times 50 + 40 \times 50 + 70 \times 300}{400} = \frac{121}{2} = 60.5$$

   Soit environ 57 ans.
3. Il y a 300 personnes qui ont choisi de voter pour A.
4. Il y a 50 personnes de plus de 50 ans qui ont choisi de voter pour A.
5. On choisit au hasard une des 1 000 personnes interrogées et on considère les deux événements suivants :
   - E : "la personne choisie appartient à la tranche d'âge [18; 30[" ;
   - F : "la personne choisie a voté pour le candidat B".

   On donnera tous les résultats sous forme décimale.

   a) La probabilité des deux événements E et F : $\mathbb{P}(E) = \frac{200}{1000} = 0.2$ et $\mathbb{P}(F) = \frac{400}{1000} = 0.4$.

   b) L'événement contraire $\bar{F}$ est "la personne choisie n'a pas voté pour le candidat B" et $\mathbb{P}(\bar{F}) = 1 - \mathbb{P}(F) = 1 - 0.4 = 0.6$.

   c) L'événement $E \cap \bar{F}$ est "la personne choisie a entre 18 et 30 ans et n'a pas voté pour le candidat B". D'après le tableau, $\mathbb{P}(E \cap \bar{F}) = \frac{100+30+20}{1000} = 0.15 = 15\%$.

   d) D'après le théorème revu en cours, $\mathbb{P}(E \cup \bar{F}) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(\bar{F}) - \mathbb{P}(E \cap \bar{F}) = 0.2 + 0.6 - 0.15 = 0.65 = 65\%$.
6. On choisit au hasard une personne dans la tranche d'âge [18; 30[. La probabilité que la personne choisie n'ait pas voté pour le candidat B est $1 - \frac{50}{200} = 0.75 = 75\%$.

Devoir maison 2 : Suites numériques et probabilités

pour le jeudi 25 février 2016

Exercice 1 (suite arithmétique)**.** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1; \\ u_{n+1} = u_n + 5 \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_{10}, u_{20}, u_{37}.
2. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.
3. Que vaut l'expression
$$1 + \underbrace{5 + \ldots + 5}_{n \text{ fois}}$$
en fonction de n.
4. Démontrer votre conjecture.

Exercice 2 (suite géométrique)**.** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 3; \\ u_{n+1} = 2u_n \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_{10}, u_{20}, u_{37}.
2. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.
3. Que vaut l'expression
$$3 \times \underbrace{2 \times \ldots \times 2}_{n \text{ fois}}$$
en fonction de n.
4. Démontrer votre conjecture.

Exercice 3. En 2014, la population d'un village est de 1 500 habitants.

Partie A

On fait l'hypothèse que le nombre d'habitants augmente de 100 habitants par an.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'habitants l'année $(2014 + n)$. On a ainsi $u_0 = 1\,500$.

1. Calculer les valeurs u_1 et u_2 du nombre d'habitants prévu en 2015 et 2016 selon ce modèle.
2. Exprimer, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.
3. Quelle devrait être la population en 2018 ?
4. Selon ce modèle, en quelle année la population devrait-elle atteindre 3 000 habitants ?

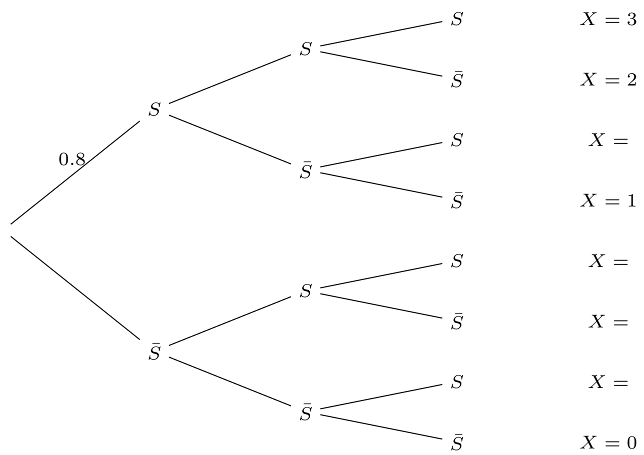
Partie B

On fait maintenant l'hypothèse que le nombre d'habitants augmente de 5% par an.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'habitants l'année $(2014 + n)$. On a ainsi $u_0 = 1\,500$.

1. Calculer les valeurs u_1 et u_2 du nombre d'habitants prévu en 2015 et 2016 selon ce modèle.
2. Exprimer, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.
3. Quelle devrait être la population en 2018 ?
4. Selon ce modèle, en quelle année la population devrait-elle atteindre 3 000 habitants ?

Exercice 4. Dans une urne, on place 2 boules blanches et 8 boules noires. On tire successivement trois boules en les remettant à chaque fois. On note S l'événement "tirer une boule noire".
On pose X la variable aléatoire qui à l'expérience aléatoire associe le nombre de succès (c'est-à-dire, le nombre de boules noires tirées).

1. Compléter l'arbre de probabilités suivant :



2. Calculer $\mathbb{P}(S\,\bar{S}\,S)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(X = 0)$, la probabilité que le nombre de boules noires tirées soit nul.
4. Décrire, par une phrase, l'événement $X = 1$ et faire la liste de toutes les issues de cette événement.
5. Vérifier que $\mathbb{P}(X = 1) = 0.096$.
6. Calculer $\mathbb{P}(X = 2)$ et $\mathbb{P}(X = 3)$.
7. En résumé, compléter le tableau suivant :

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = k)$	0.008	0.096		

8. Calculer la probabilité de tirer au moins une boule noire.

Devoir maison 2 : Suites numériques et probabilités

corrigé

2 pt **Exercice 1** (suite arithmétique)**.** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1; \\ u_{n+1} = u_n + 5 \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$$

1. On a $u_1 = 6,\ u_2 = 11,\ u_3 = 16,\ u_4 = 21,\ u_5 = 26,\ u_{10} = 51,\ u_{20} = 101,\ u_{37} = 186$.
2. On conjecture que $u_n = 1 + 5\,n$ en fonction de n.
3. Par définition de la multiplication,

$$1 + \underbrace{5 + \ldots + 5}_{n \text{ fois}} = 1 + n \times 5 = 1 + 5\,n$$

   en fonction de n.
4. On note que pour aller du terme u_0 à u_n, on ajoute n fois le nombre 5, d'où $u_n = 1 + 5\,n$.

2 pt **Exercice 2** (suite géométrique)**.** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 3; \\ u_{n+1} = 2u_n \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$$

1. Calculer $u_1 = 6,\ u_2 = 12,\ u_3 = 24,\ u_4 = 48,\ u_5 = 96,\ u_{10} = 3072,\ u_{20} = 3145728,\ u_{37} \simeq 4 \times 10^{11}$.
2. On conjecture que $u_n = 3 \times 2^n$ en fonction de n.
3. Par définition de la puissance d'un nombre,

$$3 \times \underbrace{2 \times \ldots \times 2}_{n \text{ fois}} = 3 \times 2^n$$

   en fonction de n.
4. De u_0 jusqu'à u_n, on multiplie n fois par 2 le nombre 3, d'où $u_n = 3 \times 2^n$.

Exercice 3. En 2014, la population d'un village est de 1 500 habitants.

Partie A

On fait l'hypothèse que le nombre d'habitants augmente de 100 habitants par an.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'habitants l'année $(2014 + n)$. On a ainsi $u_0 = 1\,500$.

1 pt 1. On a $u_1 = 1600$ et $u_2 = 1700$ habitants prévu en 2015 et 2016 selon ce modèle.

1 pt 2. Pour tout entier naturel n, $u_n = 1500 + 100\,n$.

1 pt 3. D'après ce modèle, la population en 2018 (soit $2014 + 4$) devrait être de $u_4 = 1500 + 4 \times 100 = 1900$ habitants.

