Accompagnement personnalisé

O. Lader

1 Les fractions

Propriété 1.1. *Simplification dans une fraction :*

$$\frac{a \times \cancel{x}}{b \times \cancel{x}} = \frac{a}{b}$$

Exemples.

$\frac{4}{6} = \frac{2\times\cancel{2}}{3\times\cancel{2}} = \frac{2}{3}$,

$\frac{15}{25} = \frac{3}{5}$,

$\frac{12x}{x^2} = \frac{12}{x}$.

Propriété 1.2. *Pour tous nombres a, b, c et d avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$, on a :*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

Pour additionner deux fractions, il faut les réduire au même dénominateur.

Exemples.

1) $\frac{5}{6} + \frac{3}{4} = \frac{5\times4+3\times6}{6\times4} = \frac{38}{24} = \frac{19}{12}$. Avec, un peu d'astuce, on aurait pu remarquer que le plus petit commun multiple (ppcm) des dénominateurs 6 et 4 est 12, ainsi : $\frac{5}{6} + \frac{3}{4} = \frac{5\times2+3\times3}{12} = \frac{19}{12}$.
2) Soit x un nombre quelconque,

$$\frac{7}{x-1} + \frac{x}{x+1} = \frac{7(x+1)+x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+6x+7}{x^2-1}$$

Définition 1.3. Le produit de $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$ est

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a\times c}{b\times d}$$

Exemples.

$\frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$,
$\frac{12}{11} \times \frac{3}{10} = \frac{36}{110} = \frac{18}{55}$.

Propriété 1.4. *Diviser par une fraction revient à multiplier par son inverse, c'est-à-dire, on a :*

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

Exercice 1. Simplifier les expressions suivantes :

1)
$$(\frac{2}{7} + \frac{2}{5})\frac{3}{4}, \qquad \frac{\frac{12}{5} + \frac{13}{2}}{\frac{16}{15}}, \qquad \frac{\frac{16}{21}}{\frac{12}{7} + \frac{36}{49}}$$

2)
$$\frac{\frac{13}{29} - \frac{73}{216}}{\frac{691}{25056}}, \quad \frac{\left(2\frac{8}{11} + 3\frac{31}{33}\right)\frac{3}{20}}{\left(1\frac{8}{9} + 3\frac{1}{12}\right)\frac{36}{179}}, \quad \frac{16}{\frac{17}{24}} - \frac{\frac{16}{17}}{24}, \quad \frac{\left(\frac{5}{8} + \frac{3}{4}\right)\frac{2}{3}}{\left(\frac{6}{5} + \frac{8}{9}\right)11}$$

2 Développer, factoriser

Définition 2.1. Développer : c'est transformer un produit de facteurs en une somme de termes. Factoriser : c'est transformer une somme de termes ayant un facteur comment en un produit de facteurs.

Exemples. Voici quelques exemples où l'on développe :
$3(2 + \sqrt{5}) = 6 + 3\sqrt{5}$,
$x(2 - x) = 2x - x^2$,
$(x + 1)(1 - x) = x - x^2 + 1 - x = 1 - x^2$.
Formellement, le fait de développer peut être représenté de la manière suivante :

$$a\,(b + c) = a\,b + a\,c \qquad (\star)$$

Exercice 2. Développer les expressions suivantes :

1) $2(x + 3) =$
2) $12(x^2 - x + 1) =$
3) $2x(x^3 + x - 1) =$
4) $(x + 1)(x + 2) =$
5) $(2x + 4)(x^2 - 12) =$
6) $x(2 + x + x^2) =$
7) $(a + b)(a - b) =$

Passons à la factorisation : Le fait de factoriser peut être représenté de la manière suivante :

$$a\,b + a\,c = a\,(b + c)$$

On remarque que pour développer, on lit l'identité ($\star$) de la gauche vers la droite et pour factoriser, on lit l'identité ($\star$) dans l'autre sens de la droite vers la gauche. En quelque sorte, les actions de développer et de factoriser sont réciproque l'une de l'autre.

Exemples.

1) $2x + 4 = 2(x + 2)$,
2) $45x^2 + x = x(45x + 1)$,
3) $ab^2 - 3a = a(b^2 - 3)$,
4) $72x^2 + 22x = 2x(36x + 11)$.

Exercice 3. Factoriser les expressions suivantes :

1) $3x + 9 =$
2) $2xy + x =$
3) $5x^2 - 6x =$
4) $12x^3 + 8x =$

Propriété 2.2. *Soient a, b, c et d trois nombres, on a*

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Exemples.

1) $(2x + 4)(x + y) = 2x^2 + 2xy + 4x + 4y$,
2) $(3x - 2)(x - 4) = 3x^2 - 12x - 2x - 8$,
3) $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.

Exercice 4. Calculer les valeurs numériques des expressions suivantes

$(a + b)(a - b)$

$a^2 - b^2$

et les comparer lorsque $a = 4$, $b = 1$ et $a = \frac{3}{2}$ et $b = \frac{1}{4}$.

Propriétés 2.3 (identités remarquables)**.** *Soient a et b deux nombres, on a*

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2, \\ (a + b)(a - b) &= a^2 - b^2. \end{aligned}$$

Exemples.

1) $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$,
2) $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$,
3) $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$,
4)

$$\begin{aligned} (a + b + c)^2 &= (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) \end{aligned}$$

5)

$$\begin{array}{rcl}(a+b)^3 & = & (a+b)(a+b)^2 \\ & = & (a+b)(a^2+2ab+b^2) \\ & = & (a^2+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3 \\ & = & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{array}$$

Comme application, on déduit que $(x+1)^3 = x^3+3x^2+3x+1$.

Exercice 5. Réécrire les expressions suivantes différemment :

1) $(x+5)^2 =$
2) $(2x-3)^2 =$
3) $x^2+10x+25 =$
4) $x^2-6x+9 =$
5) $(x-12)(x+12) =$
6) $x^2-16 =$

Exercice 6.

1) Vérifier l'identité : $(a+b-c)(a+b+c) = (a+b)^2 - c^2$.
2) Utiliser cette identité pour calculer $(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})$.

Exercice 7. Trouver x et y tel que $x^2-y^2=77$ et $x-y=11$.

3 Ensembles de nombres

Définition 3.1. 1) L'ensemble des nombres entiers naturels est noté $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

2) L'ensemble des nombres entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

3) L'ensemble des nombres entiers décimaux est noté $\mathbb{D}$. C'est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule. Par exemple, 0.33 est un nombre décimal mais $\frac{1}{3}$ n'en est pas un.
4) L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$. C'est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec a un entier relatif et b un entier relatif non nul.
5) L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$. Cet ensemble complète d'une certaine manière l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$, on y a ajouté les racines carrés et encore beaucoup d'autres nombres.

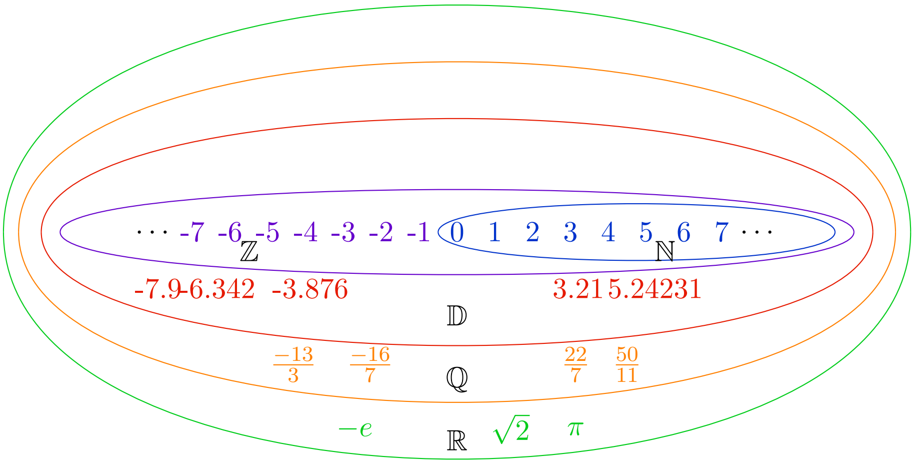


FIGURE 1 – Les ensembles de nombres

Exercice 8. Calculer en effectuant d'abord le contenu de chaque parenthèse :

$48 + (24 + 30) + (12 - 5) =$

$28 + (17 - 12) + (17 + 12) =$

$48 - 75 + (23 - 5) + 28 =$

$(42 - 17) - (28 - 9 + 4) =$

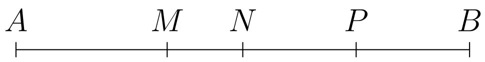
Exercice 9. Supprimer les parenthèses et écrire le plus simplement possible les résultats :

1) $28 - (41 - 17) + (39 - 4) =$
2) $(14 - 5 + 18) - (41 - 23 - 9) =$
3) $(a + b) + (a - b) =$
4) $(a + b) - (a - b) =$
5) $(2a + 3b) + (a + b) =$
6) $(2a + 3b) - (a + b) =$
7) $(2x - y - 3) + (x + y + 1) =$
8) $(4x + 2y - 5) - (x + 4y + 6) =$

Exercice 10. Calculer les expressions suivantes :

1) $(3x + 2y - z) + (x + 2y + z) - (x - 3y - 2z) =$
2) $(3x - y - 2z) - (x - 2y + z) + (x - 2y - z) =$

Exercice 11. Sur une droite (AB), on a placé entre A et B trois points M, N et P dans cet ordre.



