# Accompagnement personnalisé en Première S

## Table des matières

# 1 Exercices d'approfondissement

## 1.1 Les fractions

**Exercice 1.** Simplifier les expressions suivantes :

1)
$$(\frac{2}{7}+\frac{2}{5})\frac{3}{4}, \qquad \frac{\frac{12}{5}+\frac{13}{2}}{\frac{16}{15}}, \qquad \frac{\frac{16}{21}}{\frac{12}{7}+\frac{36}{49}}$$

2)
$$\frac{\frac{13}{29}-\frac{73}{216}}{\frac{691}{25056}}, \quad \frac{\left(2\frac{8}{11}+3\frac{31}{33}\right)\frac{3}{20}}{\left(1\frac{8}{9}+3\frac{1}{12}\right)\frac{36}{179}}, \quad \frac{16}{\frac{17}{24}}-\frac{\frac{16}{17}}{24}, \quad \frac{\left(\frac{5}{8}+\frac{3}{4}\right)\frac{2}{3}}{\left(\frac{6}{5}+\frac{8}{9}\right)11}$$

**Exercice 2.** Simplifier les fractions suivantes :

1) $\frac{a^2+2a}{3a}$
2) $\frac{a^2+ab}{5a}$
3) $\frac{2a^2-8ab}{4ab}$

**Exercice 3.** Additionner, réduire et simplifier s'il y a lieu :

1) $\frac{x-3}{5}+\frac{x-2}{3}+\frac{2x-1}{15}$ ;
2) $\frac{x-3}{5}+\frac{x-2}{3}-\frac{2x-1}{15}$ ;
3) $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}-\frac{4x^2}{1-x^4}$ ;
4) $\frac{2a}{a+x}+\frac{3x}{a-x}+\frac{3ax-x^2}{a^2-x^2}$.

**Exercice 4.** En physique, on est amené en électricité, pour les circuits en dérivation, à manipuler des fractions lorsque l'on déterminer des résistances totales. Si l'on a deux résistances en dérivation $R_1$ et $R_2$, la résistance totale $R$ (exprimée en Ohm (symbole $\Omega$) sera déterminée par la formule :

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$$

1) Calculer littéralement la résistance $R$ en fonction de $R_1$ et $R_2$ ;
2) Calculer littéralement la résistance $R_1$ en fonction de $R_2$ et $R$ ;

**Exercice 5.** On considère maintenant trois résistances $R_1$, $R_2$ et $R_3$. La formule permettant de calculer $R$ la résistance totale devient :

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}$$

1) Calculer littéralement la résistance $R$ en fonction de $R_1$, $R_2$, $R_3$ ;
2) On donne $R_1 = 10\ k\Omega$, $R_2 = 12{,}1\ k\Omega$, $R_3 = 51{,}2\ k\Omega$. Calculez numériquement $R$ ;
3) Calculez littéralement la résistance $R_1$ en fonction de $R$, $R_2$, $R_3$.
4) On donne $R = 20\ k\Omega$, $R_2 = 12{,}1\ k\Omega$, $R_3 = 51{,}2\ k\Omega$. Calculez numériquement $R_1$ ;
5) Calculez littéralement la résistance $R_2$ en fonction de $R$, $R_1$, $R_3$.
6) On donne $R = 150\ m\Omega$, $R_2 = 12{,}1\ m\Omega$, $R_3 = 31{,}6\ m\Omega$. Calculez numériquement $R_1$ ;

**Exercice 6.** On considere un circuit en dérivation avec 5 résistances $R_1$, $R_2$, $R_3$, $R_4$, $R_5$ en dérivation.

1) Pourriez vous trouver rapidement une expression permettant de déterminer $R$ la résistance totale du circuit ?
2) Pourriez vous généraliser avec $n$ résistances branchées en dérivation ?

**Exercice 7.** Calculez suivant les cas les grandeurs inconnues grâce à la formule de conjugaison d'optique :

$$\frac{1}{\overline{A'O}} - \frac{1}{\overline{AO}} = \frac{1}{f'}$$

1) On donne $\overline{AO}$ = -3 $m$, $f' = 1$ $m$, calculer littéralement $\overline{A'O}$ puis numériquement ;
2) Calculer littéralement, puis numériquement $\overline{AO}$, sachant que $\overline{A'O} = 2$ $m$, $f' =$ 1,5 $m$ ;
3) Calculer $f'$ littéralement puis numérique, sachant que $\overline{A'O} = 3$ $m$, $\overline{AO}$ = -2 $m$ ;

### 1.2 Développer, factoriser

**Exercice 8.** Développer les expressions suivantes :

1) $2x(x^3 + x - 1)$ ;
2) $(x + 1)(x + 2)$ ;
3) $(2x + 4)(x^2 - 12)$ ;
4) $x(2 + x + x^2)$ ;
5) $(a + b)(a - b)$.

**Exercice 9.** Factoriser les expressions suivantes :

1) $2xy + x$ ;
2) $5x^2 - 6x$,
3) $12x^3 + 8x$ ;
4) $ax^3 + bx^2 + cx$.

**Exercice 10.** Réécrire les expressions suivantes différemment :

1) $(x + 5)^2 =$
2) $(2x - 3)^2 =$
3) $x^2 + 10x + 25 =$
4) $x^2 - 6x + 9 =$
5) $(x - 12)(x + 12) =$
6) $x^2 - 16 =$

**Exercice 11.**

1) Vérifier l'identité : $(a + b - c)(a + b + c) = (a + b)^2 - c^2$.
2) Utiliser cette identité pour calculer $(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})$.

**Exercice 12.** Résoudre les équations suivantes :

1) $4x + 6 = x + 9$,

2) $x - \frac{x-1}{4} = \frac{x+3}{2}$,
3) $\frac{3}{x-7} = \frac{2}{5}$,
4) $\frac{3x-1}{4x-2} = \frac{10}{13}$,
5) $(x+3)^2 - (x-3)^2 = 6x + 18$,
6) $(2x+3)^2 - (2x-3)^2 = 18x + 30$,
7) $\frac{2x-1}{x+1} = \frac{3}{4}$,
8) $\frac{4x-1}{4x-2} = 2 + \frac{x}{x-1}$,
9) $\frac{7}{7x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{1}{7x-1}$,
10) $(x-3)(x-5) = (x-2) - (x-6)$.

