Baccalauréat général

Session mars 2016

<u>Série ES</u>

Épreuve : **Mathématiques (non spécialité et spécialité)**
Durée de l'épreuve : **3 heures**
Coefficient : **5 et 7**

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part important dans l'appréciation des copies.

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.

Le candidat doit s'assurer que le sujet distribué est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Exercice 1 (Pondichéry, 2015). **(6 points)**

Commun à tous les candidats

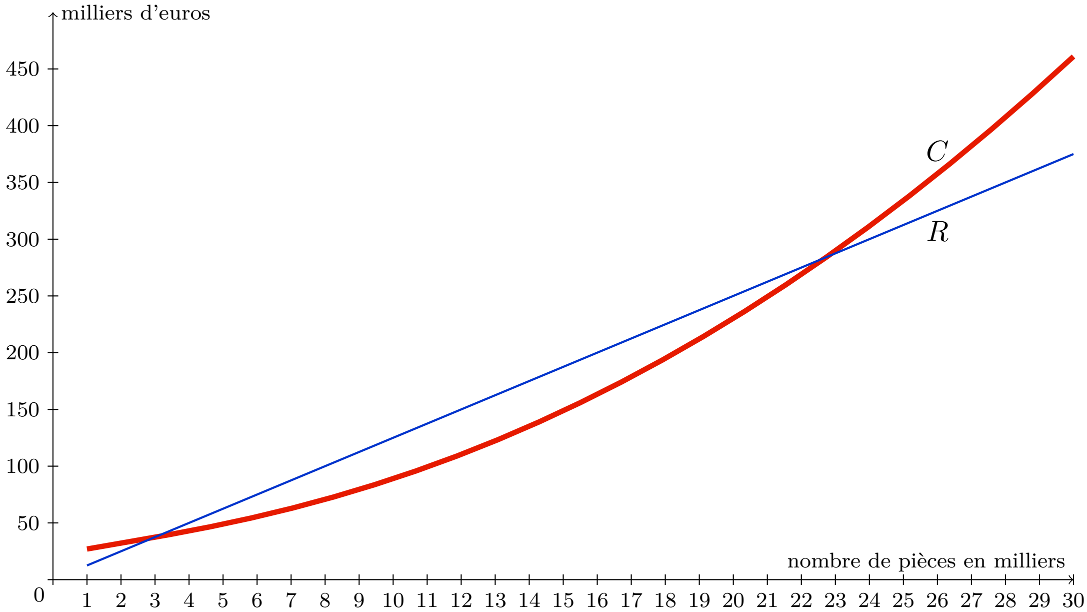
Une entreprise produit et vend des composants électroniques.

Sa capacité mensuelle de production est comprise entre 1000 et 30000 pièces. On suppose que toute la production est commercialisée.

Les parties A *et* B *peuvent être traitées de façon indépendante.*

Partie A

On donne ci-dessous R et C les représentations graphiques respectives des fonctions recette et coût sur l'intervalle $[1\,;\,30]$.



Par lecture graphique, donner une estimation des valeurs demandées.

1. Quel est le coût de production de 21000 pièces ?
2. Pour quelles quantités de pièces produites l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ?
3. Pour quel nombre de pièces produites le bénéfice est-il maximal ?

Partie B

Le bénéfice en milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x milliers de pièces, est donné sur l'intervalle $[1\,;\,30]$ par

$$B(x) = -0,5x^2 + 6x - 20 + 2x\ln x.$$

1. Montrer que $B'(x) = -x + 8 + 2\ln x$, où B' est la dérivée de B sur l'intervalle $[1\,;\,30]$.
2. On admet que $B''(x) = -1 + \dfrac{2}{x}$, où B'' est la dérivée seconde de B sur l'intervalle $[1\,;\,30]$.
   Justifier le tableau de variation ci-dessous de la fonction dérivée B' sur l'intervalle $[1\,;\,30]$.

x	1	2	30
$B'(x)$	7 ↗	$6+2\ln(2)$ ↘	$-22+2\ln(30)$

3. a) Montrer que l'équation $B'(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1\,;\,30]$.
   b) Donner une valeur approchée au millième de la valeur de α.
4. En déduire le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[1\,;\,30]$, et donner le tableau de variation de la fonction bénéfice B sur ce même intervalle.
5. Quel est le nombre de pièces à produire, à l'unité près, pour que l'entreprise réalise un bénéfice maximal ?
   Quel est ce bénéfice maximal (arrondi au millier d'euros) ?

Exercice 2 (Nouvelle-Calédonnie, 2013). **(5 points)**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le premier janvier 2014, Monica ouvre un livret d'épargne sur lequel elle dépose 6 000 euros.

Elle décide de verser 900 euros sur ce livret chaque premier janvier à partir de 2015 jusqu'à atteindre le plafond autorisé de 19 125 euros.

On suppose dans tout cet exercice que le taux de rémunération du livret reste fixé à 2,25 % par an et que les intérêts sont versés sur le livret le premier janvier de chaque année.

Première partie

1. Calculer le montant des intérêts pour l'année 2014 et montrer que Monica disposera d'un montant de 7 035 euros sur son livret le premier janvier 2015.
2. On note M_n le montant en euros disponible sur le livret le premier janvier de l'année $2014 + n$.
   On a donc $M_0 = 6\,000$ et $M_1 = 7\,035$.
   Montrer que pour tout entier naturel n : $M_{n+1} = 1,0225 M_n + 900$.