1 pt 4. Notons que

$$\begin{aligned} u_n &= 3000 \\ 1500 + 100\,n &= 3000 \\ 100\,n &= 3000 - 1500 \\ n &= \frac{1500}{100} = 15 \end{aligned}$$

Selon ce modèle, en $2014 + 15 = 2029$, la population devrait-elle atteindre 3 000 habitants.

Partie B

On fait maintenant l'hypothèse que le nombre d'habitants augmente de 5% par an.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'habitants l'année $(2014 + n)$. On a ainsi $u_0 = 1\,500$.

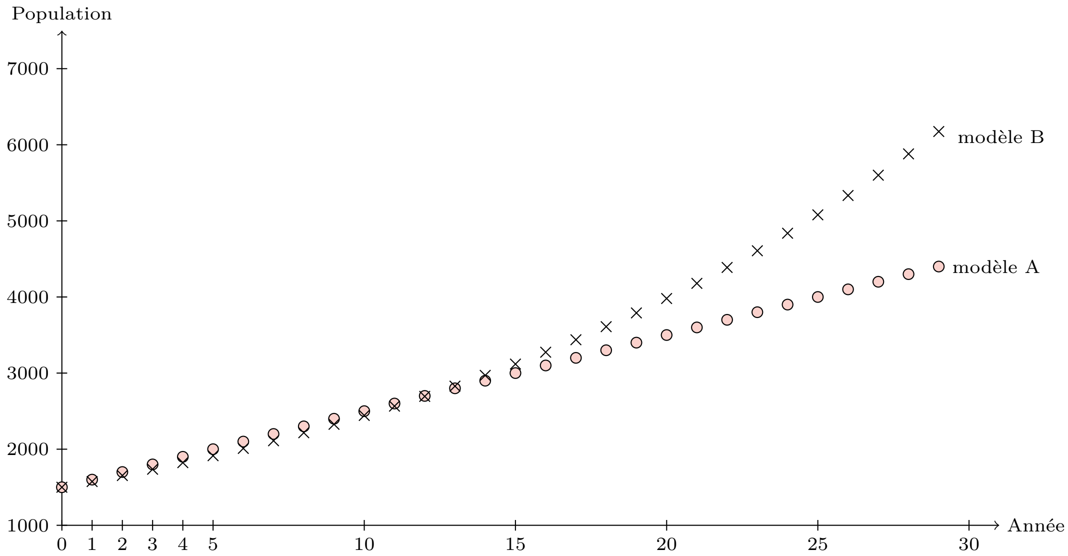
1 pt 1. On a $u_1 = 1500 \times (1 + \frac{5}{100}) = 1500 \times 1.05 = 1575$ et $u_2 = 1575 \times 1.05 \simeq 1654$ habitants prévu en 2015 et 2016 selon ce modèle.

1 pt 2. Pour tout entier naturel n, $u_n = 1500 \times 1.05^n$.

1 pt 3. La population en 2018 devrait être de $u_4 \simeq 1823$.

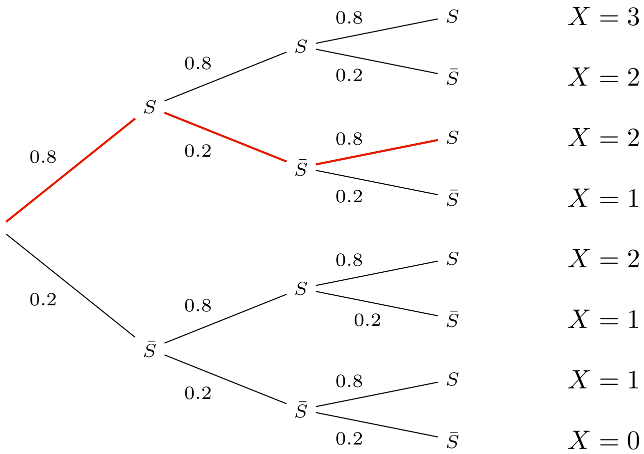
1 pt 4. À l'aide d'une table dans la calculatrice, on note que selon ce modèle, en $2014 + 15 = 2029$, la population devrait dépasser les 3 000 habitants.

Voici une représentation graphique des deux modèles précédents :



Exercice 4. Dans une urne, on place 2 boules blanches et 8 boules noires. On tire successivement trois boules en les remettant à chaque fois. On note S l'événement "tirer une boule noire".
On pose X la variable aléatoire qui à l'expérience aléatoire associe le nombre de succès (c'est-à-dire, le nombre de boules noires tirées).

1 pt 1. Voici l'arbre de probabilités associé :



Ainsi, d'après l'arbre de probabilités, on déduite les faits suivants :

1 pt 2. En faisant le produit des probabilites sur la branche $S\,\bar{S}\,S$, on a que $\mathbb{P}(S\,\bar{S}\,S) = 0.8 \times 0.2 \times 0.8 = 0.128$.

1 pt 3. La probabilité que le nombre de boules noires tirées soit nul est $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\bar{S}\,\bar{S}\,\bar{S}) = 0.2 \times 0.2 \times 0.2 = 0.2^3 = 0.008$.

1 pt 4. L'événement $X = 1$ est “on tire exactement une boule noire sur les trois" et

$$(X = 1) = \{S\,\bar{S}\,\bar{S};\ \bar{S}\,S\,\bar{S};\ \bar{S}\,\bar{S}\,S\}$$

1 pt 5. De la question précédente, on déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=1) &= \mathbb{P}(\{S\,\bar{S}\,\bar{S};\ \bar{S}\,S\,\bar{S};\ \bar{S}\,\bar{S}\,S\}) \\ &= \mathbb{P}(S\,\bar{S}\,\bar{S})+\mathbb{P}(\bar{S}\,S\,\bar{S})+\mathbb{P}(\bar{S}\,\bar{S}\,S) \\ &= 0.8\times 0.2\times 0.2+0.2\times 0.8\times 0.2+0.2\times 0.2\times 0.8 \\ &= 3\times 0.2^2\times 0.8 \\ &= 0.096\end{aligned}$$

1 pt 6. De même,

$$\mathbb{P}(X=2)=3\times 0.2\times 0.8^2=0.384$$

et

$$\mathbb{P}(X=3)=0.8^3=0.512$$

1 pt 7. En résumé, on a le tableau suivant :

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X=k)$	0.008	0.096	0.384	0.512

1 pt 8. La probabilité de tirer au moins une boule noire est

$$\mathbb{P}(X\geq 1)=\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=2)+\mathbb{P}(X=3)=0.008+0.096+0.384+0.512=0.992$$

Autre solution : L'événement contraire est de ne pas tirer de boule noire, d'où $\mathbb{P}(X\geq 1)=1-\mathbb{P}(X=0)=1-0.008=0.992$.

<u>Devoir sur table 3 : Probabilités</u>

jeudi 3 mars 2016

Exercice 1. On place dans un sac cinq cartons sur lesquels sont écrits chacun des mots de la phrase suivante :

VIVE	EUCLIDE	ET	SA	CLIQUE

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque carton tiré au hasard, associe le nombre de voyelles du mot inscrit.