**Exercice 13.** Trouver $x$ et $y$ tel que $x^2 - y^2 = 77$ et $x - y = 11$.

**Exercice 14.** Résoudre les systèmes

1) $\begin{cases} 10x + 9y - 30 & = 0 \\ 11x + 10y + 15 & = 0 \end{cases}$,

2) $\begin{cases} 4x - 3y & = 14 \\ 7x + 5y & = 45 \end{cases}$,

3) $\begin{cases} \frac{2x}{3} & = \frac{5y}{4} \\ 8x - 3y & = 12 \end{cases}$.

**Exercice 15.** On considère une solution diluée d'un sirop de menthe. La cuve d'analyse mesure $l =$ 1,5 $cm$ La loi de Beer-Lambert s'applique :

$$A = \epsilon \times l \times C$$

.
On détermine expérimentalement $A$ et $\epsilon$. Calculez la concentration $C$ de la solution, littéralement puis numériquement, sachant que l'on a $A = 0{,}31$, et $\epsilon = 0{,}2\ cm^{-1} \cdot mol^{-1} \cdot L$ ;

**Exercice 16.** Un objet est lancé en l'air. Sa trajectoire à pour équation :

$$y = -\frac{1}{2} \times g \times t^2 + v \times t$$

Déterminer littéralement le temps $t$ au bout duquel l'objet retombe sur le sol (et donc pour lequel $y=$ $0\ m$)

**Exercice 17.** On connait le volume $V$ et la longueur $L$ d'un cylindre. Déterminez son rayon $R$ en fonction de $V$ et $L$.

**Exercice 18.** On connait le volume $V$ d'une sphère : donnez une expression littérale de son rayon $R$.

**Exercice 19.** On considère un ballon sphérique de rayon $R$ remplie d'un gaz parfait d'équation d'état :

$$P \times V = n \times R \times T$$

Exprimer le rayon $R$ en fonction de $P$, $n$, $R$ et $T$, sachant que $V$ est le volume du gaz dans le ballon.

**Exercice 20.** Le périmètre d'un rectangle est représenté par $2a$. Si l'on augmente la longueur de 8 mètres la largeur de 5 mètres, la surface augmente de 180 mètres carrés.

1) Calculer la longueur et la largeur si $2a = 44$ mètres.
2) Exprimer ces dimensions en laissant le périmètre représenté par $2a$.
3) Quelles sont la plus petite et la plus grande valeur qu'on peut donner au nombre $a$ pour le problème soit possible ?

**Exercice 21.** On veut planter 324 arbustes sur un terrain rectangulaire ABCD, de longueur 140 mètres et de largeur 32 mètres. Ces arbustes doivent former des rangées équidistantes parallèles à AB, la première rangée étant sur AB et la dernière sur CD. Ils doivent aussi former des rangées équidistantes parallèles à BC, la première étant sur BC, et la dernière sur AD. Trouver quelle doit être la distance de deux rangées consécutives sachant que cette distance est la même pour les rangées parallèles à AB que pour les rangées parallèles à BC.

**Exercice 22.** Trouver cinq nombres entiers consécutifs sachant que la somme des carrés des quatre premiers nombres est égale à 42 fois le cinquième.

# 2 Exercices d'approfondissement (corrigé)

## 2.1 Les fractions

**Exercice 1.** Simplifions les expressions suivantes :

1)

$$(\frac{2}{7}+\frac{2}{5})\frac{3}{4}=\frac{2\times 5+2\times 7}{7\times 5}\times\frac{3}{4}=\frac{\cancel{4}\times 6}{35}\frac{3}{\cancel{4}}=\frac{18}{35};\qquad \frac{\frac{12}{5}+\frac{13}{2}}{\frac{16}{15}}=\frac{267}{32};\qquad \frac{\frac{16}{21}}{\frac{12}{7}+\frac{36}{49}}=\frac{14}{45}$$

2)

$$\frac{\frac{13}{29}-\frac{73}{216}}{\frac{691}{25056}}=4;\quad \frac{\left(2\frac{8}{11}+3\frac{31}{33}\right)\frac{3}{20}}{\left(1\frac{8}{9}+3\frac{1}{12}\right)\frac{36}{179}}=\frac{\frac{141}{220}}{\frac{41}{179}}=\frac{25239}{9020};\quad \frac{16}{\frac{17}{24}}-\frac{\frac{16}{17}}{24}=\frac{1150}{51};\quad \frac{\left(\frac{5}{8}+\frac{3}{4}\right)\frac{2}{3}}{\left(\frac{6}{5}+\frac{8}{9}\right)11}=\frac{\frac{11}{12}}{\frac{94}{45}\times 11}=\frac{15}{376}$$

**Exercice 2.** Simplifions les fractions suivantes :

1) $\frac{a^2+2a}{3a}=\frac{a+2}{3}$,
2) $\frac{a^2+ab}{5a}=\frac{a+b}{5}$,
3) $\frac{2a^2-8ab}{4ab}=\frac{a-4b}{2b}$.