Deuxième partie

Monica souhaite savoir en quelle année le montant de son livret atteindra le plafond de 19 125 euros.

1. Première méthode :
   On considère la suite (G_n) définie pour tout entier naturel n, par $G_n = M_n + 40\,000$.
   a) Montrer que la suite (G_n) est une suite géométrique de raison 1,0225. On précisera le premier terme.
   b) Donner l'expression de G_n en fonction de n.
      En déduire que, pour tout entier naturel n, $M_n = 46\,000 \times 1,0225^n - 40\,000$.
   c) Déduire de l'expression de M_n obtenue en b. l'année à partir de laquelle le plafond de 19 125 euros sera atteint.
2. Deuxième méthode :
   L'algorithme ci-dessous permet de déterminer l'année à partir de laquelle le plafond sera atteint.

```
LIGNE
 1  Variables :       MONTANT est un réel
 2                    ANNÉE est un entier
 3
 4  Initialisation :  Affecter à MONTANT la valeur 6000
 5                    Affecter à ANNÉE la valeur 2014
 6
 7  Traitement :      Tant que MONTANT < 19125
 8                       Affecter à MONTANT la valeur 1,0225 × MONTANT + 900
 9                       Affecter à ANNÉE la valeur ANNÉE +1
10
11  Sortie :          Afficher « Le plafond du livret sera atteint en ... »
12                    Afficher ANNÉE
```

a) Il suffit de modifier deux lignes de cet algorithme pour qu'il détermine l'année à partir de laquelle le plafond est atteint pour un montant versé initialement de 5 000 euros et des versements annuels de 1 000 euros.

Indiquez sur votre copie les numéros des lignes et les modifications proposées.

b) Proposez une modification de la boucle conditionnelle pour que l'algorithme affiche également à l'écran le montant disponible au premier janvier de chaque année.

Exercice 3 (Asie juin 2012). **(5 points)**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

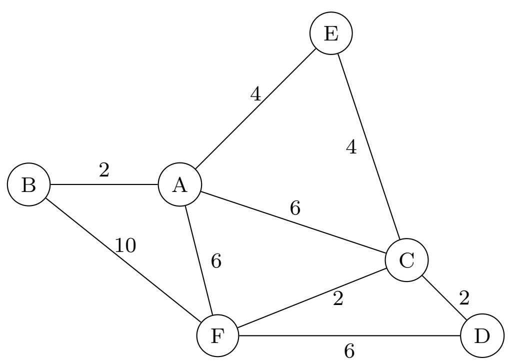
Une association organise un rallye sportif en VTT : six zones de regroupement sont déterminées et sont reliées par des chemins.

Ce parcours est modélisé par le graphe ci-dessous, où les sommets de A à F représentent les zones de regroupement, et les arêtes les chemins.

Les arêtes sont pondérées par les distances, exprimées en kilomètres, nécessaires pour parcourir ces chemins.

Les candidats sont positionnés initialement sur la zone A et doivent, après avoir parcouru tous les chemins, revenir à la zone initiale.

Chaque fois qu'un candidat emprunte pour la première fois un chemin il doit déposer, à un endroit précis, un jeton personnalisé, attestant son passage.



1. Quel nombre minimal de jetons est-il nécessaire de donner à chaque candidat ?

2. Un candidat souhaite faire le parcours, en empruntant tous les chemins une fois et une seule. Est-ce possible ? Justifier la réponse.
3. Soit M la matrice associée au graphe G (on ordonne les sommets dans l'ordre alphabétique).
   a) Écrire la matrice M.
   b) On donne les matrices $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 9 & 4 & 6 & 9 \\ 6 & 2 & 4 & 3 & 3 & 6 \\ 9 & 4 & 6 & 6 & 6 & 9 \\ 4 & 3 & 6 & 2 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 6 & 3 & 2 & 4 \\ 9 & 6 & 9 & 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.
   Un candidat est actuellement au point de rendez-vous D et on lui signale qu'il a oublié son dossard au point B. Devant le récupérer, il souhaite emprunter au maximum trois chemins. Combien a-t-il de possibilités ?
   c) Donner, le trajet correspondant à la distance la plus courte lui permettant d'aller récupérer son dossard.

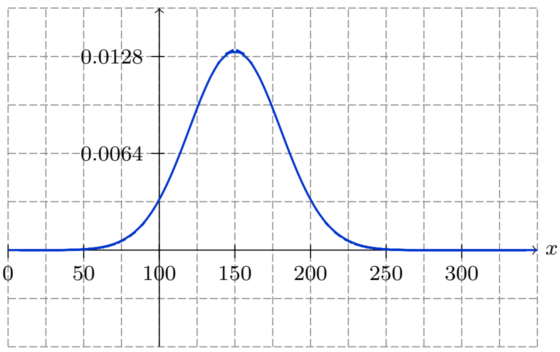
Exercice 4 (Polynésie, 2013). **(5 points)**
Commun à tous les candidats

On s'intéresse à une espèce de poissons présente dans deux zones différentes (zone 1 et zone 2) de la planète.

A. Étude de la zone 1

On note X la variable aléatoire qui à chaque poisson observé dans la zone 1 associe sa taille en cm.