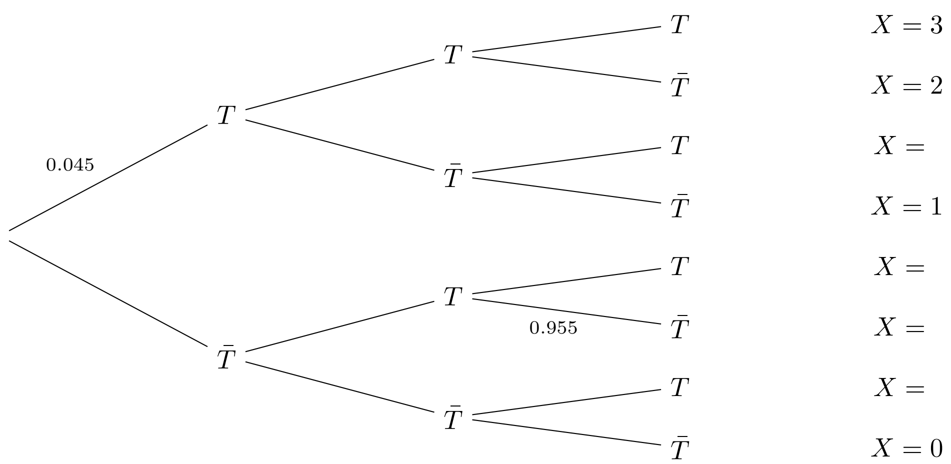
1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Compléter la table suivante donnant la loi de X :

k	1			
$\mathbb{P}(X = k)$				

3. Dans cette expérience aléatoire, quel est le nombre moyen de voyelles ?

Exercice 2. Lors d'une épidémie chez des ovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle. Un test est mis au point. La probabilité pour que le test soit positif est 0,045.
On choisit trois animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise.
On note X la variable aléatoire qui, aux trois animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.
On note T l'événement "un test est positif".

1. Quelle est la probabilité que le test soit négatif ?
2. Compléter l'arbre de probabilités :



3. Colorier en rouge la branche de l'arbre correspondante à l'issue élémentaire $T\bar{T}T$.
4. Calculer la probabilité de l'issue élémentaire $T\bar{T}T$: le premier et le troisième tests sont positifs.
5. Calculer $\mathbb{P}(X = 0)$, la probabilité que les trois tests soient négatifs.
6. Vérifier que $\mathbb{P}(X = 1) \simeq 0.123$.
7. Calculer $\mathbb{P}(X = 2)$.
8. Compléter le tableau suivant :

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = k)$	0.871			

9. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des trois animaux ait un test positif ?

Devoir sur table 3 : Probabilités

corrigé

Exercice 1. On place dans un sac cinq cartons sur lesquels sont écrits chacun des mots de la phrase suivante :

VIVE | EUCLIDE | ET | SA | CLIQUE

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque carton tiré au hasard, associe le nombre de voyelles du mot inscrit.

1. Les valeurs prises par X sont 1, 2, 3 et 4.
2. Compléter la table suivante donnant la loi de X :

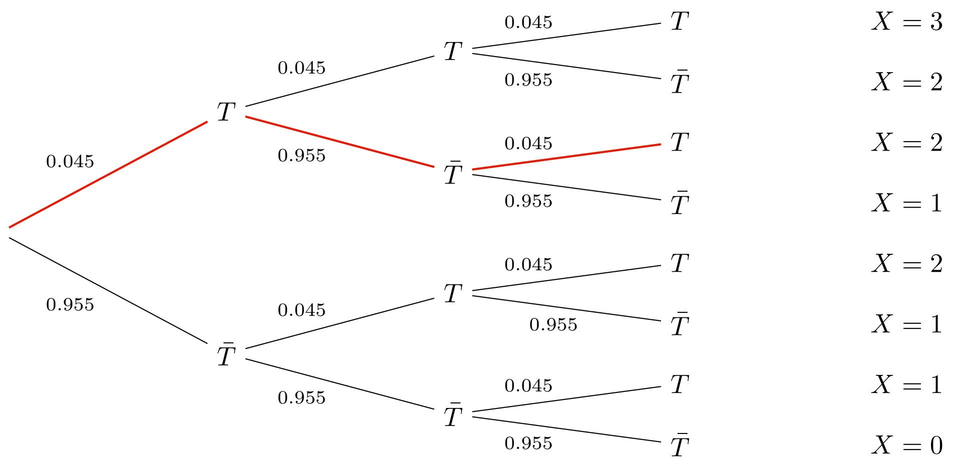
k	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

3. Dans cette expérience aléatoire, le nombre moyen de voyelles est

$$\mathbb{E}(X) = \frac{2}{5}\times 1 + \frac{1}{5}\times 2 + \frac{1}{5}\times 3 + \frac{1}{5}\times 4 = \frac{11}{5} = 2.2$$

Exercice 2. Lors d'une épidémie chez des ovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle. Un test est mis au point. La probabilité pour que le test soit positif est 0,045.
On choisit trois animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise.
On note X la variable aléatoire qui, aux trois animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.
On note T l'événement “un test est positif".

1. La probabilité que le test soit négatif est $1-0.045 = 0.955$.
2. Compléter l'arbre de probabilités :



3. (Colorier en rouge la branche de l'arbre correspondante à l'issue élémentaire $T\bar{T}T$.)
4. La probabilité de l'issue élémentaire $T\bar{T}T$: le premier et le troisième tests sont positifs est $\mathbb{P}(T\bar{T}T) = 0.045\times 0.955\times 0.045 \simeq 0.0019$.
5. La probabilité que les trois tests soient négatifs est $\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(\bar{T}\bar{T}\bar{T}) = 0.955^3 = 0.871$.
6. L'événement $(X=1)$ correspond au fait qu'un seul ovins parmi les trois ait un test positif. Il y a trois branches dans l'arbre avec la même probabilité correspondant à $X=1$. Ainsi $\mathbb{P}(X=1) = 3\times 0.045\times 0.955^2 \simeq 0.123$.
7. De même, $\mathbb{P}(X=2) = 3\times 0.045^2\times 0.955 \simeq 0.0058$.

8. Compléter le tableau suivant :

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = k)$	0.871	0.123	0.0058	0.0001

9. La probabilité pour qu'au moins un des trois animaux ait un test positif est $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) \simeq 1 - 0.871 = 0.129$.

Devoir sur table 3 : Probabilités (bis)

jeudi 3 mars 2016

Exercice 1. On place dans un sac sept cartons sur lesquels sont écrits chacun des mots de la phrase suivante :

VIVE | EUCLIDE | ET | SA | CLIQUE | DE | MATHEMATICIENS

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque carton tiré au hasard, associe le nombre de consonnes du mot inscrit.

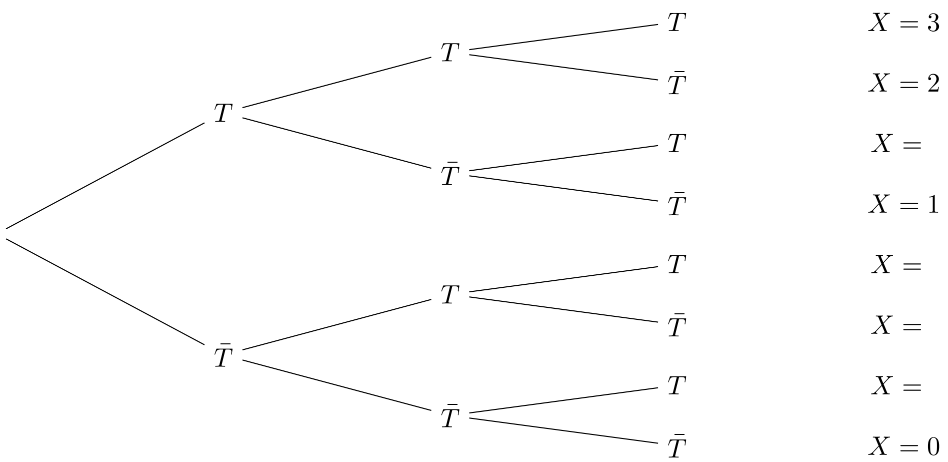
1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Compléter la table suivante donnant la loi de X :

k	1			
$\mathbb{P}(X = k)$				

3. Dans cette expérience aléatoire, quel est le nombre moyen de consonnes ?

Exercice 2. Lors d'une épidémie chez des ovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle. Un test est mis au point. La probabilité pour que le test soit positif est 0,054.
On choisit trois animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise.
On note X la variable aléatoire qui, aux trois animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.
On note T l'événement "un test est positif".