**Exercice 3.** Additionner, réduire et simplifier s'il y a lieu :

1) $\frac{x-3}{5}+\frac{x-2}{3}+\frac{2x-1}{15}=\frac{3x-9+5x-10+2x-1}{15}=\frac{10x-20}{15}=\frac{2x-4}{3}$ ;
2) $\frac{x-3}{5}+\frac{x-2}{3}+\frac{2x-1}{15}=\frac{3x-9+5x-10-2x+1}{15}=\frac{6x-18}{15}=\frac{2x-6}{5}$ ;
3) $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}-\frac{4x^2}{1-x^4}=\frac{1-x+1+x}{1-x^2}-\frac{4x^2}{1^2-(x^2)^2}=\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)(1+x^2)}-\frac{4x^2}{(1-x^2)(1+x^2)}=\frac{2+2x^2-4x^2}{1-x^4}=\frac{2-2x^2}{1-x^4}=\frac{2(1-x^2)}{(1-x^2)(1+x^2)}=\frac{2}{1+x^2}$ ;
4) $\frac{2a}{a+x}+\frac{3x}{a-x}+\frac{3ax-x^2}{a^2-x^2}=\frac{2a(a-x)}{a^2-x^2}+\frac{3x(a+x)}{a^2-x^2}+\frac{3ax-x^2}{a^2-x^2}=\frac{2a^2-2ax+3ax+3x^2+3ax-x^2}{a^2-x^2}=\frac{2a^2+4ax+2x^2}{a^2-x^2}=\frac{2(a+x)^2}{(a+x)(a-x)}=\frac{2(a+x)}{a-x}$.

(on remarquera qu'il faut connaître ses identités remarquables...).

**Exercice 4.** En physique, on est amené en électricité, pour les circuits en dérivation, à manipuler des fractions lorsque l'on déterminer des résistances totales. Si l'on a deux résistances en dérivation $R_1$ et $R_2$, la résistance totale $R$ (exprimée en Ohm (symbole $\Omega$) sera déterminée par la formule :

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$$

1) On calcule littéralement la résistance $R$ en mettant au même dénominateur la fraction. On obtient donc :

$$\frac{1}{R}=\frac{R_1+R_2}{R_1\times R_2}$$

On prends ensuite l'inverse de l'égalité, ce qui permet d'avoir $R$ :

$$R=\frac{R_1\times R_2}{R_1+R_2}$$

Calculer littéralement la résistance $R$ en fonction de $R_1$ et $R_2$ ;

2) On isole d'abord $\frac{1}{R_1}$ :

$$\frac{1}{R_1}=\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R}$$

On met sur le même dénominateur :

$$\frac{1}{R_1} = \frac{R - R_2}{R_2 \times R}$$

On inverse la fraction :

$$R_1 = \frac{R_2 \times R}{R - R_2}$$

**Exercice 5.** On considère maintenant trois résistances $R_1$, $R_2$ et $R_3$. La formule permettant de calculer $R$ la résistance totale devient :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

1) Pour calculer la résistance $R$, il suffit de réduire les trois fractions au même dénominateur, ici $R_1 \times R_2 \times R_3$. Il faudra, par ailleurs, multiplier chaque numérateur par la partie manquant dans le dénominateur. Par exemple pour la fraction suivante : $\frac{1}{R_1}$, il faudra multiplier le numérateur et le dénominateur par $R_2 \times R_3$. On obtient alors :

$$\frac{1}{R} = \frac{R_2 \times R_3}{R_1 \times R_2 \times R_3} + \frac{R_1 \times R_3}{R_1 \times R_2 \times R_3} + \frac{R_1 \times R_2}{R_1 \times R_2 \times R_3}$$

Ce qui se ramène donc à :

$$\frac{1}{R} = \frac{R_1 \times R_3 + R_2 \times R_3 + R_1 \times R_2}{R_1 \times R_2 \times R_3}$$

On prends ensuite l'inverse de l'égalité, ce qui permet d'avoir $R$ :

$$R = \frac{R_1 \times R_2 \times R_3}{R_1 \times R_3 + R_2 \times R_3 + R_1 \times R_2}$$

2) On donne $R_1 = 10\ k\Omega$, $R_2 = 12{,}1\ k\Omega$, $R_3 = 51{,}2\ k\Omega$. On calcule numériquement $R$= 4.94 $k\Omega$ ;
3) On isole $\frac{1}{R_1}$ :

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}$$

On refait exactement comme à la question précédente (aux signes près).

$$\frac{1}{R_1} = \frac{R_2 \times R_3 - R \times R_3 - R \times R_2}{R \times R_2 \times R_3}$$

Soit en inversant la fraction :

$$R_1 = \frac{R \times R_2 \times R_3}{R_2 \times R_3 - R \times R_3 - R \times R_2}$$

4) On donne $R = 20\ k\Omega$, $R_2 = 12{,}1\ k\Omega$, $R_3 = 51{,}2\ k\Omega$. On calcule $R_1$=32,8 $k\Omega$ ;
5) Pour déterminer $R_2$, il suffit de refaire comme précédemment, ou encore de remarquer que $R_2$ et $R_1$ jouent un role symétrique. Il suffit alors de permuter $R_1$ et $R_2$ dans l'expression précédente :

$$R_2 = \frac{R \times R_1 \times R_3}{R_1 \times R_3 - R \times R_3 - R \times R_1}$$

**Exercice 6.** On considere un circuit en dérivation avec 5 résistances $R_1$, $R_2$, $R_3$, $R_4$, $R_5$ en dérivation.

1) On a observé une régularité dans le précédent exercice : le dénominateur est le produit des résistances, et le numérateur est la somme des produits partiels des résistances. En effet, si l'on considère par exemple $\frac{1}{R_1}$, lorsque l'on fait la mise sur le même dénominateur, cette fraction devient :

$$\frac{R_2 \times R_2 \times R_3 \times R_4 \times R_5}{R_1 \times R_2 \times R_2 \times R_3 \times R_4 \times R_5}$$

Au numérateur, on a donc le produit de toutes les résistances, sauf celle au dénominateur : cela est vrai pour toutes les fractions. On a donc :

$$\frac{1}{R} = \frac{R_2 \times R_3 \times R_4 \times R_5 + R_1 \times R_2 \times R_4 \times R_5 + R_1 \times R_2 \times R_3 \times R_5 + R_1 \times R_2 \times R_3 \times R_4}{R_1 \times R_2 \times R_3 \times R_4 \times R_5}$$

On inverse ensuite la fraction et l'on a :

$$R = \frac{R_1 \times R_2 \times R_3 \times R_4 \times R_5}{R_2 \times R_3 \times R_4 \times R_5 + R_1 \times R_2 \times R_4 \times R_5 + R_1 \times R_2 \times R_3 \times R_5 + R_1 \times R_2 \times R_3 \times R_4}$$