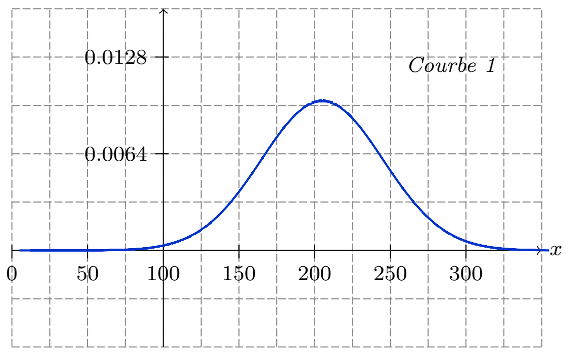
Une étude statistique sur ces poissons de la zone 1 a montré que la variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance μ et d'écart type $\sigma = 30$. La courbe de la densité de probabilité associée à X est représentée ci-contre.

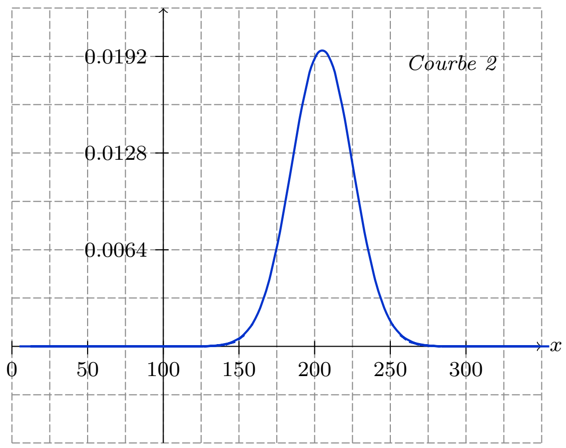


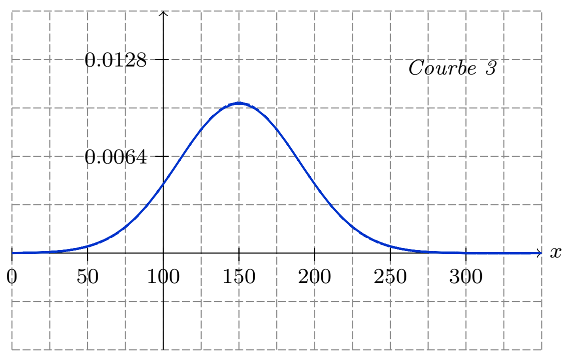
1. Par lecture graphique, donner la valeur de μ.
2. On pêche un de ces poissons dans la zone 1. Donner la probabilité, arrondie à 10^{-2}, d'avoir un poisson dont la taille est comprise entre 150 cm et 210 cm.
3. Un poisson de cette espèce de la zone 1 est considéré comme adulte quand il mesure plus de 120 cm.
   On pêche un poisson de l'espèce considérée dans la zone 1. Donner la probabilité, arrondie à 10^{-2}, de pêcher un poisson adulte.
4. Un pêcheur attrape un poisson dans la zone 1. Sachant que le poisson est adulte, quelle est la probabilité qu'il mesure moins de 180 cm ?
5. On considère un nombre k strictement plus grand que la valeur moyenne μ.
   Est-il vrai que $P(X < k) < 0,5$? Justifier.

B. Étude de la zone 2

1. Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque poisson de l'espèce considérée de la zone 2, associe sa taille en cm. On admet que la variable aléatoire Y suit la loi normale d'espérance $\mu' = 205$ et d'écart type $\sigma' = 40$.







2. À l'aide des données précédentes, comparer les deux espèces.

Exercice 5 (Asie, 2014). **(4 points)**

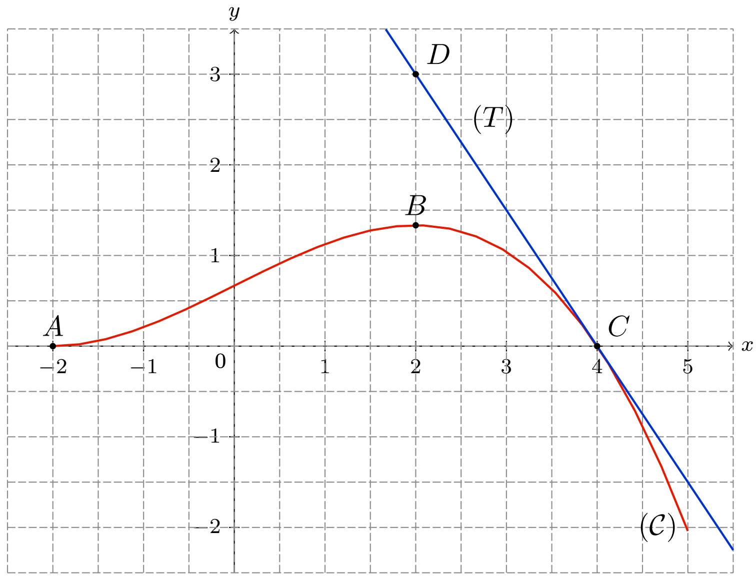
Commun à tous les candidats

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2\ ;\ 5]$, croissante sur $[-2\ ;\ 2]$ et décroissante sur $[2\ ;\ 5]$.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

La courbe $(\mathcal{C})$ tracée ci-dessous représente la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé ; elle passe par les points $\mathrm{A}(-2\ ;\ 0)$; $\mathrm{B}\left(2\ ;\ \frac{4}{3}\right)$ et $\mathrm{C}(4\ ;\ 0)$.