On donne $AB = 6$ cm, $AM = 2$ cm, $MP = 2.5$ cm, $PN = 1.5$ cm.
Calculer les longueurs : AN, PB et BM.

Exercice 12. Le professeur a demandé de calculer l'expression

$$5a - (3b - c) + a - b$$

Un élève étourdi a oublié de mettre les parenthèses.
Comparer le résultat qu'il a trouvé et celui qui lui était demandé.
Si $c = 12$, de combien s'est-il trompé, en plus ou en moins ?

Exercice 13. Un nombre entier quelconque est représenté par la lettre a. Écrire les deux nombres entiers qui le précèdent et les deux nombres entiers qui le suivent. Calculer la somme des 5 nombres ainsi obtenus. Quels sont ces nombres si leur somme est égale à 145 ?

Exercice 14. Effectuer les additions soustractions suivantes :

1) $\frac{5}{7} + \frac{1}{2}$
2) $\frac{2}{15} + \frac{1}{12}$
3) $\frac{8}{12} + \frac{3}{15}$
4) $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) \times \frac{3}{5} + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) \times \frac{3}{4}$

Exercice 15. Simplifier les fractions suivantes :

1) $\frac{a^2+2a}{3a}$
2) $\frac{a^2+ab}{5a}$
3) $\frac{2a^2-8ab}{4ab}$

Exercice 16. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1) $4x + 6 = x + 9$,
2) $7x - 6 = 3 - 5x$,
3) $\frac{1}{3}x + \frac{5}{7} = \frac{1}{11}x + 15$,
4) $\frac{3}{2} - \frac{x-1}{4} = \frac{x-3}{6}$,

5) $x - \frac{x-1}{4} = \frac{x+3}{2}$,
6) $\frac{3}{x-7} = \frac{2}{5}$,
7) $\frac{3x-1}{4x-2} = \frac{10}{13}$.

4 Problèmes

Exercice 17. Sur l'étalage d'un fruitier, il y a des pommes, des poires et des oranges. Le nombre des pommes est quintuple de celui des poires, et le nombre des oranges est la demi somme des deux autres nombres. Combien de fruits de chaque sorte y a-t'il, s'il y a en tout 855 fruits ?

Exercice 18. Un père a 30 ans de plus que son fils. Dans 4 ans, l'âge du père sera quadruple de celui du fils. Quel est l'âge du père et celui du fils ?

Exercice 19. La différence des côtés de deux carrés est 12 mètres. La différence de leurs surfaces est 504 mètres carrés. Calculer leurs dimensions.

Exercice 20. Trouver deux nombres impairs consécutifs dont la somme soit égale à 128.

Exercice 21. Trouver un nombre de deux chiffres, dont l'un est triple de l'autre, sachant que la somme des deux chiffres est égale à 16.

Exercice 22. Trouver un nombre de deux chiffres, dont l'un est double de l'autre, sachant que la somme des deux chiffres est égale à 16 ou à 42.

Exercice 23. A la fin de la 3e, il y a un tiers des élèves qui passe en section générale, $\frac{2}{5}$ en section professionnel et le reste, soit 11 élèves, en section technologique. Quel était le nombre des élèves de la première année ?

Exercice 24. Jean et Meddy possèdent ensemble 120 €. Jean dépense les $\frac{4}{9}$ de son argent et Meddy les $\frac{2}{5}$ du sien. Il reste alors à Jean deux fois moins qu'à Meddy. Trouver combien d'argent chacun d'eux avaient.

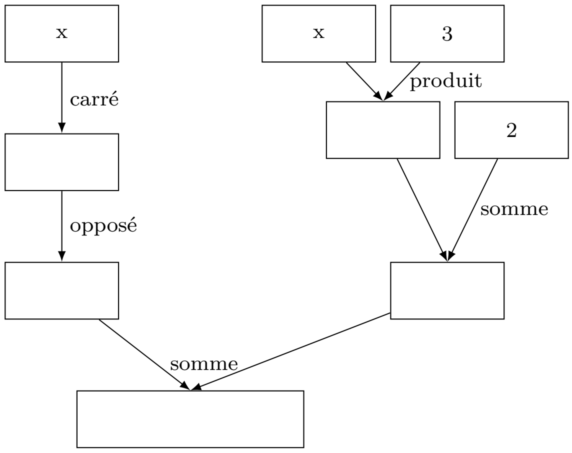
Exercice 25. Un père dit à son fils : il y a 3 ans, j'avais 7 fois l'âge que tu avais alors, et dans 7 ans, j'aurais 3 fois l'âge que tu auras toi-même. Quels sont les âges actuels du père et du fils ?

Exercice 26. Des élèves veulent jouer au ballon. En versant 2 € chacun, ils pourraient acheter un ballon, et il leur restera 4 €. Ils préfèrent verser 3.20 € chacun, ce qui leur permet d'en acheter deux. Quel est le nombre des élèves, et quel est le prix d'un ballon ?

Exercice 27. Un négociant achète des marchandises. Il en revend la moitié en faisant un bénéfice de 15% sur un prix d'achat de cette moitié, et le reste en faisant un bénéfice de 20% sur le prix de vente de ce reste. Le bénéfice total a été égal à 1 375 €. Quel est le prix d'achat des marchandises ?

5 Les fonctions

Exercice 1. Compléter le schéma et calculer le résultat pour $x = 2$, $x = -1$ et $x = -3$.



Exercice 2. Mettre le calcul $A(x) = x^2 - \frac{6}{x}$ en schéma, puis le calculer pour $x = -3$, $x = 2$ et $x = -1$.

Exercice 3. Dans chacun des cas suivants, vérifier que les trois écritures données correspondent à la même expression :

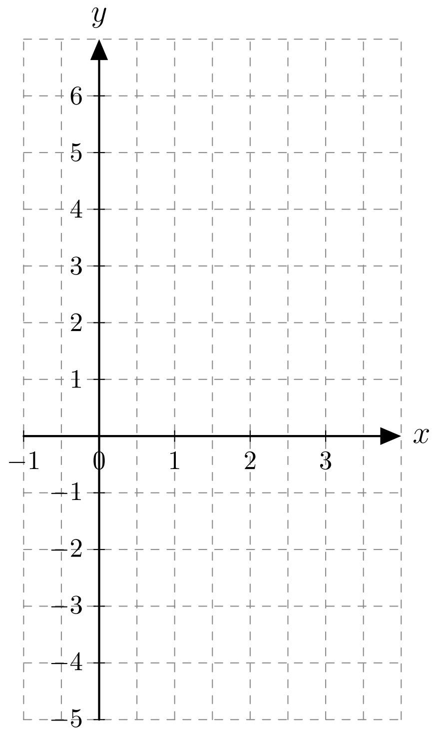
1) $(x-3)^2 - 4$; $x^2 - 6x + 5$; $(x-1)(x-5)$.
2) $\frac{2x-3}{1-x}$; $-2 + \frac{1}{x-1}$; $\frac{-2x+3}{x-1}$.
3) $-\frac{1}{4}(x+1)^2 + 1$; $\frac{-x^2-2x+3}{4}$; $(\frac{x+3}{2})(\frac{1-x}{2})$.