2) La généralisation est immédiate. Pour obtenir R, on a une fraction dont le dénominateur est le produit des résistances $R_i$ avec $i$ un indice tel que $i \in \{1, \cdots, n\}$, et le dénominateur la somme des produit de tout les produits partiels de résistances possibles.

$$R = \frac{R_1 \times \cdots R_i \times \cdots \times R_n}{R_2 \times \cdots \times R_n + R_1 \times R_3 \times \cdots \times R_n + \cdots + R_1 \times \cdots \times R_{i-1} \times R_{i+1} \times \cdots \times R_n + \cdots + R_1 \times \cdots \times R_{n-1}}$$

**Exercice 7.** Calculez suivant les cas les grandeurs inconnues grâce à la formule de conjugaison d'optique :

$$\frac{1}{\overline{A'O}} - \frac{1}{\overline{AO}} = \frac{1}{f'}$$

1) On isole $\frac{1}{\overline{A'O}}$ :

$$\frac{1}{\overline{A'O}} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{\overline{AO}}$$

On met sur le même dénominateur le second membre :

$$\frac{1}{\overline{A'O}} = \frac{f' + \overline{AO}}{\overline{AO} \times f'}$$

On inverse la fraction et l'on a :

$$\overline{A'O} = \frac{\overline{AO} \times f'}{f' + \overline{AO}}$$

Numériquement on trouve $\overline{A'O}$= 1,5 $m$

2) On isole cette fois çi $\overline{AO}$ et l'on refait comme précédement :

$$\frac{1}{\overline{AO}} = \frac{f' - \overline{AO}}{\overline{A'O} \times f'}$$

En inversant cette fraction on a :

$$\overline{AO} = \frac{\overline{A'O} \times f'}{f' - \overline{AO}}$$

Numériquement on trouve $\overline{AO}$= $-4$ $m$.

3) On isole $f'$. On a alors :
$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{\overline{A'O}} - \frac{1}{\overline{AO}}$$
On met au même dénominateur :
$$\frac{1}{f'} = \frac{\overline{AO} - \overline{A'O}}{\overline{AO} \times \overline{A'O}}$$
On inverse la fraction et l'on trouve :
$$f' = \frac{\overline{AO} \times \overline{A'O}}{\overline{AO} - \overline{A'O}}$$
Numériquement on trouve $f'$= 1,2 $m$.

## 2.2 Développer, factoriser

**Exercice 8.** Développer les expressions suivantes :

1) $2x(x^3 + x - 1) = 2x^4 + 2x^2 - 2x$ ;
2) $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$ ;
3) $(2x + 4)(x^2 - 12) = 2x^3 + 4x^2 - 24x - 48$ ;
4) $x(2 + x + x^2) = 2x + x^2 + x^3$ ;
5) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

**Exercice 9.** Factoriser les expressions suivantes :

1) $2xy + x = x(2y + 1)$ ;
2) $5x^2 - 6x = x(5x - 6)$,
3) $12x^3 + 8x = 4x(3x^2 + 2)$ ;
4) $ax^3 + bx^2 + cx = x(ax^2 + bx + c)$.

**Exercice 10.** Réécrire les expressions suivantes différemment :

1) $(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$,
2) $(2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$,
3) $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$,
4) $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$,
5) $(x - 12)(x + 12) = x^2 - 144$,
6) $x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$.

**Exercice 11.**

1) De l'identité remarquable $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, on déduit $(a + b - c)(a + b + c) = (a + b)^2 - c^2$.
2) De la précédente identité, on déduit que
$$(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}) = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 5 = 2 + 2\sqrt{2} \times \sqrt{3} + 3 - 5 = 2\sqrt{6}$$

**Exercice 12.** Résoudre les équations suivantes :

1) $4x + 6 = x + 9 \iff 3x = 3 \iff x = 1$,
2) $x - \frac{x-1}{4} = \frac{x+3}{2} \iff (1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2})x = \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \iff \frac{1}{4}x = \frac{5}{4} \iff x = 5$,

3) $\frac{3}{x-7} = \frac{2}{5} \iff 15 = 2x - 14 \iff x = \frac{29}{2}$,
4) $\frac{3x-1}{4x-2} = \frac{10}{13} \iff 39x - 13 = 40x - 20 \iff x = 7$,
5) $(x+3)^2 - (x-3)^2 = 6x + 18 \iff 12x = 6x + 18 \iff 6x = 18 \iff x = 3$,
6) $(2x+3)^2 - (2x-3)^2 = 18x + 30 \iff 24x = 18x + 30 \iff 6x = 30 \iff x = 5$,
7) $\frac{2x-1}{x+1} = \frac{3}{4} \iff 8x - 4 = 3x + 3 \iff 5x = 7 \iff x = \frac{7}{5}$,
8) $\frac{4x-1}{4x-2} = 2 + \frac{x}{x-1} \iff 4x - 1 = 8x - 4 + \frac{4x^2-2x}{x-1} \iff (4x-1)(x-1) = (8x-4)(x-1) + 4x^2 - 2x \iff 4x^2 - 5x + 1 = 8x^2 - 12x + 4 + 4x^2 - 2x \iff 8x^2 - 9x + 3 = 0$, on note que le discriminant $(-9)^2 - 4 \times 8 \times 3 = -15$ est négatif, d'où il n'y a pas de solution.
9) $\frac{7}{7x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{1}{7x-1} \iff 7(x+1) - 2(7x-1) = x + 1 \iff -8x + 8 = 0 \iff x = 1$,
10) $(x-3)(x-5) = (x-2) - (x-6) \iff x^2 - 8x + 11 = 0$, le discriminant est $64 - 4 \times 11 = 20$, d'où les solutions sont $\frac{8+2\sqrt{5}}{2} = 4 + \sqrt{5}$ et $4 - \sqrt{5}$.