Elle admet en chacun des points A et B une tangente parallèle à l'axe des abscisses et sa tangente (T) au point C passe par le point D$(2\,;\,3)$.



Pour chacune des quatre propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. La justification peut reposer sur le graphique ou sur un calcul.

Proposition 1 : $f'(4) = -\dfrac{2}{3}$

Proposition 2 : La fonction f est concave sur $[-2\ ;\ 2]$.

Proposition 3 : $2 \leqslant \displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 3$

Proposition 4 : L'équation $f(x) = \ln 2$ n'admet pas de solution sur $[-2\ ;\ 5]$.

Exercice 1 (Pondichéry, 2015). **(6 points)**

Commun à tous les candidats

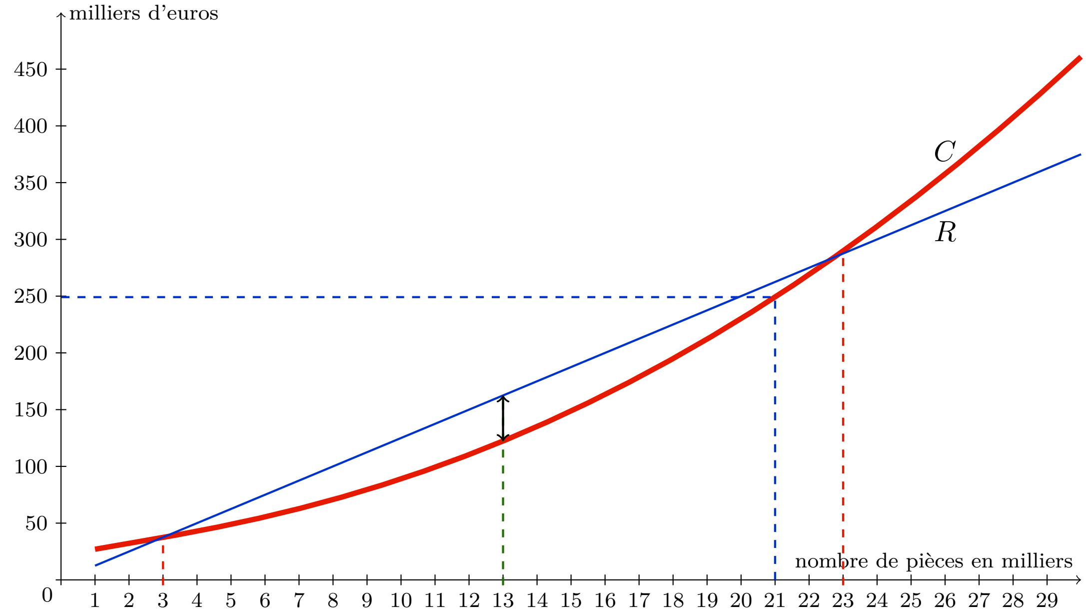
Une entreprise produit et vend des composants électroniques.

Sa capacité mensuelle de production est comprise entre 1000 et 30000 pièces. On suppose que toute la production est commercialisée.

Les parties A *et* B *peuvent être traitées de façon indépendante.*

Partie A

On donne ci-dessous R et C les représentations graphiques respectives des fonctions recette et coût sur l'intervalle [1 ; 30].



Par lecture graphique, donnons une estimation des valeurs demandées.

1. Le coût de production de 21000 pièces est de 250 000 euros environ.
2. L'entreprise réalise un bénéfice lorsque la recette est plus elevé que le coût, graphiquement lorsque la courbe C est au-dessus de R. Ainsi, on observe que l'entreprise réalise un bénéfice pour une production comprise entre 3 et 23 milliers de pièces environ.
3. Dans l'intervalle [3; 23], plus l'écart entre le coût et la recette est important plus le bénéfice est important. Ainsi, le bénéfice est maximal lorsque l'entreprise produit et vend environ 13 milliers de pièces.

Partie B

Le bénéfice en milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x milliers de pièces, est donné sur l'intervalle [1 ; 30] par

$$B(x) = -0,5x^2 + 6x - 20 + 2x\ln x.$$

1. Soit x dans l'intervalle[1; 30], alors

$$B'(x) = -0.5 \times 2x + 6 \times 1 - 0 + (2 \times ln(x) + 2x \times \frac{1}{x}) = -x + 6 + 2\ln(x) + 2 = -x + 8 + 2\ln x$$

2. On admet que $B''(x) = -1 + \dfrac{2}{x}$, où B'' est la dérivée seconde de B sur l'intervalle $[1\,;\,30]$.
   Rappelons que la fonction B'' est la fonction dérivée de B', commençons donc par étudier le signe de B''. Soit x dans l'intervalle $[1;\,30]$, alors x est en particulier strictement positif et

$$\begin{aligned} B''(x) &\leq 0 \\ -1 + \frac{2}{x} &\leq 0 \\ \frac{2}{x} &\leq 1 \\ 2 &\leq 1 \times x && \text{l'inégalité ne change pas de sens car on multiplie par } x > 0 \\ 2 &\leq x \end{aligned}$$

   C'est-à-dire $B''(x)$ est négatif uniquement lorsque x appartient à l'intervalle $[2;\,30]$. En reprenant le calcul, on note aussi que B'' s'annule uniquement lorsque x vaut 2. On en déduit le tableau de variation de B' :

x	1		2		α		30
$B''(x)$		$+$	0			$-$	
$B'(x)$	7	$\nearrow$	$6 + 2\ln(2) \simeq 8.32$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-22 + 2\ln(30) \simeq -15.2$

   On rappelle que $B'(1) = -1 + 8 + 2\ln(1) = 7$, $B'(2) = -2 + 8 + 2\ln(2) = 6 + 2\ln(2) \simeq 8.32$ et $B'(30) = -30 + 8 + 2\ln(30) = -22 + 2\ln(30) \simeq -15.2$.