1. Quelle est la probabilité que le test soit négatif ?
2. Compléter l'arbre de probabilités :



3. Colorier en rouge la branche de l'arbre correspondante à l'issue élémentaire $T\bar{T}T$.
4. Calculer la probabilité de l'issue élémentaire $T\bar{T}T$: le premier et le troisième tests sont positifs.
5. Calculer $\mathbb{P}(X = 0)$, la probabilité que les trois tests soient négatifs.
6. Vérifier que $\mathbb{P}(X = 1) \simeq 0.145$.
7. Calculer $\mathbb{P}(X = 2)$.
8. Compléter le tableau suivant :

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = k)$				

9. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des trois animaux ait un test positif ?
10. Quelle est la probabilité qu'un des trois animaux ait un test positif ?
11. Quel est le nombre moyen d'animaux parmi les trois ayant un test positif ?

TP : nombre dérivé, illustration avec Geogebra

jeudi 10 mars 2016

Exercice 1. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$.
Pour tracer le graphe de la fonction f, tapez la commande suivante dans la zone Saisie :

```
f(x) = 0.5 * x^2 - x + 1
```

On se place en $a = 2$, soit h un nombre non nul.

1. Justifier que $f(2) = 1$ et $f(2+h) = \frac{1}{2}h^2 + h + 1$.
2. En déduire que le taux d'accroissement de la fonction f entre 2 à $2 + h$ est

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 1 + \frac{1}{2}h$$

3. Nous allons illustrer le fait suivant :

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 1$$

   a) Tracer en rouge la droite T d'équation $y = x - 1$:

   ```
   T: y = x - 1
   ```

   b) Créer un curseur h allant de -0.5 à 0.5 avec un pas de 0.0001.

   c) Définir les points $M(2;\ f(2))$ et $N(2+h;\ f(2+h))$:

   ```
   M = (2,f(2))
   N = (2+h, f(2+h))
   ```

   d) Tracer la droite (MN) :

   ```
   D = droite[M,N]
   ```

   e) A l'aide de la commande "Pente", afficher la pente (i.e. le coefficient directeur) de la droite (MN).

   f) Faire varier h, que remarque-t-on lorsque h est proche de 0 ?

Exercice 2 (Tangente à la courbe)**.** On considère la fonction $f :]-6;6[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{10}(x-4)(x-1)(x+5).$$

1. Tracer le graphe de la fonction f.
2. Est-il surprenant que la courbe passe par les pointes de coordonnées $(-5;\ 0)$, $(1;\ 0)$ et $(4,\ 0)$? Justifier.
3. Vérifier que $f(x) = \frac{1}{10}x^3 - \frac{21}{10}x + 2$ pour tout $x \in]-6;6[$.
4. Soit a un nombre dans l'intervalle $]-6;6[$. On admettra que le nombre dérivé de f en a est

$$f'(a) = \frac{3}{10}a^2 - \frac{21}{10}$$

   a) Créer un curseur a allant de -6 à 6 avec un pas de 0.1.

   b) Placer le point $M(a;\ f(a))$.

   c) Taper la commande suivante :

   ```
   T : y = f'(a) * (x - a) + f(a)
   ```

   d) Taper la commande suivante :

   ```
   m = f'(a)
   ```

   Cette commande enregistre le nombre dérivé de f en a dans la variable m.

   e) À l'aide de la commande "insérer du texte", afficher sur le graphique l'équation $f'(a) = m$ de telle sorte que m soit considéré comme la variable précédemment définie.

f) Faire varier a, quelle relation y a-t-il entre le signe du nombre dérivé $f'(a)$ et le sens de variation de la fonction f au voisinage de a ?

g) À l'aide de Geogebra donner les solutions approchées a_1 et a_2 de l'équation $f'(a) = 0$.

h) Résoudre l'équation $\frac{3}{10}x^2 - \frac{21}{10} = 0$. En déduire une valeur exacte de a_1 et a_2.

i) Qu'y a-t-il de particulier avec la tangente en a_1 et a_2 ?