**Exercice 13.** Trouver $x$ et $y$ tel que $x^2 - y^2 = 77$ et $x - y = 11$.
De la deuxième équation, on déduit que $x = 11 + y$, ainsi si l'on remplace $x$ par $11 + y$ dans le première équation, on a

$$(11+y)^2 - y^2 = 77 \iff 22y = 77 - 121 = -44 \iff y = -2$$

et donc $x = 11 - 2 = 9$.

**Exercice 14.** Résoudre les systèmes

1)

$$\begin{cases} 10x + 9y - 30 & = 0 \\ 11x + 10y + 15 & = 0 \end{cases}$$

A la seconde équation retranchons la première :

$$\begin{cases} 10x + 9y - 30 & = 0 \\ x + y + 45 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 10(-y-45) + 9y - 30 & = 0 \\ x & = -y - 45 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -y - 480 & = 0 \\ x & = -y - 45 \end{cases} \iff \begin{cases} y & = -480 \\ x & = -(-480) - 45 = 435 \end{cases}$$

2)

$$\begin{cases} 4x - 3y & = 14 \\ 7x + 5y & = 45 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = \frac{14+3y}{4} \\ 7\frac{14+3y}{4} + 5y & = 45 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = \frac{14+3y}{4} \\ \frac{41}{4}y & = 45 - 7\frac{14}{4} = \frac{41}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & = \frac{14+3y}{4} \\ y & = \frac{4}{41} \times \frac{41}{2} = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = \frac{14+3\times 2}{4} = 5 \\ y & = 2 \end{cases}$$

3)

$$\begin{cases} \frac{2x}{3} & = \frac{5y}{4} \\ 8x - 3y & = 12 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = \frac{15y}{8} \\ 8\frac{15y}{8} - 3y = 12y & = 12 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = \frac{15}{8} \\ y & = 1 \end{cases}$$

**Exercice 15.** La concentration est, en isolant C et en regroupant les termes connus :

$$C = \frac{A}{\epsilon \times l}$$

On obtient $C = 1,03\ mol \cdot L^{-1}$

**Exercice 16.** Un objet est lancé en l'air. Sa trajectoire à pour équation :

$$y = -\frac{1}{2} \times g \times t^2 + v \times t$$

Puisque lorsqu'il retombe au sol $y = 0$, on a :

$$-\frac{1}{2} \times g \times t^2 + v \times t = 0$$

Soit donc

$$\frac{1}{2} \times g \times t^2 = v \times t$$

Le temps de chute est différent de 0, car le cas $t = 0$ n'est pas physiquement pertinent. Comme $t \neq 0$, on peut simplifier par $t$ dans cette égalité.

$$\frac{g \times t}{2} = v$$

On isole alors $t$, ce qui nous donne alors :

$$t = \frac{2 \times v}{g}$$

**Exercice 17.** On connait le volume $V$ et la longueur $L$ d'un cylindre. Déterminons son rayon $R$ en fonction de $V$ et $L$. La formule donnant le volume d'un cylindre en fonction de sa longueur $L$ et de son rayon $R$ est :

$$V = \pi \times R^2 \times L$$

On isole $R^2$. On obtient alors :

$$R^2 = \frac{V}{\pi \times L}$$

Le second membre de l'égalité étant positif, car le volume $V$, la longueur $L$ et le nombre $\pi$ sont positifs, on a alors, en prenant la racine :

$$R = \sqrt{\frac{V}{\pi \times L}}$$

**Exercice 18.** On connait le volume $V$ d'une sphère : donnons une expression littérale de son rayon $R$. Le volume d'une sphère s'écrit :

$$V = \frac{4 \times \pi \times R^3}{3}$$

On isole $R^3$ :

$$R^3 = \frac{3 \times V}{4 \times \pi}$$

Le second membre de l'égalité étant positif, on peut en prendre la racine cubique.

$$R = \sqrt[3]{\left(\frac{3 \times V}{4 \times \pi}\right)}$$

Remarque : on peut écrire la précédente relation de la manière suivante :

$$R = \left(\frac{3 \times V}{4 \times \pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

**Exercice 19.** On considère un ballon sphérique de rayon $R$ remplie d'un gaz parfait d'équation d'état :

$$P \times V = n \times R \times T$$

**Remarque :** la notation du rayon donnée était très maladroite, puisque l'on pouvait confondre le rayon $R$, avec la constante des gaz parfait $R$.
On notera donc dans la correction, le rayon du ballon $r$. On a donc en remplaçant le volume $V$ par son expression en fonction du rayon $r$ :

$$P \times \frac{4 \times \pi r^3}{3} = n \times R \times T$$

On isole encore $r^3$ :

$$r^3 = \frac{n \times R \times T \times 3}{4 \times \pi}$$

On a là encore des grandeurs positives dans le second membre. On peut donc prendre la racine cubique et l'on trouve :

$$r = \left(\frac{n \times R \times T \times 3}{4 \times \pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

**Exercice 20.** Le périmètre d'un rectangle est représenté par $2a$. Si l'on augmente la longueur de 8 mètres la largeur de 5 mètres, la surface augmente de 180 mètres carrés.

1) Si $2a = 44$ mètres. Notons $L$ la longueur et $l$ la largeur, alors le périmètre est égal à $2a = 2(L+l)$ (soit $L = a - l = 22 - l$) et l'aire du rectangle dont la longueur est augmenté de 8 et la largeur de 5 mètres est $180 + Ll = (L+8)(l+5)$. Cette dernière équation est équivalente à

$$\begin{aligned} & 180 + Ll = Ll + 5L + 8l + 40 \\ \iff & 140 - 5L - 8l = 0 \\ \iff & 140 - 5(22 - l) - 8l = 30 - 3l = 0 \\ \iff & l = 10 \end{aligned}$$

D'où la largeur est $l = 10$ mètres et la longueur est $L = 22 - l = 12$ mètres.