3. a) Après avoir complété le tableau de variation précédent, on note que $B'(x) \geq 7$ sur l'intervalle $[1;\,2]$ donc ne s'annule pas. Sur l'intervalle $[2;\,30]$, la fonction B' est continue et strictement décroissante prenant donc les valeurs de $6{+}2\ln(2) > 0$ à $-22{+}2\ln(30) < 0$ une et une seule fois. Ainsi, l'équation $B'(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1\,;\,30]$.
   b) À l'aide d'une table, réalisée sur la calculatrice (avec un pas de 0.001), on déduit que $\alpha \simeq 13.153$.

4. D'après le tableau de variation de B' et par définition de α, on déduit que $B'(x)$ est positif sur l'intervalle $[1;\,\alpha]$ et négatif sur l'intervalle$[\alpha;\,30]$ d'où le tableau de variation de la fonction bénéfice B sur ce même intervalle :

x	1		α		30
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$	-14.5	$\nearrow$	$B(\alpha)$	$\searrow$	$-290 + 60\ln(30)$

5. D'après le précédent tableau de variations, le bénéfice est maximal pour une prodution de $\alpha \simeq 13.153$ milliers de pièces, à l'unité près et le bénéfice serait donc de $B(\alpha) \simeq 40\,000$ euros, au milliers près.

Exercice 2 (Nouvelle-Calédonnie, 2013)**.** **(5 points)**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le premier janvier 2014, Monica ouvre un livret d'épargne sur lequel elle dépose 6 000 euros.

Elle décide de verser 900 euros sur ce livret chaque premier janvier à partir de 2015 jusqu'à atteindre le plafond autorisé de 19 125 euros.

On suppose dans tout cet exercice que le taux de rémunération du livret reste fixé à 2,25 % par an et que les intérêts sont versés sur le livret le premier janvier de chaque année.

Première partie

1. Le montant des intérêts pour l'année 2014 est de $6\,000 \times \frac{2.25}{100} = 135$ euros. Ainsi, au premier janvier 2015, Monica disposera d'un montant de $600 + 135 + 900 = 7\,035$ euros sur son livret.
2. On note M_n le montant en euros disponible sur le livret le premier janvier de l'année $2014 + n$.

   On a donc $M_0 = 6\,000$ et $M_1 = 7\,035$. Ensuite, augmenter une quantité de 2.25% revient à multiplier par $1 + \frac{2.25}{100} = 1.0225$. D'où, le montant disponible l'année suivante est donné par la relation de récurrence : $M_{n+1} = 1,0225 M_n + 900$.

Deuxième partie

Monica souhaite savoir en quelle année le montant de son livret atteindra le plafond de 19 125 euros.

1. Première méthode :

   On considère la suite (G_n) définie pour tout entier naturel n, par $G_n = M_n + 40\,000$.

   a) Soit n un entier naturel, alors

   $$\begin{aligned} G_{n+1} &= M_{n+1} + 40\,000 \\ &= 1.0225 M_n + 900 + 40\,000 \\ &= 1.0225(G_n - 40\,000) + 40\,900 \\ &= 1.0225 G_n - 1.0225 \times 40\,000 + 40\,900 \\ &= 1.0225 G_n \end{aligned}$$

   d'où la suite (G_n) est une suite géométrique de raison 1,0225, de premier terme $G_0 = M_0 + 40\,000 = 46\,000$.

   b) On en déduit que $G_n = G_0 \times q^n = 46\,000 \times 1.0225^n$ pour tout entier naturel n. D'où, pour tout entier naturel n, $M_n = G_n - 40\,000 = 46\,000 \times 1,0225^n - 40\,000$.

   c) D'après la question précédente, on a

   $$\begin{aligned} M_n &\geq 19\,125 \\ 46\,000 \times 1.0225^n - 40\,000 &\geq 19\,125 \\ 46\,000 \times 1.0225^n &\geq 59\,125 \\ 1.0225^n &\geq \frac{59\,125}{46\,000} \\ \ln(1.0225^n) &\geq \ln(\frac{59\,125}{46\,000}) \\ n \times \ln(1.0225) &\geq \ln(\frac{59\,125}{46\,000}) \\ n &\geq \frac{\ln(\frac{59\,125}{46\,000})}{\ln(1.0225)} \\ n &\geq 11.28 \end{aligned}$$

   Ainsi, le plafond de 19 125 euros sera atteint au bout de 12 années.

2. Deuxième méthode :
   L'algorithme ci-dessous permet de déterminer l'année à partir de laquelle le plafond sera atteint.