Exercice 4. Soit $f : [-0.5; 3.5] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{-8}{3}x(x-3)$.

1) Compléter le tableau suivant :

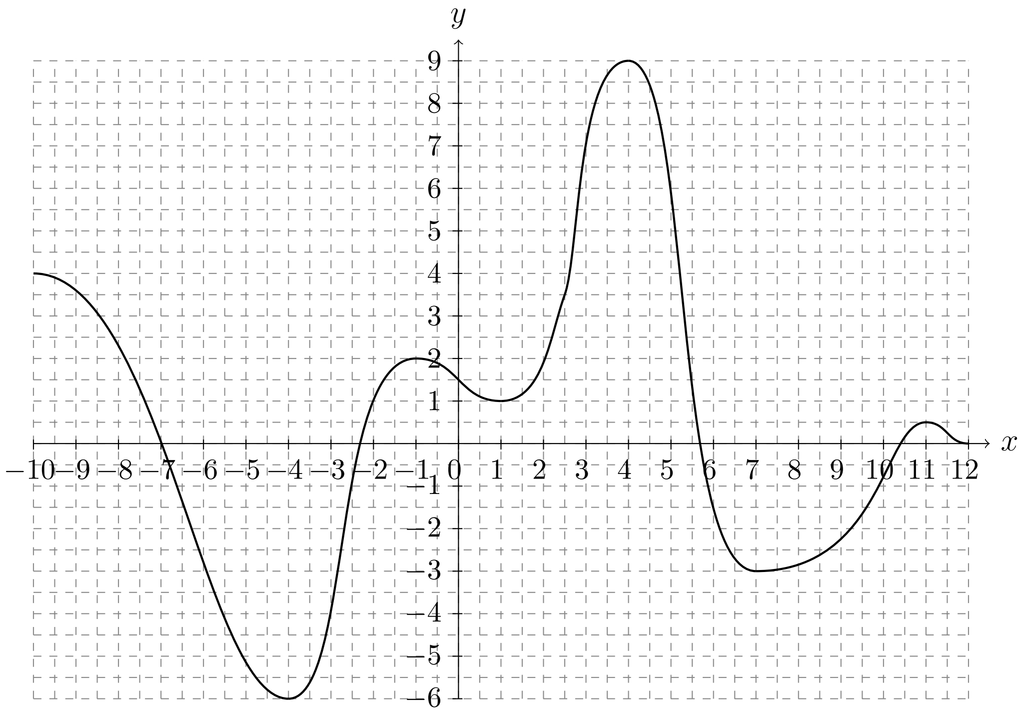
x	-0.5	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5
$f(x)$								

2) Tracer le graphe de la fonction.



3) Par lecture graphique, dresser le tableau de variation de la fonction f.
4) En déduire le maximum et en quelle valeur il est atteint.

Exercice 5. On considère une fonction $f : [-10;\ 12] \to \mathbb{R}$ dont voici la représentation graphique :



1) Déterminez graphiquement les valeurs de $f(-10)$, $f(-4)$, $f(7)$ et $f(12)$.
2) Déterminez graphiquement l'image de 1, l'image de 4 et l'image de 11.
3) Trouver un antécédent de 0.5.
4) Déterminer le maximum et le minimum de la fonction f et dire en quelles valeurs ils sont atteints.

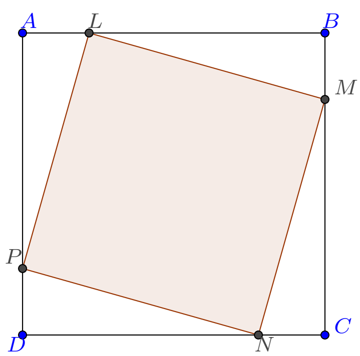
5) Résoudre les équations suivantes :
   a) $f(x) = 2$
   b) $f(x) > 0$
   c) $f(x) < 1$
6) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

Exercice 6 (Une formule de physique concernant la puissance électrique)**.** Le produit de la tension efficace U aux bornes d'un dipôle ohmique par l'intensité efficace I du courant qui le traverse est égal à la puissance électrique P que le dipôle consomme : $P = UI$, où U s'exprime en volts, I en ampères et P en watts.

1) Une lampe à incandescence porte les indications : 6V-100mA. Qu'est-ce que la formule permet alors de calculer ?
2) Envisager le cas d'une ampoule qui porte les indications $230V - 75W$.
3) Que peut-on dire à propos d'un fer à repasser qui ne porterait que la seule indication 1300W ?
4) Une rallonge de fil électrique porte les indications 230V-max 2200W. Peut-il être parcouru sans risque par un courant de 5A ? de 10A ? de 15A ? Rédiger un énoncé de problème et le résoudre.
5) Quelle fonction peut-on associer à cette situation ? Proposer plusieurs exemples.
6) Pour U donnée, s'interroger sur les accroissements de P et de I.
7) Pour P donnée, s'interroger sur les accroissements de U et de I.

Exercice 7. ABCD est un carré de côté 10cm. L, M, N et P sont respectivement les points des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$, tels que

$$AL = BM = CN = DP$$



1) Exprimer l'aire, notée $f(x)$, du quadrilatère LMNP en fonction de la longueur x du segment $[AL]$.

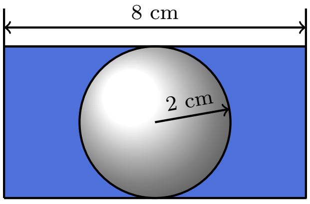
2) Préciser l'ensemble de définition de la fonction f.
3) Étudier les variations de la fonction f.
4) Déterminer pour quelle valeur de x l'aire du quadrilatère LMNP est minimale.

Exercice 8. Au cours d'une réaction chimique, on constate le dégagement d'un gaz ; on mesure son volume en cm^3.
Le volume de gaz est nul au début de l'expérience.

1) a) Au bout de 10 secondes, le volume mesuré est de $5\,\text{cm}^3$.
Si l'on suppose que le volume de gaz apparu est proportionnel au temps écoulé, déterminer quel volume sera dégagé au bout de 14 secondes.
   b) On mesure à nouveau le volume total de gaz obtenu 20 secondes après le début de l'expérience, et on obtient $20\,\text{cm}^3$. La supposition faite précédemment s'avère-t-elle acceptable ?
2) On cherche un nouveau modèle : le volume de gaz serait proportionnel au carré du temps écoulé :
$$V = k\,t^2$$
où V est le volume en cm^3, t le temps écoulé en secondes et k un nombre constant à déterminer
   a) Les données sont-elles en accord avec cette hypothèse ?
   b) Tracer la courbe donnant le volume en fonction du temps avec $0 \leq t \leq 20$.
   c) Déterminer le volume de gaz échappé durant les 14 premières secondes.

Exercice 9. Trouver cinq nombres entiers consécutifs sachant que la somme des carrés des quatre premiers nombres est égale à 42 fois le cinquième.

Exercice 10. Dans un récipient de forme cylindrique, de rayon 4 cm, on place bille de rayon 2 cm. On verse ensuite de l'eau jusqu'à recouvrir exactement la bille : la surface de liquide est tangente à la bille.



On retire alors la bille, et on la remplace par une autre bille dont le rayon R est egal à 2 cm.
Est-il possible d'obtenir de nouveau la même situation, c'est-à-dire que la surface de l'eau soit encore tangente à la bille ?

1) Calculer le volume d'eau versé dans le récipient.
2) a) Si l'on veut que la nouvelle bille puisse entrer dans le récipient, à quel intervalle appartient le rayon R ?
   b) En calculant de deux façons le volume "bille + eau" montrer qu'une bille est solution du problème posé si son rayon R vérifie l'équation :
$$R^3 - 24R + 40 = 0$$
Vérifier que 2 est une solution. Pouvait-on le prévoir ?
3) À l'écran d'une calculatrice, visualiser la courbe d'équation :
$$y = x^3 - 24x + 40$$
Jusifier graphiquement qu'il existe une bille de rayon autre que 2, solution du problème posé. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près de son rayon.

Pour aller plus loin :

1) Vérifier que $x^3 - 24x + 40$ s'écrit $(x-2)(x^2+2x-20)$ et que $x^2+2x-20 = (x+1)^2 - 21$.
2) Déterminer algébriquement le rayon exact R de la bille.