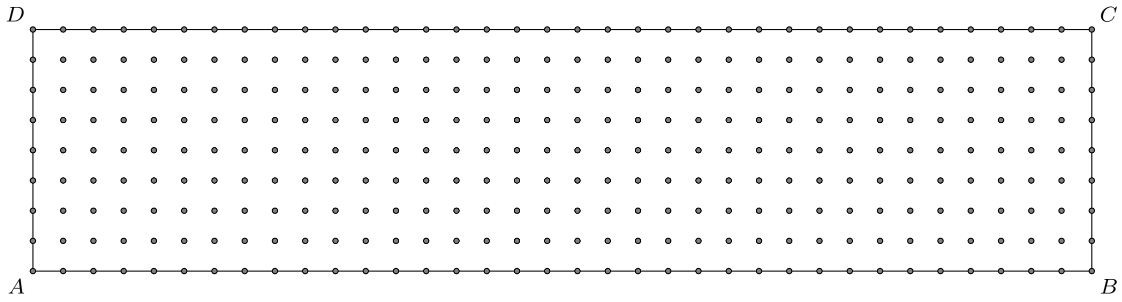
2) Exprimer ces dimensions en laissant le périmètre représenté par $2a$ : De la même manière que précédemment, on a

$$\begin{aligned} & 140 - 5(a - l) - 8l = 0 \\ \iff & 140 - 5a - 3l = 0 \\ \iff & l = \frac{140 - 5a}{3} \end{aligned}$$

et $L = a - \frac{140-5a}{3} = \frac{8a-140}{3}$.

3) Quelles sont la plus petite et la plus grande valeur qu'on peut donner au nombre $a$ pour le problème soit possible ?
Pour que le problème géométrique est un sens, il faut et il suffit que $a$ appartienne à l'intervalle $[17.5;\ 28]$.

**Exercice 21.** On veut planter 324 arbustes sur un terrain rectangulaire ABCD, de longueur 140 mètres et de largeur 32 mètres. Ces arbustes doivent former des rangées équidistantes parallèles à AB, la première rangée étant sur AB et la dernière sur CD. Ils doivent aussi former des rangées équidistantes parallèles à BC, la première étant sur BC, et la dernière sur AD. Trouver quelle doit être la distance de deux rangées consécutives sachant que cette distance est la même pour les rangées parallèles à AB que pour les rangées parallèles à BC.



Notons $d$ la distance entre les rangées. Alors, le nombre d'arbuste sur le côté $AB$ est $\frac{140}{d}+1$ et le nombre d'arbuste sur le côté $AC$ est $\frac{32}{d}+1$. Le nombre d'arbustes total est égal à $(\frac{140}{d}+1)(\frac{32}{d}+1) = 324$. Cette dernière équation est équivalente à

$$\begin{aligned} & (140+d)(32+d) = 324d^2 \\ \Longleftrightarrow \quad & 4480 + 172d + d^2 = 324d^2 \\ \Longleftrightarrow \quad & 323d^2 - 172d - 4480 = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant est $5817744 = 2412^2$ et les solutions de cette équation du second degré sont :

$$d_1 = \frac{172 - 2412}{2 \times 323} = \frac{-1120}{323} \quad \text{et} \quad d_2 = \frac{172 + 2412}{2 \times 323} = 4$$

D'où la distance entre les arbustes est de 4 mètres.

**Exercice 22.** Trouver cinq nombres entiers consécutifs sachant que la somme des carrés des quatre premiers nombres est égale à 42 fois le cinquième.
Notons $x$ le premier nombre, les 4 suivants sont $x+1$, $x+2$, $x+3$ et $x+4$. La condition se réécrit formellement ainsi :

$$\begin{aligned} & x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2 = 42(x+4) \\ \Longleftrightarrow \quad & x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 + x^2 + 6x + 9 = 42x + 168 \\ \Longleftrightarrow \quad & 4x^2 - 30x - 154 = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant est $900 - 4 \times 4 \times (-154) = 3364 = 58^2$ et

$$x_1 = \frac{30 - 58}{8} = \frac{-7}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{30 + 58}{8} = 11$$

Ainsi, les nombres consécutifs 11, 12, 13, 14 et 15 sont tels que la somme des carrés des quatre premiers nombres est égale à 42 fois le cinquième.

# 3 Résolution d'équations

## 3.1 Systèmes linéaires

**Exercice 1.** Résoudre les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} x+1 & = 12y \\ 5x+3 & = 4y \end{cases}$ ;

2) $\begin{cases} 5x-7y & = 2 \\ 2x+9y & = -11 \end{cases}$ ;

3) $\begin{cases} x-4y & = m \\ mx+7y & = 1 \end{cases}$, où $m$ est un nombre réel fixé.

**Exercice 2.** Trouver une fraction dont la valeur ne change pas quand on ajoute simultanément 15 au numérateur et 18 au dénominateur, et qui devient trois plus grande quand on ajoute 55 au numérateur et 6 au dénominateur.

**Exercice 3.** Deux vases $A$ et $B$, de même poids, contiennent des quantités d'eau différentes. B contient 50 grammes d'eau de plus que $A$ et son poids total est les $\frac{5}{4}$ du poids total de $A$. Si l'on vidait le contenu de $B$ dans $A$, ce dernier pèserait alors 8 fois plus que $B$ vide. Quel est le poids de chaque vase, et celui de l'eau qu'il contenait primitivement.

## 3.2 Équation du second degré

**Exercice 4.** Résoudre les équations suivantes :

1) $x^2 - 7x + 6 = 0$ ;
2) $(x-3)^2 - 16 = 0$ ;
3) $x^2 - 10x + 16 = 0$ ;
4) $x^2 - 3x - 1 = 0$ ;
5) $20x^2 - 29x + 5 = 0$ ;
6) $(x-1)(2x+1) + 2 = 4(x-1)^2$ ;
7) $(x+9)^2 = 2(x+7)^2 - 17$.

**Exercice 5.** Résoudre les systèmes de deux équations à deux inconnues, en substituant, dans la seconde équation, la valeur d'une inconnue tirée de la première.

1) $\begin{cases} x+y & = 5 \\ x^2-xy & = 12 \end{cases}$ ;

2) $\begin{cases} 2x-y & = 8 \\ x^2+x-y^2 & = 26 \end{cases}$ ;

3) $\begin{cases} x+y & = 37 \\ x^2-y^2 & = 37 \end{cases}$.