LIGNE		
1	**Variables :**	MONTANT est un réel
2		ANNÉE est un entier
3		
4	**Initialisation :**	Affecter à MONTANT la valeur 5000
5		Affecter à ANNÉE la valeur 2014
6		
7	**Traitement :**	Tant que MONTANT < 19125
8		Affecter à MONTANT la valeur $1,0225 \times$ MONTANT $+ 1000$
9		Affecter à ANNÉE la valeur ANNÉE +1
9		Afficher MONTANT
10		
11	**Sortie :**	Afficher « Le plafond du livret sera atteint en … »
12		Afficher ANNÉE

   a) Il suffit remplacer 6000 par 5000 dans la ligne 4 et 900 par 1000 dans la ligne 8 de cet algorithme pour qu'il détermine l'année à partir de laquelle le plafond est atteint pour un montant versé initialement de 5 000 euros et des versements annuels de 1 000 euros.
   b) Si à la ligne 10 de l'algorithme on ajoute « afficher MONTANT » alors l'algorithme permet d'afficher également à l'écran le montant disponible au premier janvier de chaque année.

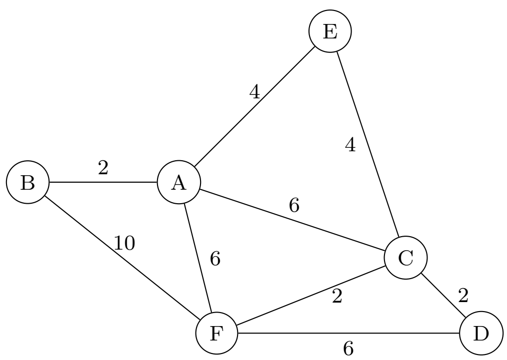
Exercice 3 (Asie juin 2012)**.** Une association organise un rallye sportif en VTT : six zones de regroupement sont déterminées et sont reliées par des chemins.

Ce parcours est modélisé par le graphe ci-dessous, où les sommets de A à F représentent les zones de regroupement, et les arêtes les chemins.

Les arêtes sont pondérées par les distances, exprimées en kilomètres, nécessaires pour parcourir ces chemins.

Les candidats sont positionnés initialement sur la zone A et doivent, après avoir parcouru tous les chemins, revenir à la zone initiale.

Chaque fois qu'un candidat emprunte pour la première fois un chemin il doit déposer, à un endroit précis, un jeton personnalisé, attestant son passage.



1. Le graphe est constitué de 9 arêtes ainsi, il faut donner au minimum 9 jetons à chaque candidat.
2. On note que le graphe est connexe et que tous les sommets du graphe sont de degré pair, ainsi, d'après le théorème d'Euler, il existe un cycle Eulérien. En d'autres termes, un candidat peut faire le parcours, en empruntant tous les chemins une fois et une seule et ceci quel que soit le point de départ.
3. Soit M la matrice associée au graphe G (on ordonne les sommets dans l'ordre alphabétique).

   a) La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   b) On donne les matrices $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 9 & 4 & 6 & 9 \\ 6 & 2 & 4 & 3 & 3 & 6 \\ 9 & 4 & 6 & 6 & 6 & 9 \\ 4 & 3 & 6 & 2 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 6 & 3 & 2 & 4 \\ 9 & 6 & 9 & 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

   Un candidat est actuellement au point de rendez-vous D et on lui signale qu'il a oublié son dossard au point B. Devant le récupérer, il souhaite emprunter au maximum trois chemins.

   Sur la graphe, on voit qu'il n'a pas de chemin direct (les sommets D et B ne sont pas adjacents). De la matrice M^2, on déduit qu'il y a 1 chemin de longueur 2 : $D-F-B$ et la matrice M^3, on déduit qu'il y a 3 chemins de longueur 3 : $D-C-A-B$, $D-F-A-B$ et $D-C-F-B$.

   c) Déterminons le trajet le plus court à l'aide de l'algorithme de Dijkstra :

	D	F	E	C	A	B
D	0	(6,D)	∞	(2,C)	∞	∞
C, 2	|	$(4,C) < (6,D)$	(6,C)	|	(8,C)	∞
F, 4	|	(4,C)	(6,C)	|	$(10,F) > (8,C)$	$(14,F)$
E, 6	|	|	|	|	$(10,E) > (8,C)$	$(14,F)$
A, 8	|	|	|	|	(8,C)	(10,A)

   Donc le chemin le plus court du point D au point B est $D-C-A-B$ et fait 10km.

Exercice 4 (Polynésie, 2013). **(5 points)**

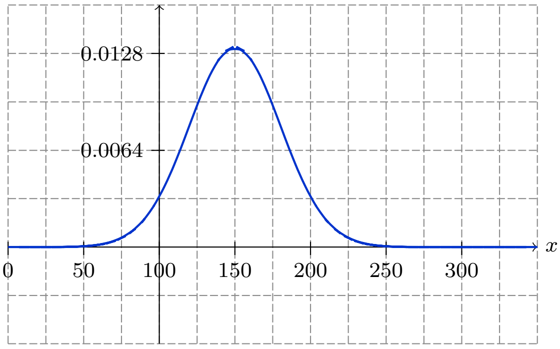
Commun à tous les candidats

On s'intéresse à une espèce de poissons présente dans deux zones différentes (zone 1 et zone 2) de la planète.