6 Physique chimie

Pourcentages, Proportionnalité

Exercice 1. Calculer les pourcentages suivants :

30% de 141	23% de 1540	2% de 1 000 000
50% de 121	25% de 728	20% de 1205
75% de 272	67 % de 77	500 % de 179

Exercice 2. Complétez le tableau suivant.

Notation en français	fraction	décimal	pour-cent
un millième	1/1000		0.1 %
un centième		0,01	
un dixième	1/10	0,1	
un cinquième	1/5		
un quart		0,25	
un tiers	1/3	0,33...	
une moitié		0,5	
deux tiers	2/3		
trois quarts		0,75	
	9/10		
99 centièmes	99/100		
999 millièmes		0,999	
le tout	1/1	1	
le double	2/1		

Exercice 3. Compléter le tableau suivant :

10^{-15}	10^{-12}				10^{-2}	10^{-1}	1	10^{1}	10^{2}	10^{3}	10^{6}			10^{15}
f	p	n	μ				-	da						P
fento	pico			mili			-					giga	téra	péta

Exercice 4.

1) Convertir 10 kg en g, en mg, en dg et en hg.
2) Convertir $0.12 \times 10^5 \mu$m en mètre, en mm et km.
3) Convertir 1.5 kg $.m^{-3}$ en kg $.L^{-1}$, en g $.m^{-3}$ et en g $.L^{-1}$.
4) Convertir 50 km . h^{-1} en m . s^{-1}.

Masse volumique et densité

- La relation entre la masse volumique ρ d'une espèce chimique, sa masse m et son volume V s'exprime par
$$\rho = \frac{m}{v}$$
où m est en kilogramme (kg), V en mètre cube (m^3) et ρ en $\mathrm{kg\,.\,m^{-3}}$.

- La relation entre la densité d d'une espèce chimique et sa masse volumique ρ est :
$$d = \frac{\rho}{\rho_{\text{eau}}}$$
avec $\rho_{\text{eau}} = 1\ \mathrm{kg}\,.L^{-1} = 1000\ \mathrm{kg\,.\,m^{-3}}$.
Les deux masses volumiques doivent être exprimées dans la même unité ; la densité n'a pas d'unité.

Exercice 5.

1) On détermine la masse m d'une espèce chimique à partir de sa masse volumique ρ grâce à la relation : $m = \rho \times V$. Justifier.
2) On détermine la masse m d'une espèce chimique à partir de sa densité d grâce à la relation : $m = d \times \rho_{\text{eau}} \times V$. Justifier.

Exercice 6.

1) Déterminer la masse de 10 m^3 d'eau sachant que $\rho_{\text{eau}} = 10^3\ \mathrm{kg\,.\,m^{-3}}$.
2) Un volume $V = 40.0$ mL d'acétone a une masse $m = 31.6$ g.
   - Donner l'expression littérale de la masse volumique ρ de l'acétone.
   - Déterminer sa valeur grâce aux données de l'exercice en précisant son unité.
3) La masse volumique de l'eau est $\rho_{\text{eau}} = 1\ \mathrm{kg}\,.L^{-1}$.
   a) Pour déterminer facilement la densité d d'une espèce chimique, faut-il exprimer la masse volumique de l'espèce chimique en $\mathrm{g}\,.L^{-1}$, en $\mathrm{kg}\,.L^{-1}$ ou en $\mathrm{kg\,.\,mL^{-1}}$?
   b) La masse volumique du toluène est $\rho = 0.87\ \mathrm{kg}\,.L^{-1}$. Déterminer la densité.

Caractéristiques d'un mouvement

Dans un référentiel donné, les caractéristiques d'un mouvement sont :

- la **trajectoire**, ligne formée par les positions successives d'un point du corps étudié au cours de son mouvement ;
- la **vitesse moyenne**, égale à :
$$v_m = \frac{d}{\Delta t} = \frac{d}{t_2 - t_1}$$
(d : distance parcourue (en m), $\Delta t = t_2 - t_1$; durée du trajet (en s), v_m (en $\mathrm{m\,.\,s^1}$).

Exercice 7. On considère un mobile qui se déplace à vitesse moyenne constante $v_m = 3\,\mathrm{m\,.\,s^1}$. Exprimer la distance $d(t)$ (en m) en fonction du temps t en secondes.

Exercice 8. Un cycliste doit parcourir une distance AB, aller et retour. Il fait l'aller à la vitesse constante de 25 km à l'heure et le retour à la vitesse constante de 20 km à l'heure. Il s'arrête une heure en B. La durée du trajet aller et retour est de 10h, arrêt compris.

1) Calculer la distance AB.
2) Représenter sur un même graphique le mouvement du cycliste depuis son départ de A jusqu'à son retour en A.

Exercice 9. Deux mobiles partent à 12h de 2 points A et B, distants de 5km. Ils vont dans le sens de A vers B ; celui qui part de A a une vitesse constante de 4 km à l'heure, celui qui part de B a une vitesse constante de 2 km à l'heure.

1) Donner l'équation du mouvement de chaque mobile.
2) Représenter graphiquement les mouvements.
3) Déterminer sur le graphique l'heure de leur rencontre.
4) Vérifier le résultat par le calcul.
5) Peut-on mesurer sur le graphique, la distance des 2 mobiles à un moment donné, à 13h30 par exemple.

Exercice 10. Un train ayant 300m de long se déplace à vitesse constante. Il met 36s à passer devant un observateur immobile. Quelle est sa vitesse ?
Un train marchant dans le sens inverse à vitesse constante aussi croise le premier en 24s, c'est-à-dire qu'il s'écoule 24s entre le moment où les têtes des trains arrivent en face l'un de l'autre et le moment où les queues de ces trains cessent d'être en face de l'autre. Ce deuxième train met 18s pour passer devant l'observateur immobile. Déterminer la vitesse et la longueur de ce deuxième train.
(on résoudra de préférence ce problème par un graphique)

Exercice 11. En augmentant la vitesse d'un train de 5 kilomètres par heure, on diminue de 45 minutes la durée du parcours. En diminuant la vitesse de 5 kilomètres par heure, on augmente de 1 heure la durée du parcours.
Calculer la vitesse du train et la longueur du parcours.

Exercice 12. Norbert, un garçon de 1.60m, lance verticalement et vers le haut un gros caillou avec une vitesse initiale de 9.8m/s.
Soit t le temps écoulé, en seconde, à partir de l'instant où Norbert lâche le caillou. En négligeant la résistance de l'air, on admet que la hauteur au sol H du caillou, en mêtre, est une fonction définie par :

$$H(t) = -4.9t^2 + 10.5t + 1.6$$

1) Montrer que Norbert lâche le caillou à hauteur de sa tête.
2) Montrer que, pour tout nombre réel t :

$$-4.9t^2 + 10.5t + 1.6 = -\frac{1}{10}(7t - 16)(7t + 1)$$

3) Trouver la solution positive t_0 de l'équation $H(t) = 0$. Donner une interprétation du résultat.
4) Sur l'intervalle $[0;\ \frac{16}{7}]$.
   a) Compléter le tableau suivant :

t	0	0.5	1	1.5	2	$\frac{16}{7}$
$H(t)$						

b) Tracer dans un repère orthogonal la courbe représentative de la fonction H.
On prendra 5 cm pour 1 seconde et 2 cm pour 2 mètre en ordonnée.

5) a) Déterminer graphiquement les variations de la fonction H et son maximum.
Dresser le tableau de variations de la fonction H.

b) En déduire le point le plus élevé atteint par le caillou et le temps qu'il a mis pour l'atteindre.

7 Problèmes d'évolution de populations

Nous allons utiliser un tableur pour estimer l'évolution de la taille d'une population à l'aide de trois modèles mathématiques différents.

7.1 Un modèle élémentaire, la progression arithmétique

1) Reproduire le tableau suivant sur le tableur :

	A	B
1	Année	Population
2	0	20
3		

2) Dans la cellule A3, taper `= A2 + 1`. Cliquer sur la cellule A3, puis sélectionner le petit carré en bas à droite de la cellule et le tirer vers le bas pour faire un copier coller jusqu'à la ligne 20.
Expliquer ce que l'ordinateur à fait.

On suppose que la population augmente de 2 individus tous les ans.