**Exercice 6.** Un bateau à moteur dont la vitesse en eau tranquille est de 40 kilomètres à l'heure parcourt sur un fleuve une distance de 50 kilomètres et revient ensuite à son point de départ. On constate que la durée totale de son trajet dépasse de 10 minutes celle que l'on avait prévue d'après la

vitesse en eau tranquille. Quelle est la vitesse du courant du fleuve ?
*(On admet que la vitesse propre du bateau et celle du courant s'ajoutent à la descente et se retranchent à la montée.)*

**Exercice 7** (*)**.** Calculer les côtés d'un rectangle d'aire maximum inscrit dans un cercle de rayon 1.

**Exercice 8.**

1) Soit $P(x) = x^2 + bx + c$ un polynôme (unitaire) de degré deux. Supposons que $P(x)$ admet deux racines $x_1$ et $x_2$. À l'aide de la forme factorisée, montrer qu'on a :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = -b \\ x_1\, x_2 & = c \end{cases}$$

2) Trouver deux nombres connaissant leur somme $S$ et leur produit $P$ :
   a) $S = 15$, $P = 56$ ;
   b) $S = 2.2$, $P = 5$.

**Exercice 9** (Méthode de Cardan)**.** Considérons l'équation du troisième degré suivante :

$$x^3 - 12x + 16 = 0 \tag{E}$$

1) On se donne $x_0$ une solution de l'équation. Soit $u$, $v$ deux nombres réels tels que $x_0 = u + v$.
   a) Vérifier que $(u+v)^3 - 12(u+v) + 16 = u^3 + v^3 + (u+v)(3uv - 12) + 16$.
   b) Justifier que si les nombres $u$ et $v$ sont solutions du système :

   $$\begin{cases} u^3 v^3 & = \frac{12^3}{3^3} = 64 \\ u^3 + v^3 & = -16 \end{cases}$$

   alors $x_0 = u + v$ est solution de (E).
   c) On pose $x_1 = u^3$ et $x_2 = v^3$. Développer l'expression $(x - x_1)(x - x_2)$ et l'exprimer en fonction de $x$, $p$ et $q$.
   d) Résoudre l'équation du seconde degré $x^2 + 16x + 64 = 0$.
   e) En déduire que $u = \sqrt[3]{-8} = -2$ et $v = -2$.
   f) Justifier que $x_0 = -4$ est une solution de (E).
2) Déterminer $a$ et $b$ deux nombres tels que $x^3 - 12x + 16 = (x+4)(x^2 + ax + b)$.
3) Résoudre l'équation du seconde degré $x^2 + ax + b = 0$.
4) En déduire les solutions de (E).
5) Faire le même raisonnement avec l'équation du troisième degré $x^3 - 27x + 54 = 0$.

**Exercice 10** (ROC)**.** De mémoire, écrire la démonstration de la propriété sur la résolution des équations du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0$$

à partir du calcul du discriminant $\Delta$.
*Indication : Utilisez la forme canonique.*

# 4 Algorithmique

**Exercice 1.** Taper le code suivant dans votre calculatrice (nom du fichier : "EVALPOLY") :

| Casio | Texas Instrument |
|---|---|
| "A":?→A↲<br>"B":?→B↲<br>"C":?→C↲<br>"X":?→X↲<br>A×X^2+B×X+C→F↲<br>"AX²+BX+C":F | Prompt A<br>Prompt B<br>Prompt C<br>Prompt X<br>A×X^2+B×X+C→ F<br>Disp "AX²+BX+C"<br>Disp F |

1) Essayer le programme et dire ce qu'il fait.
2) En vous aidant du programme précédent comme exemple, écrire un programme (nom du fichier : "INFOPOLY") qui demande les coefficients $a, b, c$ et retourne $\alpha$, $\beta$ et le discriminant $\Delta$.
3) Essayer votre programme avec différentes valeurs pour $a, b, c$.
4) Que se passe-t-il si vous entrez les valeurs suivantes : $a = 0$, $b = 1$ et $c = 1$ ?

**Exercice 2.** Taper le code suivant dans votre calculatrice (nom du ficher : "EST POLY") :

| Casio | Texas Instrument |
|---|---|
| "A":?→A↲<br>"B":?→B↲<br>"C":?→C↲<br>If A ≠ 0↲<br>Then "OUI"↲<br>Else "NON"↲<br>IfEnd | Prompt A<br>Prompt B<br>Prompt C<br>If A ≠ 0<br>Disp "OUI"<br>Else<br>Disp "NON"<br>End |

1) Essayer le programme et dire ce qu'il fait.
2) En vous aidant des programmes précédents, écrire le programme dans la calculatrice qui correspond à l'algorithme suivant :

**lire** $a, b$ **et** $c$

**Si** $a$ **est non nul :**

  **Afficher "OUI"**

  **lire** $x$

  $f$ **prend la valeur** $ax^2 + bx + c$

  **Afficher** $f$

**Sinon :**

  **Afficher "NON"**

**Exercice 3.** Écrire un programme (nom du fichier : “RESOUT”) qui demande les coefficients $a$, $b$, $c$ et $d$ et retourne les solutions de l’équation du second degré :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