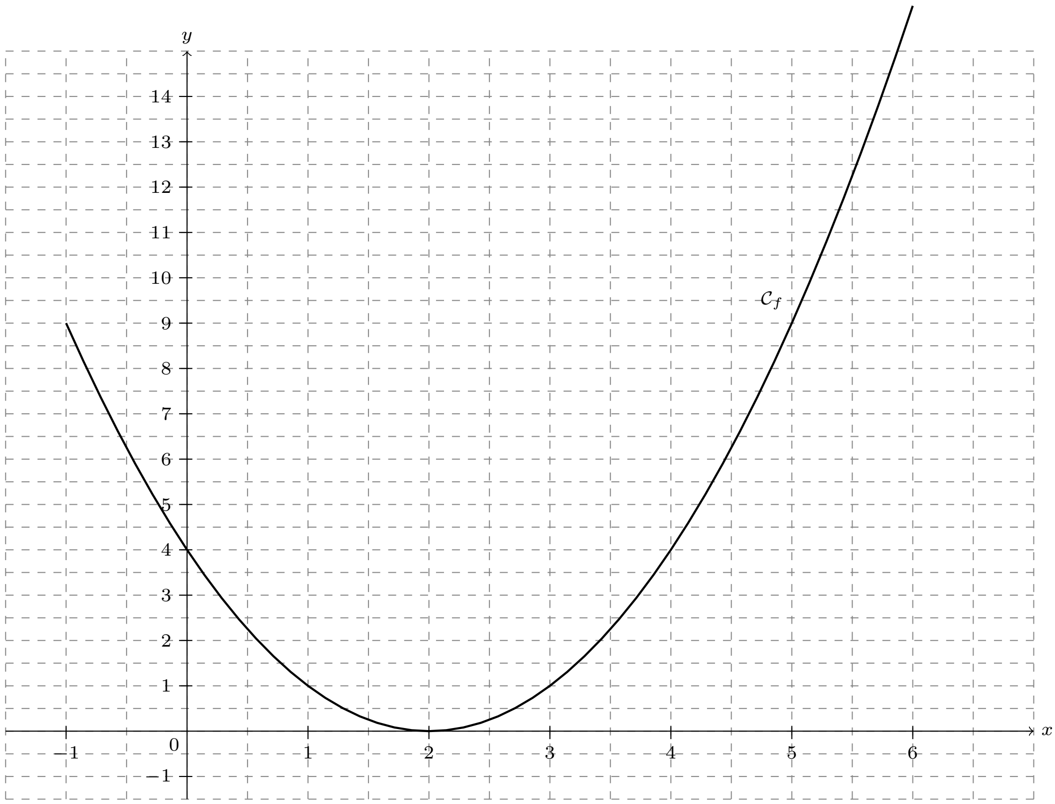
Nombre dérivé et tangente à une courbe

mercredi 16 mars 2016

Exercice 1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-1; 6]$ par

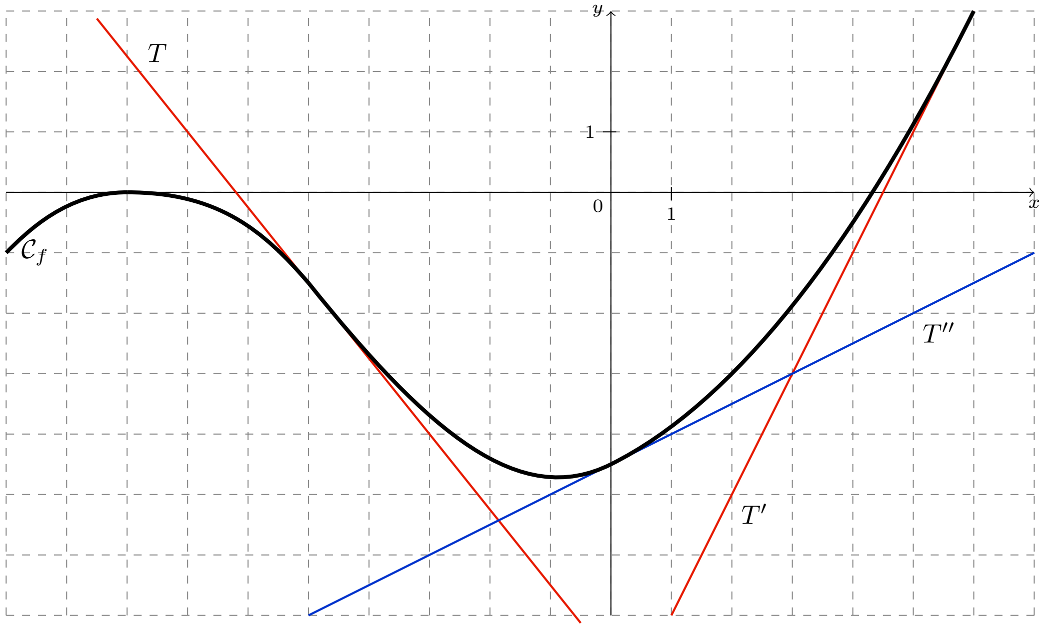
$$f(x) = x^2 - 4x + 4$$

Voici la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f :



1. Calculer $f(4)$. En déduire que le point $A(4; 4)$ appartient à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$.
   Placer le point sur la figure précédente.
2. Placer les points $B(3; 0)$ et $C(6, 12)$.
   a) Tracer la droite (BC).
   b) Que représente la droite (BC) pour la courbe $\mathcal{C}_f$?
   c) Déterminer le coefficient directeur (BC).
   d) En déduire le nombre dérivé $f'(4)$ de f en 4.
3. On considère la droite d d'équation $y = -2x + 3$.
   a) Justifier que le point $D(1; 1)$ appartient à la droite d ainsi qu'à la courbe $\mathcal{C}_f$.
   b) Placer le point D et tracer la droite d.
   c) Que représente la droite d pour la courbe $\mathcal{C}_f$?
   d) Déterminer $f'(1)$.
4. a) L'axe des abscisses est aussi tangent à la courbe $\mathcal{C}_f$ en un point. Donner l'abscisse de ce point.
   b) En déduire un nombre dérivé supplémentaire.
5. Le nombre dérivé de f en 0 :
   a) Tracer approximativement la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
   b) En déduire une approximation de $f'(0)$.
6. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-1; 6]$.

Exercice 2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et dont on donne une représentation graphique $\mathcal{C}_f$ ci-dessous. Les droites T, T' et T'' représentent respectivement les tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses -5, 6 et 0. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -8 est l'axe des abscisses.



1. Établir l'équation réduite de la tangente à la courbe au point d'abscisse 6.
2. Établir l'équation réduite de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
3. Établir l'équation réduite de la tangente à la courbe au point d'abscisse -8.
4. Établir l'équation réduite de la tangente à la courbe au point d'abscisse -5.
5. En déduire $f'(6)$, $f'(0)$, $f'(-8)$ et $f'(-5)$.
6. Compléter les phrases suivantes :

   a) Sur l'intervalle ________, la tangente T est située au dessus de la courbe $\mathcal{C}_f$.

   b) Sur l'intervalle ________, la tangente T est située __________ de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exercice 3. Soit g la fonction dont la courbe admet la droite d'équation $y = \frac{4}{3}x - 2$ comme tangente au point d'abscisse -1.
Déterminer $g'(-1)$ et $g(-1)$.

Exercice 4. Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout nombre réel x, $f'(x) = 2x^2 - 5x - 7$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Montrer que les tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses 2 et 0.5 sont parallèles.
2. On suppose que $f(2) = 3$ et $f(0.5) = 3$. Déterminer les équations réduites des tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses 2 et 0.5.