3) Quelle formule doit-on taper dans la cellule B3 pour augmenter la population de 2 ?
4) De même qu'avant, copier coller jusqu'à la ligne 20 la cellule B3.
5) Représenter par un diagramme en ligne la série de données en procédant ainsi :
   - Sélectionnez les deux colonnes du tableau avec la souris ;
   - Cliquez sur l'icône `"Diagramme"` dans la barre de menu.
   - Choisissez `XY (dispersion)` et la troisième proposition (ligne brisée) puis cliquez sur le bouton `suivant` ;
   - Cochez la case : `Première colonne comme étiquette` ;
   - Cliquez sur le bouton `suivant` puis `Terminer` ;
6) Quelle est la taille de la population au bout de 2, 5, 10 et 18 ans ?
7) Sans utiliser le tableur, déterminer la population au bout de 100 ans.
8) Compléter la phrase : Plus généralement, au bout de x années la taille de la population est $y =$ ________. De plus, la courbe représentée dans le diagramme correspond au graphe d'une fonction ________.

7.2 Le modèle de Malthus vers 1800, la progression géométrique

On considère maintenant une population de 20 millions d'individus. On suppose que la population augmente de $a = 5$ pour-cent par an.

1) Augmenter 20 de 5% et encore une fois le résultat de 5%.
2) Ouvrir une nouvelle feuille de calcul.
3) Reproduire le tableau de la question 2. de la partie précédente ainsi que la première colonne jusqu'à la ligne 20.
4) Dans la cellule B3 proposer une formule à l'aide la cellule $B2$ pour augmenter $B2$ de 5%.
5) Nous allons modifier la formule proposée dans la question précédente. Suivre les trois instructions suivantes :
   - Dans la cellule D3 taper `a =` et dans la cellule E3 taper `5%`.
   - Modifier la cellule B3 ainsi `= B2 + E$3 * B2`.
   - Faites un copier coller vers le bas de la cellule B3 jusqu'à la ligne 20.

6) Représenter par un diagramme en ligne la série de données.
7) Quelle est la taille de la population au bout de 2, 5, 10 et 18 ans ?
8) Est-ce que tous les ans, la population augmente du même nombre d'individus ?
   En d'autres termes, plus la taille de la population est grande et plus le nombre d'individus supplémentaires est ________.
9) En modifiant la valeur dans la cellule E3, modifier le paramètre a, pour lui donner successivement les valeurs : 10%, 20%, 50% et 100%.
   Est-ce que la courbe correspond au graphe d'une fonction affine ? Si on trace un arc entre deux points de la courbe, est-ce que la courbe se trouve au-dessus ou en-dessous ?
10) Si l'on suppose que la population augmente de 100% tous les ans,
    a) Justifier qu'alors, la taille de la population double d'une année à l'autre.
    b) On note que la taille de la population au bout de deux ans est $20 \times 2 \times 2 = 20 \times 2^2$.
       Quelle serait donc sa taille au bout de 100 ans ?
    c) On suppose qu'un individu occupe $1\,\mu\,\mathrm{m}^2$, déterminer la surface en km^2 occupée par 3×10^{31} individus ?
       On rappelle que la surface de la terre est de 510 072 000 km^2.
11) Quelle critique peut-on faire de ce modèle ?

7.3 Le modèle de Verhulst vers 1840

Le modèle de Verhulst tient en compte une quantité maximale de ressources qui fixe a priori un seuil maximal pour la taille de la population. Plus précisément, on note p la taille de la population initiale. Le modèle de Verhulst consiste supposer que la taille de la population l'instant suivant sera donnée par la formule :

$$p + 0.05(1 - \frac{p}{100})\,p$$

1) On suppose que $p = 20$,
   a) Calculer $0.05(1 - \frac{p}{100})$;
   b) Calculer $p + 0.05(1 - \frac{p}{100})\,p$.
   c) De combien de pour-cent la population a augmenté ?
2) On suppose que $p = 90$,
   a) Calculer $0.05(1 - \frac{p}{100})$;
   b) Calculer $p + 0.05(1 - \frac{p}{100})\,p$.
   c) De combien de pour-cent la population a augmenté ?
3) Compléter la phrase : plus la taille de la population est grande (mais inférieure à 100) et plus le pourcentage d'augmentation est ________.

On reprend une population de 20 millions d'individus.

4) Ouvrir une nouvelle feuille de calcul.
5) Reproduire le tableau de la question 2. de la première partie ainsi que la première colonne jusqu'à la ligne 200.
6) Dans la cellule D3 taper `a =` et dans la cellule E3 taper 5%.
7) Dans la cellule B3 taper `=B2 + E$3*B2*(1 - B2/100)`.
8) Faite un copier coller vers le bas de la cellule B3 jusqu'à la ligne 200.
9) Représenter par un diagramme en ligne la série de données.
10) Quelle est la taille de la population au bout de 2, 50, 100 et 200 ans ?
11) Modifier le paramètre a, lui donner successivement les valeurs : 10%, 20%, 50%, 100% et 300%.
12) Que remarque-t-on dans les différents cas ?

7.4 La population Française

Voici un tableau avec la taille de la population, en millions, au fil des décennies de 1600 à nos jours :

Année	1600	1650	1700	1750	1800	1850	1900	1910	1920
Population Française	20	20	21	24,5	29,36	36,47	40,7	41,35	38,9

1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
41,34	40,69	41,65	45,46	50,53	53,73	56,58	58,85	62,77

1) Représenter graphiquement à l'aide du tableur l'évolution de la population Française depuis 1600.
2) Est-ce que la taille de la population française est une fonction croissante du temps ?
3) Expliquer les chiffres des 1920 et 1950.
4) Lequel des trois modèles précédents semble être le plus adaptés pour modéliser l'évolution de la population Française.
5) Estimer la taille de la population Française en 2100.

8 Le problème de Monty Hall

Nous allons étudier dans cette activité le célèbre problème de Monty Hall, inspiré du jeu télévisé américain *Let's Make a Deal*.

8.1 Le jeu

Le jeu oppose un candidat à un présentateur. Le joueur se trouve devant trois portes fermées. Derrière l'une d'elles se trouve une voiture et derrière les deux autres portes se trouve une chèvre.
Le joueur désigne une porte, puis le présentateur ouvre une porte parmi les deux portes non sélectionnées où se trouve une chèvre.
Le candidat a alors le droit ou bien d'ouvrir la porte qu'il a choisi initialement, ou bien d'ouvrir la troisième porte.

1) Tester le jeu : `http://lmrs.univ-rouen.fr/Vulgarisation/Hall/hall.html` ou `http://www.grand-illusions.com/simulator/montysim.htm`.
2) Pourquoi dans tous les cas, le présentateur peut nous ouvrir une porte avec une chèvre ?
3) Si le candidat décide d'ouvrir la porte choisie au départ, quelle est la probabilité qu'il gagne à ce jeu ?
4) Quelle stratégie vous semble être la meilleure : garder son choix ou changer ?

8.2 Statistique

1) On suppose dans un premier temps qu'on **garde** à chaque fois son premier choix.
   a) À l'aide du jeu sur internet, déterminer un échantillon de taille 30.
   b) Quelle est la fréquence observée ?
   c) Déterminer un intervalle de fluctuation au seuil 95% de la fréquence sous l'hypothèse $p = \frac{1}{3}$.
   d) Que peut-on en conclure ?
2) On suppose maintenant qu'on **change** à chaque fois de porte après l'intervention du présentateur.
   a) À l'aide du jeu sur internet, déterminer un échantillon de taille 30.
   b) Quelle est la fréquence observée ?
   c) Rappeler l'intervalle de fluctuation au seuil 95% de la fréquence sous l'hypothèse $p = \frac{1}{3}$.
   d) Que peut-on en conclure ?

8.3 Programmation du jeu sur la calculatrice

1) Justifier que pour répartir la voiture et les deux chèvres, il suffit de choisir aléatoirement le numéro V de la porte où l'on va placer la voiture.

On note C le numéro de la porte choisie par le candidat.