A. Étude de la zone 1

On note X la variable aléatoire qui à chaque poisson observé dans la zone 1 associe sa taille en cm.

Une étude statistique sur ces poissons de la zone 1 a montré que la variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance μ et d'écart type $\sigma = 30$. La courbe de la densité de probabilité associée à X est représentée ci-contre.



1. Sur la courbe, on note que l'axe de symétrie de la densité est d'équation $x = 150$, d'où $\mu = 150$.
2. On pêche un de ces poissons dans la zone 1. D'après le cours,

$$P(\mu-2\sigma \leq X \leq \mu+2\sigma) = P(150-2\times 30 \leq X \leq 150+2\times 30) = P(90 \leq X \leq 210) \simeq 0.95$$

Ainsi, par symétrie de la densité autour de l'axe $x = 150$, on déduit que la probabilité d'avoir un poisson dont la taille est comprise entre 150 cm et 210 cm, est

$$P(150 \leq X \leq 210) = \frac{1}{2} \times P(90 \leq X \leq 210) \simeq \frac{0.95}{2} \simeq 0.48$$

arrondie à 10^{-2}.

3. Un poisson de cette espèce de la zone 1 est considéré comme adulte quand il mesure plus de 120 cm.
On pêche un poisson de l'espèce considérée dans la zone 1. D'après le cours :

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = P(150 - 30 \leq X \leq 150 + 30) = P(120 \leq X \leq 180) \simeq 0.68$$

et encore une fois par symétrie de la densité :

$$P(120 \leq X \leq 150) = \frac{1}{2}P(120 \leq X \leq 180) \simeq \frac{1}{2} \times 0.68 = 0.34 \qquad \text{et} \qquad P(150 \leq X) = 0.5$$

D'où la probabilité de pêcher un poisson adulte est

$$P(120 \leq X) = P(120 \leq X \leq 150) + P(150 \leq X) \simeq 0.34 + 0.5 = 0.84$$

à 10^{-2} près.

4. Un pêcheur attrape un poisson dans la zone 1. Sachant que le poisson est adulte, la probabilité qu'il mesure moins de 180 cm est de

$$P_{(X\geq 120)}(X \leq 180) = \frac{P(120 \leq X \leq 180)}{P(X \geq 120)} \simeq \frac{0.68}{0.84} \simeq 0.81$$

environ.

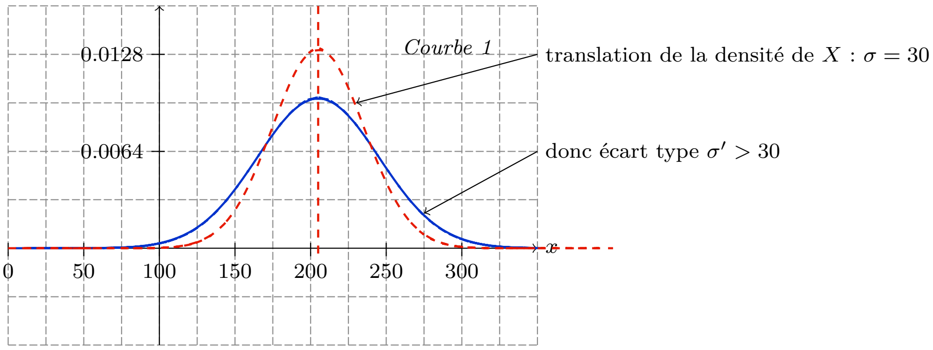
5. On considère un nombre k strictement plus grand que la valeur moyenne μ. Alors,

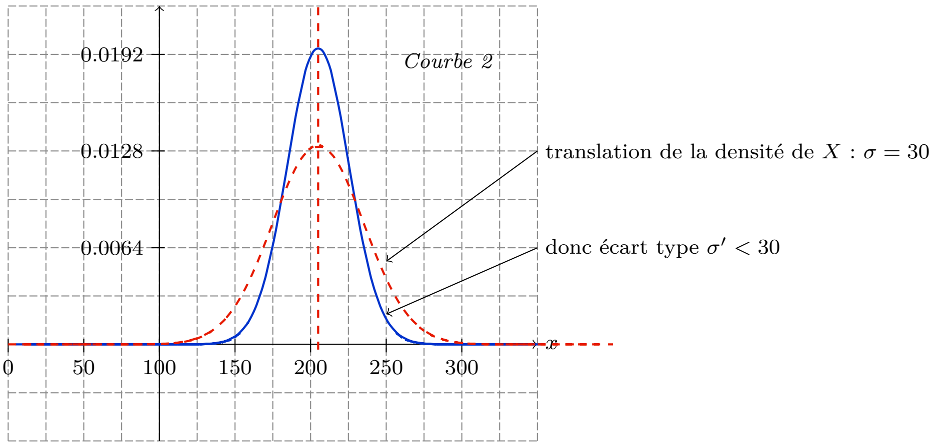
$$P(X < k) = \underbrace{P(X \leq \mu)}_{=0.5} + \underbrace{P(\mu < X < k)}_{>0} > 0.5$$

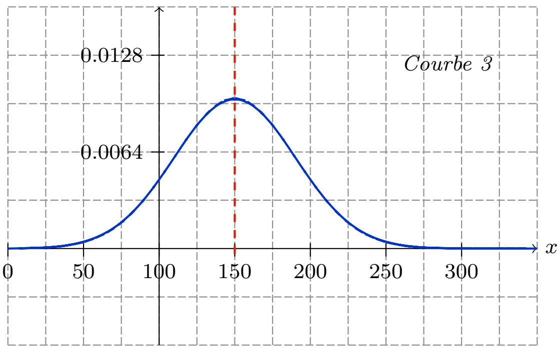
Donc, il n'est pas vrai que $P(X < k) < 0,5$.