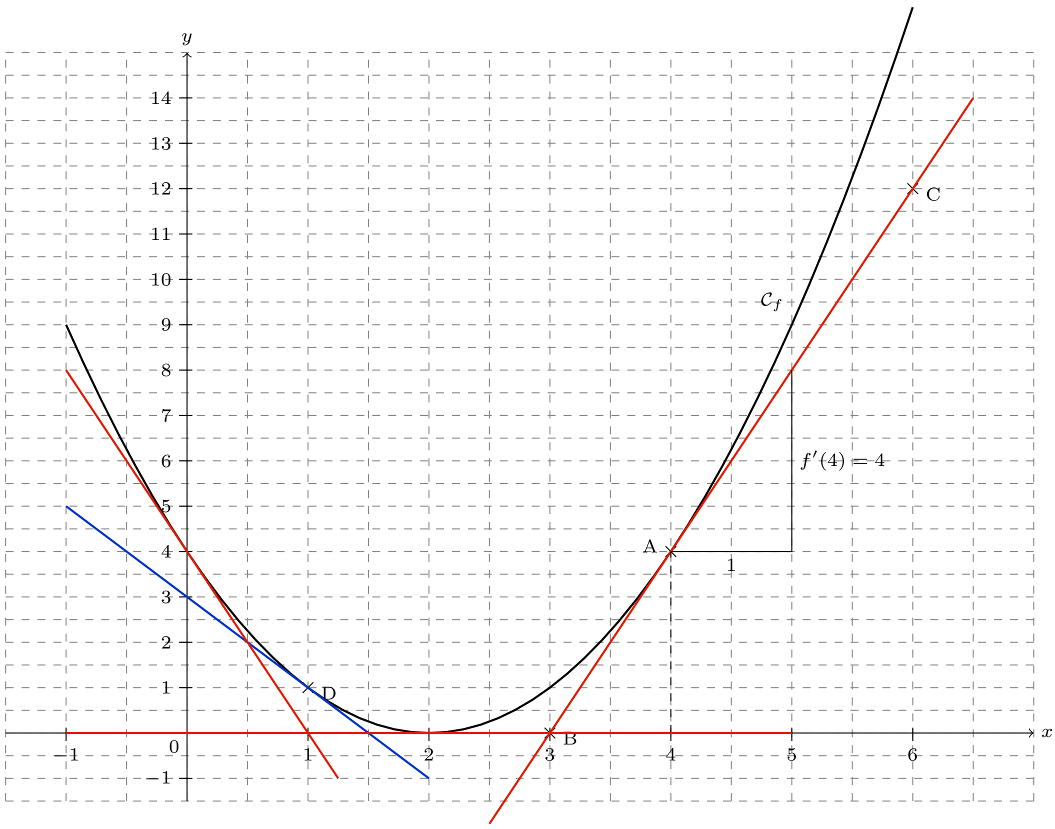
Nombre dérivé et tangente à une courbe

corrigé

Exercice 1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-1; 6]$ par

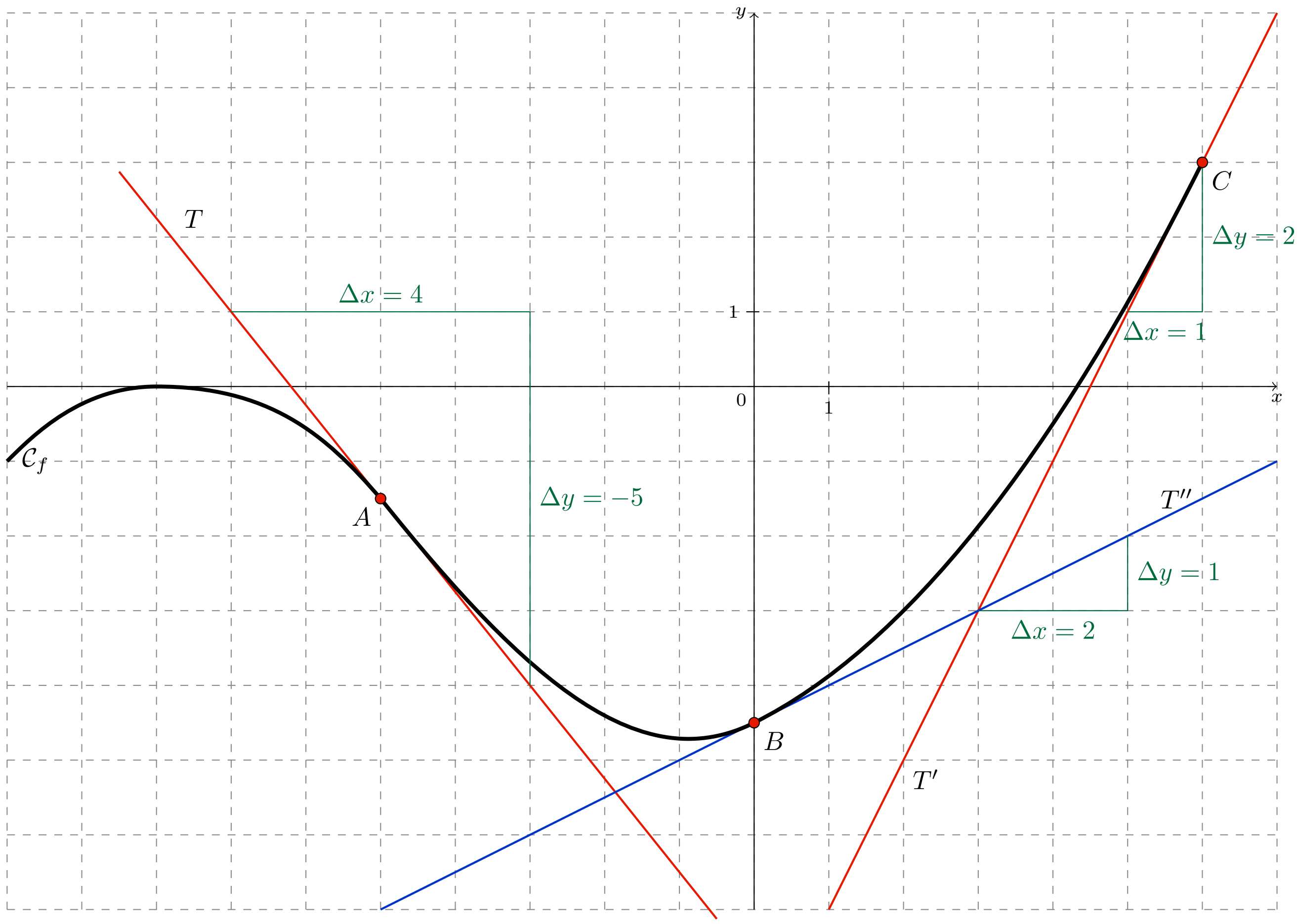
$$f(x) = x^2 - 4x + 4$$

Voici la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f :



1. On note que $f(4) = 4^2 - 4 \times 4 + 4 = 4$, d'où le point $A(4; 4)$ appartient à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$.
2. La droite (BC) représente la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ en A.
3. On considère la droite d d'équation $y = -2x + 3$.
   a) On note que $-2 \times 1 + 3 = 1$ et $f(1) = 1^2 - 4 \times 1 + 4 = 1$, donc le point $D(1; 1)$ appartient à la droite d ainsi qu'à la courbe $\mathcal{C}_f$.
   b) (Placer le point D et tracer la droite d.)
   c) La droite d représente la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point D.
4. a) L'axe des abscisses est aussi tangent à la courbe $\mathcal{C}_f$ en un point d'abscisse 2.
   b) Par définition $f'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2. Or l'axe des abscisse est horizontale, son coefficient directeur est nul et donc $f'(2) = 0$.

Exercice 2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et dont on donne une représentation graphique $\mathcal{C}_f$ ci-dessous. Les droites T, T' et T'' représentent respectivement les tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses -5, 6 et 0. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -8 est l'axe des abscisses.



1. La tangente à la courbe au point d'abscisse 6 est notée T' sur la figure. On note que son coefficient directeur est $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{1} = 2$. La tangente passe par le point $C(6, 3)$, d'où

$$y_C = ax_C + b \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3 = 2 \times 6 + b \qquad \Longleftrightarrow \qquad b = 3 - 2 \times 6 = -9$$

   Ainsi, l'équation réduite de la tangente est $y = 2x - 9$.

2. La tangente à la courbe au point d'abscisse 0 est notée T'' sur la figure. On note que son coefficient directeur est $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2}$. La tangente passe par le point $B(0, -4.5)$, d'où

$$y_B = ax_B + b \qquad \Longleftrightarrow \qquad -4.5 = \frac{1}{2} \times 0 + b \qquad \Longleftrightarrow \qquad b = -4.5$$

   Ainsi, l'équation réduite de la tangente est $y = \frac{1}{2}x - 4.5$.

3. La tangente à la courbe au point d'abscisse -8 est l'axe des abscisse. D'où, elle admet comme équation réduite $y = 0$.

4. La tangente à la courbe au point d'abscisse -5 est notée T sur la figure. On note que son coefficient directeur est $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-5}{4} = -1.25$. La tangente passe par le point $A(-5, -1.5)$, d'où

$$y_A = ax_A + b \qquad \Longleftrightarrow \qquad -1.5 = -1.25 \times (-5) + b \qquad \Longleftrightarrow \qquad b = -1.5 - 1.25 \times 5 = -7.25$$

   Ainsi, l'équation réduite de la tangente est $y = -1.25x - 7.25$.

5. Par définition, le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'absisse a de la courbe. Ainsi, on déduit des questions précédentes que $f'(6) = 2$, $f'(0) = 0.5$, $f'(-8) = 0$ et $f'(-5) = -1.25$.

6. Compléter les phrases suivantes :

   a) Sur l'intervalle $]-\infty; -5]$, la tangente T est située au dessus de la courbe $\mathcal{C}_f$.

   b) Sur l'intervalle $[-5; +\infty[$, la tangente T est située en dessous de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exercice 3. Soit g la fonction dont la courbe admet la droite d'équation $y = \frac{4}{3}x - 2$ comme tangente au point d'abscisse -1.
Alors $g'(-1) = \frac{4}{3}$, le coefficient directeur. La tangente passe par le point $A(-1, \frac{4}{3} \times (-1) - 2) = (-1, \frac{-10}{3})$ d'abscisse -1, on en déduit que $g(-1) = \frac{-10}{3}$.

Exercice 4. Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout nombre réel x, $f'(x) = 2x^2 - 5x - 7$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. On note que $f'(2) = 2 \times 2^2 - 5 \times 2 - 7 = -9$ et $f'(0.5) = 2 \times 0.5^2 - 5 \times 0.5 - 7 = -9$. Ainsi les tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses 2 et 0.5 ont le même coefficient directeur. Elles sont donc parallèles.
2. Les équations réduites des tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses 2 et 0.5 :

$$\begin{aligned} T_2 : &\quad y = -9(x-2) + f(2) \\ T_{0.5} : &\quad y = -9(x-0.5) + f(0.5) \end{aligned}$$

Devoir maison 3 : Probabilités, suites numériques

pour le jeudi 28 avril 2016

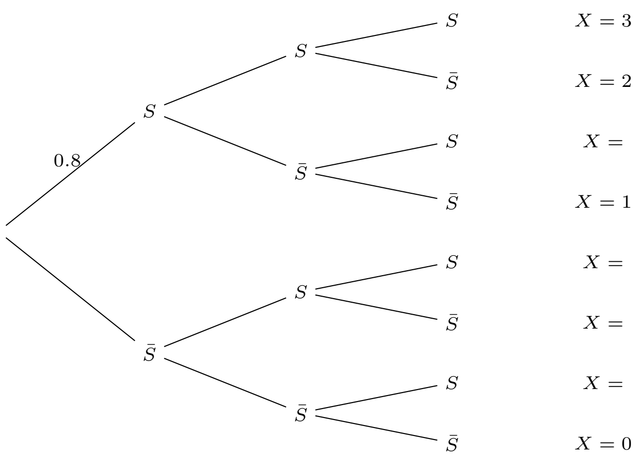
Exercice 1. En février 2014, un rapport de la commission des affaires sociales du Sénat préconise une augmentation annuelle de 10% du prix du paquet de ciguarettes.