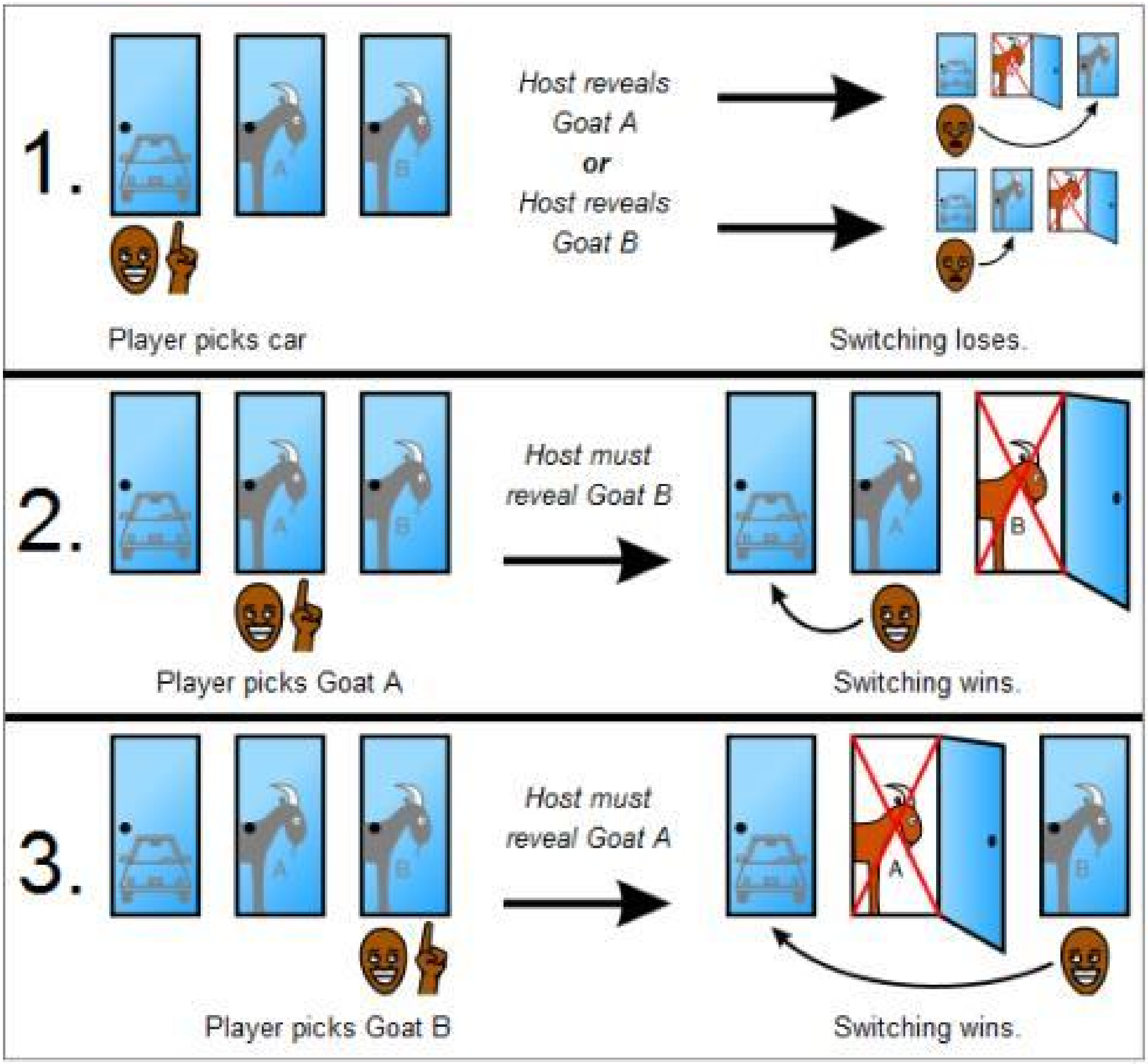
2) Que peut-on déduire lorsque la condition $C = V$ est réalisée ?
3) * Proposer un algorithme pour déterminer le numéro I de la porte que l'animateur peut dévoiler au candidat à partir des données C et V.
4) Aller dans programme et créer un nouveau programme qu'on nommera : `MONTYHAL`.
5) Compléter le programme ci-contre (sous Casio) et le taper dans votre calculatrice :

```
RandInt#(1,3)→____
"CHOISISSEZ UNE PORTE PARMI 1 2 ET
3":? →C
1→I
While I=V Or I=C
I+1→I
WhileEnd
"UNE CHEVRE SE TROUVE DERRIERE LA
PORTE": I◢
"VOTRE CHOIX":? →C
If _________
Then __________________
ELSE __________________
IfEnd
```

8.4 La solution

1) *Un exemple :* On suppose que la porte 1 est celle choisie par le candidat et que le présentateur ouvre la seconde porte où se trouve donc une chèvre. Faites un schéma de la situation avec les trois portes.
   On suppose que le candidat change, il choisit donc la troisième. Qu'y a-t-il derrière cette porte ?
2) Plus généralement, on suppose que le candidat choisit dans un premier temps la porte avec une chèvre derrière et qu'il change de choix après que le présentateur lui ait montré une porte avec une chèvre derrière. Est-ce que le candidat gagne dans cette situation ?
3) Lorsque le candidat choisit une des trois portes, quelle est la probabilité qu'il y ait une chèvre derrière cette porte ?
4) Conclure.

- Une vidéo : `https://youtu.be/mhlc7peGlGg`
- Une illustration :



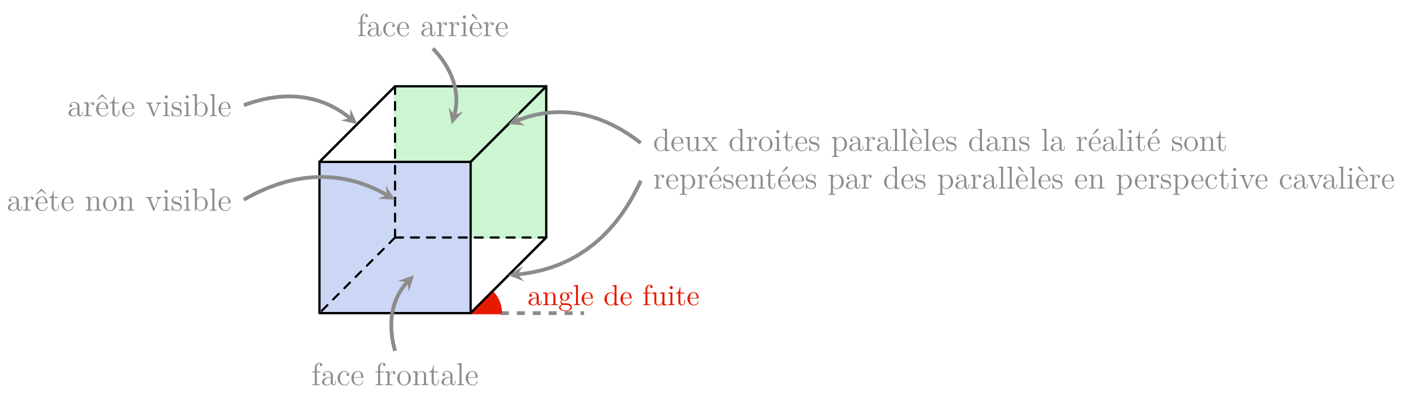
- Lorsqu'on ne change pas son choix après ouverture de la porte par le présentateur, la probabilité de découvrir la voiture est de $\frac{1}{3}$.
- On suppose qu'on change maintenant. Donc, pour gagner la voiture lorsqu'on modifie sont choix après ouverture d'une porte avec une chèvre, il suffit dans un premier temps de désigner la porte avec une chèvre. La probabilité de désigner la chèvre avec son premier choix est de $\frac{2}{3}$. Ainsi, avec cette stratégie de changement, la probabilité de découvrir la voiture est $\frac{2}{3}$. Le double !

9 Géométrie dans l'espace

9.1 Les solides usuels

Définition 9.1. Un **solide** est un objet en trois dimension. Par exemple un cube, un pavé, une pyramide, un cylinde...

Une représentation en *perspective cavalière* du cube :



Remarques.

- Un patron permet de **fabriquer** le solide par pliage.
- La perspective cavalière permet de représenter le solide sur une feuille papier en donnant l'impression de la 3D.