B. Étude de la zone 2

1. Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque poisson de l'espèce considérée de la zone 2, associe sa taille en cm. On admet que la variable aléatoire Y suit la loi normale d'espérance $\mu' = 205$ et d'écart type $\sigma' = 40$. Considérons les trois courbes suivantes :







Comme l'espérance de Y est 205, on peut éliminer la courbe 3 car symétrique par rapport à la droite vertical d'équation $x = 150$. L'écart type de Y est supérieur à l'écart type de X, ainsi la répartition des probabilités est plus diffuse et donc le maximum atteint pas la densité de Y est plus petit que celui de X. D'où la courbe 1 représente la densité de probabilité de la variable aléatoire Y.

2. La taille moyenne des poissons dans la zone 2 est beaucoup plus grande (de 55 cm) mais la répartition des tailles au sein des poissons dans la zone 2 est sensiblement plus hétérogène.

Exercice 5 (Asie, 2014). **(4 points)**

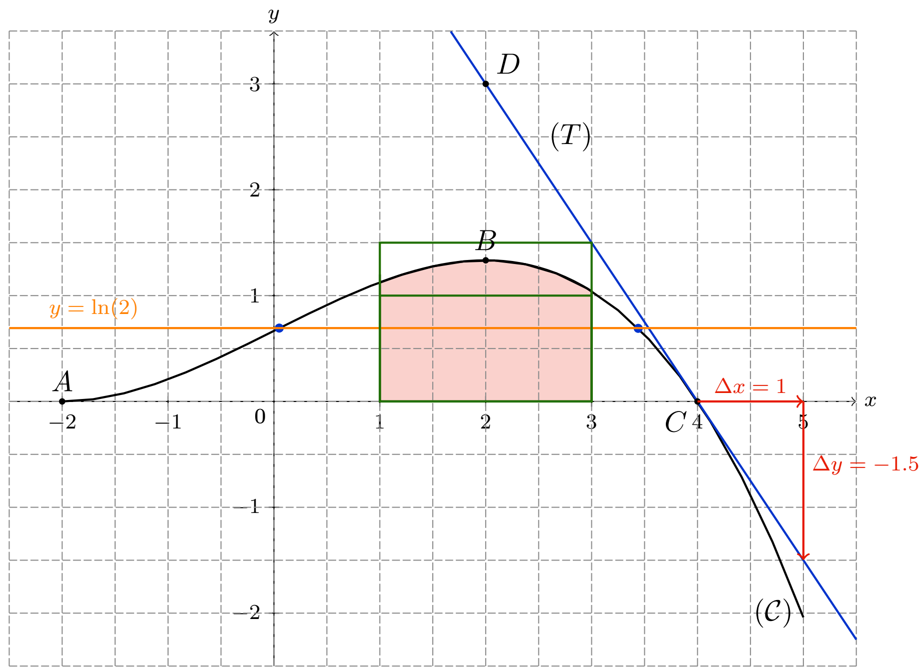
Commun à tous les candidats

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2 ; 5]$, croissante sur $[-2 ; 2]$ et décroissante sur $[2 ; 5]$.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

La courbe $(\mathcal{C})$ tracée ci-dessous représente la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé ; elle passe par les points $\mathrm{A}(-2\ ;\ 0)$; $\mathrm{B}\left(2\ ;\ \frac{4}{3}\right)$ et $\mathrm{C}(4\ ;\ 0)$.

Elle admet en chacun des points A et B une tangente parallèle à l'axe des abscisses et sa tangente (T) au point C passe par le point $\mathrm{D}(2\,;\,3)$.



Pour chacune des quatre propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. La justification peut reposer sur le graphique ou sur un calcul.

Proposition 1 : $f'(4) = -\dfrac{2}{3}$

Fausse car $f'(4) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1.5}{1} = -\frac{3}{2} \neq -\dfrac{2}{3}$

Proposition 2 : La fonction f est concave sur $[-2\ ;\ 2]$.

Fausse car la fonction f est convexe sur $[-2\ ;\ -1]$.

Proposition 3 : $2 \leqslant \displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 3$

Vraie. Graphiquement, on observe que pour tout x dans l'intervalle $[1; 3]$, $1 \leq f(x) \leq 1.5$, *d'où*

$$\int_1^3 1\,\mathrm{d}x \leq \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_1^3 1.5\,\mathrm{d}x$$
$$(3-1)\times 1 \leq \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x \leq (3-1)\times 1.5$$
$$2 \leq \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x \leq 3$$

Proposition 4 : L'équation $f(x) = \ln 2$ n'admet pas de solution sur $[-2\ ;\ 5]$.

Fausse. Graphiquement, la courbe $\mathcal{C}$ coupe deux fois la droite d'équation $y = \ln(2)$, *c'est-à-dire* $f(x) = \ln(2)$ *admet deux solutions.*