On suppose qu'une telle augmentation est appliquée chaque année au 1er juillet, et on note u_n le prix moyen d'un paquet de cigarettes au 1er juillet de l'année $2014 + n$. Au 1er juillet 2014, le prix moyen d'un paquet de cigarettes est de $6,50$ euros.

1. Calculer u_1, u_2.
2. Quelle sera le prix moyen d'un paquet au 1er juillet 2017, d'après ce modèle ?
3. Soit n un entier naturel, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
4. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
5. Un fumeur achète deux paquets par semaine. Quel sera le coût total de sa consommation du 1er juillet 2018 au 30 juin 2019 ?
6. Écrire un algorithme qui calcule le budget total de ce fumeur du 1er juillet 2014 au 30 juin 2020, puis le programmer.
7. Écrire un algorithme qui détermine l'année où le budget total de ce fumeur à partir 1er juillet 2014 aura dépassé 100 000 euros, puis le programmer.

Exercice 2. Dans une urne, on place 2 boules blanches et 8 boules noires. On note S l'événement "tirer une boule noire".

1. On tire successivement trois boules en les remettant à chaque fois.
   On pose X la variable aléatoire qui à l'expérience aléatoire associe le nombre de succès (c'est-à-dire, le nombre de boules noires tirées).
   a) Compléter l'arbre de probabilités suivant :



   b) Calculer $\mathbb{P}(S\,\bar{S}\,S)$.
   c) Calculer $\mathbb{P}(X = 0)$, la probabilité que le nombre de boules noires tirées soit nul.
   d) Décrire, par une phrase, l'événement $X = 1$ et faire la liste de toutes les issues de cette événement.
   e) Compléter le tableau suivant :

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = k)$				

   f) Calculer la probabilité de tirer au moins une boule noire.
2. Soit n un entier naturel non nul. Maintenant, on tire successivement n boules en les remetant à chaque fois. On note encore X la variable aléatoire qui à l'expérience aléatoire associe le nombre de boules noires tirées.
   a) Exprimer $\mathbb{P}(X = 0)$ en fonction de n.

b) On note
$$E = \{S \underbrace{\bar{S} \dots \bar{S}}_{n-1 \text{ fois}}\}$$
l'évenement, on tire une boule noire en premier puis que des boules blanches.
   i. Que vaut X lorsque E se réalise ?
   ii. Justifier que $\mathbb{P}(E) = 0.8 \times 0.2^{n-1}$.

c) Justifier que $\mathbb{P}(X = 1) = n0.8 \times 0.2^{n-1}$

d) En déduire $\mathbb{P}(X \leq 1)$ en fonction de n.

e) Déterminer le nombre de tirages avec remise nécessaires pour que la probabilité de tirer au plus une boule noire soit inférieure à 5%.

Exercice 3. Parmi les 1 260 élèves d'un lycée, l'infirmière en a recensé 35% qui buvaient de l'alcool. Suite à une campagne de prévention, ce taux a baissé de 5 points.

1. Calculer le nombre d'élèves buvant de l'alcool avant la campagne.
2. Calculer le nombre d'élèves buvant de l'alcool après la campagne.
3. Quel est le taux d'évolution du nombre d'élèves buvant de l'alcool ?

Devoir maison 3 : Probabilités, suites numériques

corrigé

Exercice 1. En février 2014, un rapport de la commission des affaires sociales du Sénat préconise une augmentation annuelle de 10% du prix du paquet de ciguarettes.

On suppose qu'une telle augmentation est appliquée chaque année au 1er juillet, et on note u_n le prix moyen d'un paquet de cigarettes au 1er juillet de l'année $2014+n$. Au 1er juillet 2014, le prix moyen d'un paquet de cigarettes est de $6,50$ euros.

1. Augmenter de 10% revient à multiplier par 1.1 d'où $u_1 = u_0 \times 1.1 = 6.5 \times 1.1 = 7.15$ et $u_2 = u_1 \times 1.1 = 7.15 \times 1.1 \simeq 7.87$.
2. Le prix moyen d'un paquet au 1er juillet 2017 (soit 2014 + 3) sera de $u_3 \simeq 8.65$ euros.
3. Soit n un entier naturel, comme on augmente tous les ans de 10% dans ce modèle, on a $u_{n+1} = 1.1\, u_n$.
4. De la question précédente, on déduit que (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1.1$.
5. Un fumeur achète deux paquets par semaine. Le 1er juillet 2018 (2014 + 4), en moyenne, le prix d'un paquet sera de $u_4 \simeq 9.52$ et le fumeur aura fumé jusqu'au 30 juin 2019 $52 \times 2 = 104$ paquets de cigarettes. Pour un budget moyen total sur l'année de 989.73 euros.
6. Pour déterminer le budget moyen total de ce fumeur du 1er juillet 2014 au 30 juin 2020, on peut implémenter l'algorithme suivant :

   Variables : Budget, U et n sont des nombres
   U prend la valeur 6.5
   Budget prend la valeur 6.5×104 ▷ l'année 2014
   Pour n allant de 1 à 5 **faire** ▷ calcul pour les années de 2015 à 2019
       U prend la valeur $1.1 \times U$
       On ajoute au budget $U \times 104$
   Fin Pour
   Afficher U

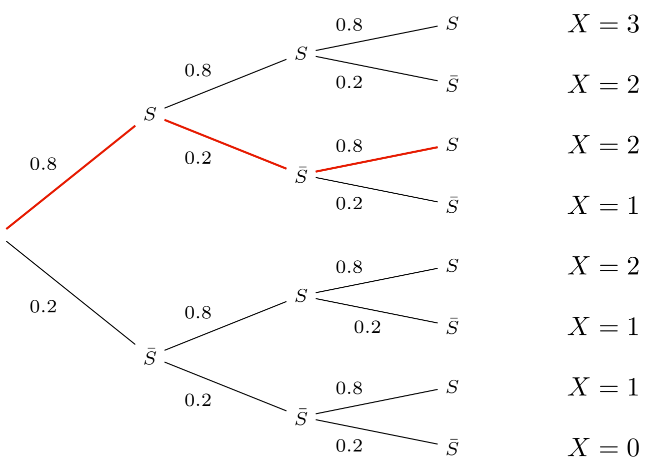
   À l'aide de la calculatrice, on obtient que le budget moyen total sera d'environ 5215.75 euros.
7. Pour déterminer l'année où le budget total de ce fumeur à partir 1er juillet 2014 aura dépassé 100 000 euros, on peut utiliser l'algorithme suivant :

   Variables : Budget, U et n sont des nombres
   U prend la valeur 6.5
   n prend la valeur 0
   Budget prend la valeur 6.5×104 ▷ l'année 2014
   Tant que Budget $< 100\,000$ **faire**
       U prend la valeur $1.1 \times U$
       On ajoute au budget $U \times 104$
       On augmente n de 1
   Fin Tant que
   On augmente n de 1 ▷ afin de compter l'année "zéro", soit 2014
   Afficher n

   À l'aide de la calculatrice, on obtient que le budget de 100 000 euros sera dépassé au bout de 29 ans.

Exercice 2. Dans une urne, on place 2 boules blanches et 8 boules noires. On note S l'événement « tirer une boule noire ».