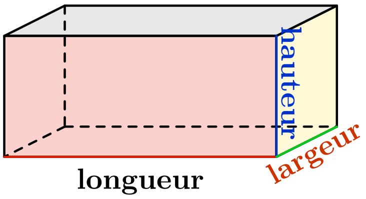
Propriété 9.2 (Perspective cavalière)**.** *Une perspective cavalière est une convention mathématique de représentation des solides dans un plan vérifiant les propriétés suivantes :*

1) *Si deux droites sont parallèles dans la réalité, alors elles le sont aussi dans la représentation en perspective cavalière.*
2) *Si des points sont alignés dans la réalité, alors ils le sont aussi en perspective cavalière.*
3) *La perspective cavalière conserve les proportions.*

Quelques exemples :

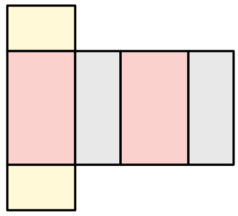
Parallélépipède rectangle

$\mathcal{V}$ = largeur × hauteur × profondeur



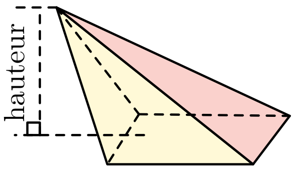
Le patron est composé de rectangles.

L'aire d'un rectangle est : $\mathcal{A}$ = Longueur × largeur



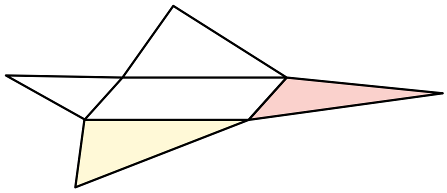
Pyramides

$\mathcal{V}$ = (Aire de la base × hauteur) ÷ 3



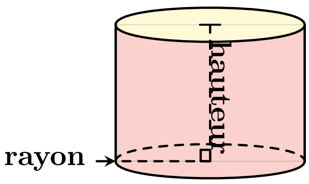
Le patron est composé d'un polygone et de triangles.

L'aire d'un triangle est : $\mathcal{A}$ = (base × hauteur) ÷ 2

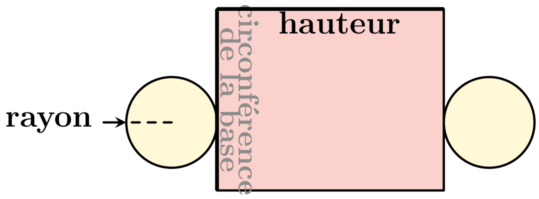


Cylindre de révolution

$\mathcal{V}$ = Aire de la base × hauteur

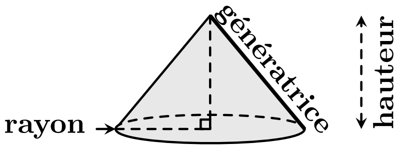


Le patron est composé d'un rectangle et de deux disques. L'aire d'un disque est : $\mathcal{A} = \pi \times$ rayon^2



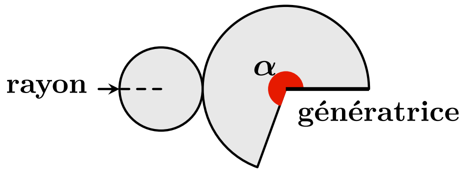
Cône de révolution

$\mathcal{V} = \frac{1}{3}$ × Aire de la base × hauteur

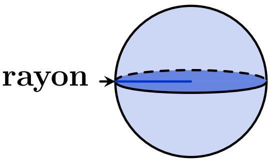


Le patron est composé d'un disque et d'une portion de

disque avec α = rayon ÷ génératrice × 360 °



Sphère et boule

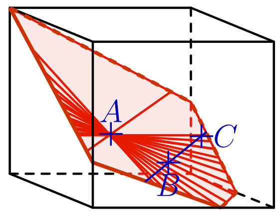


$\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi \times$ rayon^3 $\qquad \mathcal{A} = 4 \times \pi \times$ rayon^2

La sphère n'a pas de patron.

9.2 Droites et plans

Propriété 9.3.
Soit A, B, C trois points de l'espace distincts et non alignés.

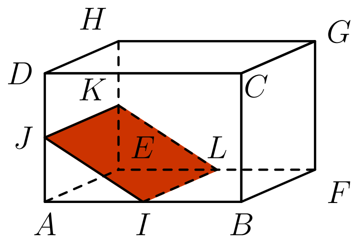


- *Pour déterminer un plan, il suffit de donner 3 points non alignés ou 2 droites sécantes ou 2 droites parallèles (non confondues).*
- *Le plan noté (ABC) est constitué par les points des droites passant par A et parallèles ou sécantes à la droite (BC).*

Remarques.

- La donnée de 3 points non alignés ou de 2 droites sécantes ou 2 droites parallèles (non confondues) suffit à déterminer un plan
- Dans chaque plan de l'espace, on peut appliquer tous les théorèmes de géométrie plane.

Exemple.
Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle tel que :



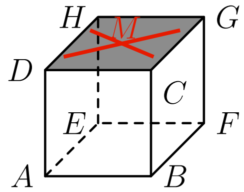
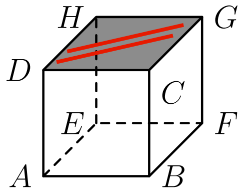
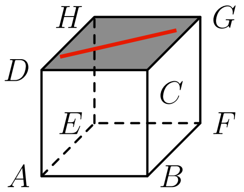
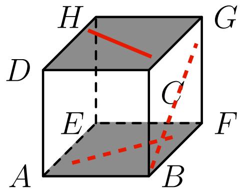
- $AB = 7$ cm
- $AD = 6$ cm

1) Nommer le plan colorié.
2) Calculer la longueur BD.

9.3 Positions relatives de deux droites

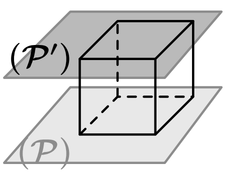
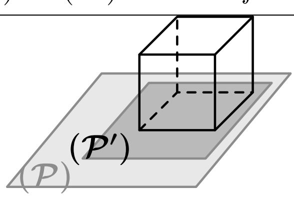
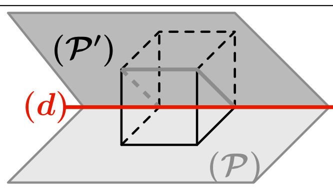
Définition 9.4. Deux droites incluses dans un même plan sont dites **coplanaires**.

Propriété 9.5. *Deux droites de l'espace sont soit coplanaires soit non coplanaires :*

(d) et (d') sont coplanaires et			(d) et (d') sont
sécantes en M	ou strictement parallèles	ou confondues	non coplanaires
			

9.4 Positions relatives de deux plans

Propriété 9.6.

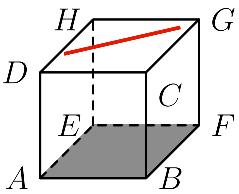
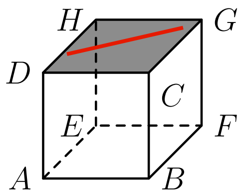
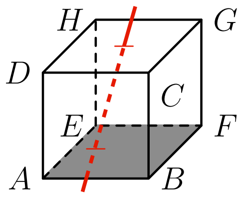
$(\mathcal{P})$ *et* $(\mathcal{P}')$ *sont strictement parallèles*	$(\mathcal{P})$ *et* $(\mathcal{P}')$ *sont confondus*	$(\mathcal{P})$ *et* $(\mathcal{P}')$ *sont sécants en* (d)
		

Propriété 9.7.
- *Un plan coupe deux plans parallèles suivant deux droites parallèles.*
- *Deux plans sont parallèles si et seulement si deux droites sécantes de l'un sont respectivement parallèles à deux droites sécantes de l'autre.*

Remarques.
- Deux plans confondus sont considérés comme parallèles.
- Un plan coupe deux plans parallèles en deux droites parallèles.
- Deux plans sont parallèles si et seulement s'il existe deux droites sécantes de l'un qui sont respectivement parallèles à deux droites sécantes de l'autre.

9.5 Positions relatives d'une droite et d'un plan

Propriété 9.8.

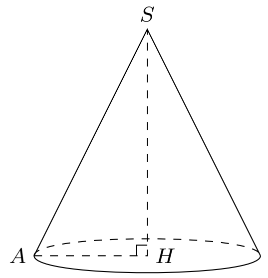
(d) *est strictement parallèle à* (ABF)	(d) *est incluse dans* (HDC)	(d) *est sécante à* (ABC)
		

Une droite est parallèle à un plan si et seulement si elle est parallèle à une droite du plan.

9.6 Exercices : Géométrie dans l'espace

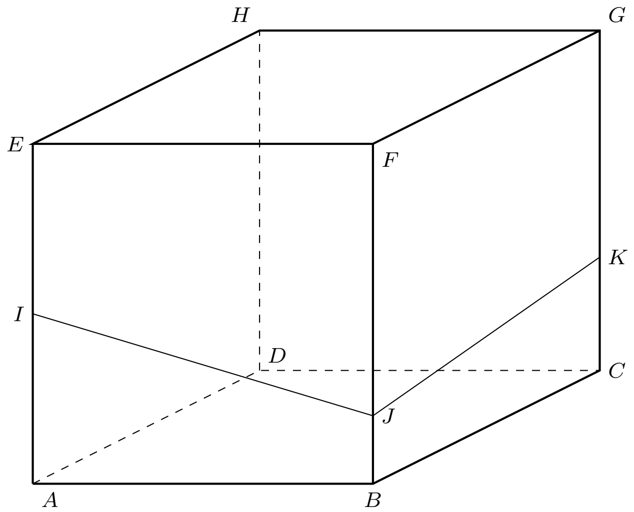
Exercice 1. En faisant tourner un triangle AHS, rectangle en H, autour de (SH), on obtient le cône de révolution représenté ci-contre où $AS = 6$ cm et $AH = 2$ cm.
En donnant la valeur exacte puis la valeur approchée par défaut au dixième, calculer :

1) SH, la hauteur ;
2) le volume de ce cône.



Exercice 2. La figure ci-dessous représente un cube ABCDEFGH en perspective cavalière. Les points I,J,K sont des points des arêtes respectives $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ tels que :

- $BJ = \frac{1}{5}GF$;
- $CK = \frac{1}{3}CG$;
- I milieu de $[AE]$.



Partie A : Intersection de (IJK) et (ABC)

1) Quelle est la nature de l'intersection des plans (ABC) et (IJK) ?
2) Justifier que les droites (JK) et (BC) sont sécantes en un point M.
Représenter précisément sur la figure le point d'intersection M.
3) Construire de même le point N intersection de la droite (IJ) et de la droite (AB).
4) En déduire l'intersection des plans (ABC) et (IJK). Justifier et la représenter sur la figure.

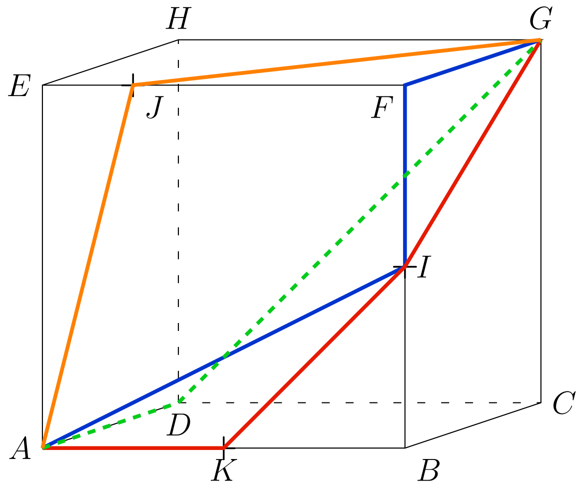
Partie B : Intersection du plan (IJK) avec les faces du cube

1) Tracer sur la figure la segment intersection du plan (IJK) avec la face $ADHE$ du cube.
2) Tracer sur la figure la segment intersection du plan (IJK) avec la face $DCGH$ du cube.
3) On note L le point d'intersection du plan (IJK) et de l'arête (HD). Le placer sur la figure.
4) Justifier que le quadrilatère $IJKL$ est un parallélogramme.

Exercice 3 (Inspiré par *La révolution des fourmis*, Bernard Werber[1]).

On considère un cube $ABCDEFGH$ de 4 cm de côté avec :

- I, le milieu du segment $[BF]$;
- K, le milieu du segment $[AB]$;
- J, le point de $[EF]$ tel que $EJ = \dfrac{1}{4}EF$.



Partie A : promenade de santé

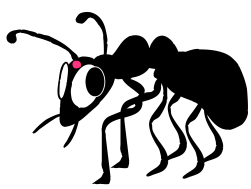
Cinq fourmis se déplacent en ligne droite sur les faces du cube. Elles souhaitent effectuer le trajet séparant A de G. Chacune choisit un chemin différent.

- La fourmi 1 passe par J.
- La fourmi 2 passe par I puis F.
- La fourmi 3 passe par D.
- La fourmi 4 passe par K puis I.

Calculer la distance exacte parcourue par chaque fourmi et en donner la valeur arrondie au centième près.

Partie B : Optimisation

La cinquième, celle avec une marque de vernis à ongles, a lu le lièvre et la tortue.



Avant de partir, elle réfléchit à un parcours plus court que celui de ses congénères.

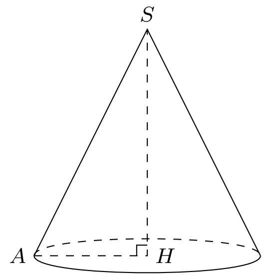
1) Existe-t-il un parcours le plus court possible ?
2) A-t-elle plusieurs options ?
   Les déterminer.

1. Référence : Sésamath Seconde, édition 2014

9.7 Correction des exercices

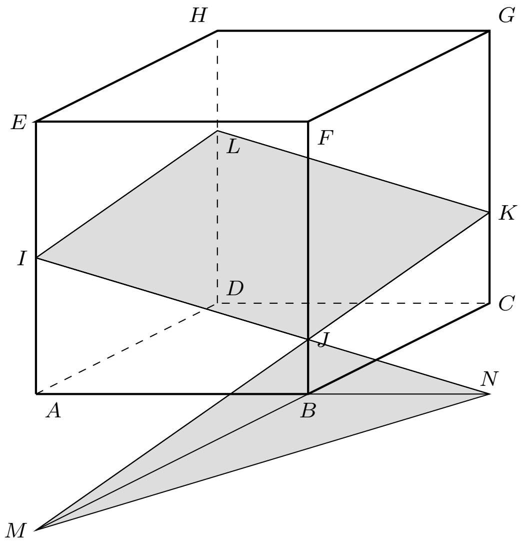
Exercice 1. En faisant tourner un triangle AHS, rectangle en H, autour de (SH), on obtient le cône de révolution représenté ci-contre où $AS = 6$ cm et $AH = 2$ cm.
D'après le théorème de Pythagore, on a $SH = \sqrt{AS^2 - AH^2} = \sqrt{36-4} = \sqrt{32} \simeq 5.7$ cm. Ainsi, le volume du cube est

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\pi \times 2^2 \times \sqrt{32} = \frac{4}{3}\pi\sqrt{32} \simeq 23.7 \ \ \text{cm}^3$$



Exercice 2. La figure ci-dessous représente un cube ABCDEFGH en perspective cavalière. Les points I,J,K sont des points des arêtes respectives $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ tels que :

- $BJ = \frac{1}{5}GF$;
- $CK = \frac{1}{3}CG$;
- I milieu de $[AE]$.



Partie A : Intersection de (IJK) et (ABC)

1) L'intersection des plans (ABC) et (IJK) est nécessairement une droite.
2) Par construction des points J et K (ils ne se trouvent pas à la même hauteur sur le cube), les droites (JK) et (BC) dans le plan (BCG) ne sont pas parallèles et donc elles sont sécantes en un point M.

3) (Construire de même le point N intersection de la droite (IJ) et de la droite (AB).)
4) Par construction, les points M et N appartiennent aux plans (ABC) et (IJK) car appartennant simulatanément à deux droites de ces deux plans. Ainsi, comme ils ne sont pas confondus, on en déduit qu'ils déterminent la droite intersection de (ABC) et (IJK).

Partie B : Intersection du plan (IJK) avec les faces du cube

1) (Tracer sur la figure la segment intersection du plan (IJK) avec la face $ADHE$ du cube.)

2) (Tracer sur la figure la segment intersection du plan (IJK) avec la face $DCGH$ du cube.)
3) (On note L le point d'intersection du plan (IJK) et de l'arête (HD). Le placer sur la figure.)
4) Les plans (ADH) et (BCG) déterminé par les faces gauche et droite du cube sont parallèles, ainsi le plan (IJK) les coupe en deux droites parallèles. C'est-à-dire (JK) est parallèle à (IL). De même, on montre que (IJ) est parallèle à (KL). On en déduit donc que le quadrilatère $IJKL$ est un parallélogramme.