1. On tire successivement trois boules en les remettant à chaque fois.
   On pose X la variable aléatoire qui à l'expérience aléatoire associe le nombre de succès (c'est-à-dire, le nombre de boules noires tirées).
   a) Voici l'arbre de probabilités associé :



Ainsi, d'après l'arbre de probabilités, on déduite les faits suivants.

a) En faisant le produit des probabilites sur la branche $S\,\bar{S}\,S$, on a que $\mathbb{P}(S\,\bar{S}\,S) = 0.8\times 0.2\times 0.8 = 0.128$.

b) La probabilité que le nombre de boules noires tirées soit nul est $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\bar{S}\,\bar{S}\,\bar{S}) = 0.2 \times 0.2 \times 0.2 = 0.2^3 = 0.008$.

c) L'événement $X = 1$ est “on tire exactement une boule noire sur les trois" et

$$(X = 1) = \{S\,\bar{S}\,\bar{S};\ \bar{S}\,S\,\bar{S};\ \bar{S}\,\bar{S}\,S\}$$

d) De la question précédente, on déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=1) &= \mathbb{P}(\{S\,\bar{S}\,\bar{S};\ \bar{S}\,S\,\bar{S};\ \bar{S}\,\bar{S}\,S\}) \\
&= \mathbb{P}(S\,\bar{S}\,\bar{S}) + \mathbb{P}(\bar{S}\,S\,\bar{S}) + \mathbb{P}(\bar{S}\,\bar{S}\,S) \\
&= 0.8 \times 0.2 \times 0.2 + 0.2 \times 0.8 \times 0.2 + 0.2 \times 0.2 \times 0.8 \\
&= 3 \times 0.2^2 \times 0.8 \\
&= 0.096
\end{aligned}$$

e) De même, $\mathbb{P}(X = 2) = 3\times 0.2\times 0.8^2 = 0.384$ et $\mathbb{P}(X = 3) = 0.8^3 = 0.512$. En résumé, on a le tableau suivant :

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = k)$	0.008	0.096	0.384	0.512

f) La probabilité de tirer au moins une boule noire est

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) = 0.008 + 0.096 + 0.384 + 0.512 = 0.992$$

Autre solution : L'événement contraire est de ne pas tirer de boule noire, d'où $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - 0.008 = 0.992$.

2. Soit n un entier naturel non nul. Maintenant, on tire successivement n boules en les remetant à chaque fois. On note encore X la variable aléatoire qui à l'expérience aléatoire associe le nombre de boules noires tirées.

a) On a

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\underbrace{\bar{S}\,\bar{S}\ldots\bar{S}}_{n \text{ fois}}) = (1-p)^n = 0.2^n$$

b) On note

$$E = \{S\,\underbrace{\bar{S}\ldots\bar{S}}_{n-1 \text{ fois}}\}$$

l'évenement, on tire une boule noire en premier puis que des boules blanches.

i. Lorsque E se réalise, X vaut 1.

ii. On a

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(\{S\,\underbrace{\bar{S}\ldots\bar{S}}_{n-1 \text{ fois}}\}) = p^1 \times (1-p)^{n-1} = 0.8 \times 0.2^{n-1}$$

c) Le nombre de façons différentes d'avoir un succès exactement parmi les n répétitions est $\binom{n}{1} = n$ (on choisit la réalisation où le succès se produira), d'où

$$\mathbb{P}(X = 1) = n\,0.8 \times 0.2^{n-1}$$

d) On en déduit que :

$$\mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = 0.2^n + n\,0.8 \times 0.2^{n-1}$$

en fonction de n.

e) En effectuant une table des valeurs prises par $\mathbb{P}(X \leq 1)$, on déduit qu'il faut au moins 4 tirages avec remise pour que la probabilité de tirer au plus une boule noire soit inférieure à 5%.

Exercice 3. Parmi les 1 260 élèves d'un lycée, l'infirmière en a recensé 35% qui buvaient de l'alcool. Suite à une campagne de prévention, ce taux a baissé de 5 points.

1. Le nombre d'élèves buvant de l'alcool avant la campagne est $0,35 \times 1\,260 = 441$.
2. Suite à la campagne de prévention, le taux a baissé de 5 points, ainsi il est de 30% et le nombre d'élèves buvant de l'alcool après la campagne est $0.30 \times 1\,260 = 378$.
3. On a
$$t = \frac{y_2 - y_1}{y_1} = \frac{378 - 441}{441} = -\frac{1}{7} \simeq -0.143$$
Le taux d'évolution du nombre d'élèves buvant de l'alcool est de -14.3%.

Devoir maison 3 : Probabilités, suites numériques (bis)

Exercice 1. Le coût de fabrication d'un vélo se décompose de la façon suivante : 60% de main-d'oeuvre et 40% de fournitures (cadre, roue, pédalier, etc.). Le coût de la main-d'oeuvre augmente de 10% en un an et celui des fournitures de 30%.

1. Quel est le pourcentage d'augmentation en un an du coût de fabrication d'un vélo ?
2. Vérification sur un cas particulier : supposons que le coût initial de la main-d'oeuvre soit de 50 euros et celui des fournitures de 200 euros. Calculer le coût de fabrication après les augmentations et vérifier que le taux d'évolution est bien celui trouvé à la question précédente.

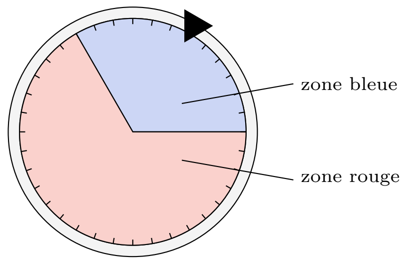
Exercice 2. Henri décide de verser 200 euros sur un livret chaque 1er janvier à partir du 1er janvier 2015. Sa banque rémunère ce livret au taux annuel de 2%. On note u_0 le montant initial du compte (donc $u_0 = 200$) et u_n le montant au 1er janvier de l'année $(2015 + n)$, n étant un entier naturel.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 (arrondir au centime d'euro).
2. Justifier que $u_{n+1} = 1.02u_n + 200$ pour tout entier naturel n.
3. Écrire un programme qui permet de calculer le capital au 1er janvier 2020 et donner la réponse affiché par votre programme.
4. Écrire un programme qui permet de déterminer au bout de combien d'années Henri devra-t-il attendre pour disposer d'au moins 5 000 euros sur ce livret. Donner le résultat obtenu.
5.* On définit une nouvelle suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n + 10\,000$.
   a) Calculer les trois premiers termes de (v_n).
   b) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
   c) Exprimer v_n en fonction de n, puis en déduire que :
   $$u_n = 10\,200 \times (1.02)^n - 10\,000$$
   pour tout entier n.

Exercice 3 (Roue de loterie)**.**

A. Une expérience aléatoire élémentaire

On fait tourner la roue de loterie colorée en bleu et rouge représentée ci-contre. On gagne si l'issue « la flèche tombe dans la zone bleue » se réalise. On note S (comme « succès ») cette issue et E (comme « échec ») l'autre issue. On suppose que $\mathbb{P}(S) = \frac{1}{3}$.



1. Déterminer $\mathbb{P}(E)$.

B. Quatre répétitions

On répète quatre fois l'expérience élémentaire de la partie **A** de façon indépendante.

1. a) Représenter cette nouvelle expérience par un arbre.
   b) Quelles sont les probabilités des issues $SESE$ et $ESSE$?
   c) Quelle est la probabilité de l'événement : « obtenir deux succès » ?
2. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque issue le nombre de succès obtenus au cours des 4 répétitions. Déterminer la loi de probabilité de X.
3. Calculer l'espérance de X.
4. Supposons qu'on gagne 10 euros à chaque fois que la roue s'arrête sur la zone bleue et rien sinon. Déterminer la gain moyen lorsqu'on joue 4 parties.