**Exercice 4 (*).** Écrire un programme (nom du fichier : “INEQ2DEG”) qui demande les coefficients $a$, $b$, $c$ et $d$ et retourne l’ensemble solution de l’inéquation

$$ax^2 + bx + c < d$$

**Exercice 5 (*).** (Dépend de l’exercice 8 page 15.)
Écrire un programme (nom du fichier : ”SOMMPROD”) qui demande deux nombres $S$ et $P$ et retourne $a$ et $b$ tels que

$$\begin{cases} a+b &= S \\ a\,b &= P \end{cases}$$

**Exercice 6.**

1) Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 12x + 16$.
   a) Calculer $f(-10)$, $f(0)$.
   b) Conjecturer le nombre de solutions de l’équation $x^3 - 12x + 16 = 0$.
2) **Un algorithme**

```
Variables : a, b sont des nombres
Entrées : Saisir a, b
Traitement :
Si a > b alors
    c prend la valeur b
    b prend la valeur a
    a prend la valeur c
Fin Si
Si f(b) × f(a) ≤ 0 alors
    Tant que b − a > 10^(−5) faire
        Si f((a+b)/2) × f(a) ≤ 0 alors
            b prend la valeur (a+b)/2
        Sinon
            a prend la valeur (a+b)/2
        Fin Si
    Fin Tant que
Fin Si
Sorties : Afficher a et b
```

   a) Que peut-on dire de $f(b)$ et de $f(a)$ lorsque $f(b) \times f(a) \leq 0$ ?
   b) Que représente $\frac{a+b}{2}$ par rapport à $a$ et $b$ ?
   c) Programmer cet algorithme.
   d) Que se passe-t-il si l’utilisateur entre les valeurs
   $a = -10$ et $b = 0$ ?
   $a = 0$ et $b = 10$ ?
   e) Vérifier que $f(-4) = 0$.
   f) Que fait cet algorithme ?

g) Calculer $f(2)$. Quelle critique peut-on faire au précédent programme ?

**Exercice 7.** Taper le code suivant dans votre calculatrice :

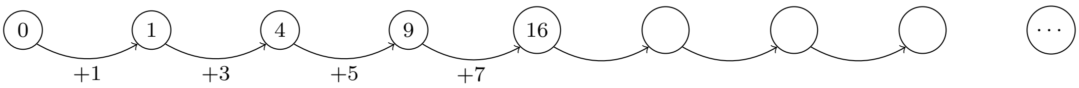
Casio :

```
"X":?→X
0→I
While I^2 < X
I+1→I
WhileEnd
If I^2 = X
Then I ◢
Else "ERREUR"
IfEnd
```

Texas Instrument :

```
Prompt X
0→I
While I^2 < X
I+1→I
End
If I^2 = X
Disp I
Else
Disp "ERREUR"
End
```

1) Tester le programme précédent et expliquer ce qu'il fait.
2) Compléter le schéma suivant où dans les cercles se trouve la liste des entiers au carré :




Que remarque-t-on ?

3) * Montrer qu'en additionnant successivement les entiers impairs, on obtient successivement les entiers au carré.
4) Quitte à admettre le résultat de la question précédente, écrire un programme qui affiche la liste des 20 premiers entiers au carré basé sur le schéma de la question 2).
5) Modifier le programme de la question 1 en remplaçant le calcul de $I^2$ par le calcul de l'entier au carré suivant à l'aide de la technique développée dans la question précédente (nom du programme : "ESTCARRE").

**Exercice 8.** 1) Entrer la liste $\{5, 1, 3, 4, 2\}$ dans la liste 1 de la calculatrice.

2) Tester le programme suivant :

Casio :

```
Dim List 1→N
List 1[1]→M
For 1 → I to N
If List 1[I]>M
Then
List 1[I]→M
IfEnd
Next
M ◢
```

Texas Instrument :

```
dim(L1)→N
L1(1)→M
For(I,1,N)
If L1(I)>M
Then
L1(I) →M
End
End
Disp M
```

Essayer le programme et expliquer ce qu'il fait.

3) Modifier le programme suivant pour qu'il retourne le minimum de la liste $L_1$.

4) Écrire un programme qui cherche le minimum de la liste $L_1$ est l'échange avec premier nombre de la liste.

5) * En déduire un programme qui trie dans l'ordre croissant la liste $L_1$.

**Exercice 9.** On rappelle qu'un entier $d$ est un diviseur d'un entier $n$ si la division de $n$ par $d$ est entière.
On dit qu'un nombre $n$ est parfait si la somme de ses diviseurs est égale à $2n$.

1) Déterminer la liste des diviseurs de 12. Le nombre 12 est-il parfait ?
2) Vérifier que 6 est parfait.
3) Écrire un programme qui teste si un entier $n$ est parfait.
4) À l'aide d'un programme, déterminer tous les entiers parfaits inférieurs à 100.

*Remarque : Le théorème d'Euler, au XVIIIe siècle, nous dit qu'un nombre pair est parfait si et seulement s'il s'écrit de la forme suivante* $2^{k-1}(2^k-1)$ *avec* $k \geq 2$. *Par contre, à ce jour, on ne sait pas s'il existe des nombres impairs parfaits.*

## 5 Raisonnements

**Exercice 1.** Vérifier les égalités

$$\frac{\frac{41}{65}-\frac{3}{20}+\frac{3}{26}}{\frac{3}{14}-2+\frac{17}{12}}\times\frac{\frac{8}{9}-\frac{13}{35}-\frac{4}{63}}{\frac{9}{20}+\frac{8}{15}-\frac{1}{4}}=-1 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{1-\frac{3}{2}}{1-\frac{5}{4}}\div(3-\frac{1}{2})\right)\div(-8+\frac{36}{5})=-1$$

**Exercice 2.** Simplifier, quand c'est possible, les fractions suivantes :

1) Pour tout réel $x\neq 0$, $A=\frac{2x}{3x}$.
2) Pour tout réel $x$, $B=\frac{3x+1}{3x^2+1}$.
3) Pour tout réel $x\neq 0$, $C=\frac{2x^2+x}{x}$.
4) Pour tout réel $x\neq -2$, $D=\frac{(x-3)(x+2)}{x+2}$.
5) Pour tout réel $x\neq -2$, $E=\frac{x^2-x-6}{x+2}$.

**Exercice 3** (Énigmes mathématiques diaboliques de Sylvain Lhullier)**.**

1) Posons $a=1$ et $b=1$.

| | |
|---|---|
| $a=b$ | (1) Évident ! |
| $a^2=a\,b$ | (2) On multiplie par $a$ les deux membres. |
| $a^2-b^2=a\,b-b^2$ | (3) On retranche $b^2$ aux deux membres. |
| $a^2+a\,b-a\,b-b^2=b(a-b)$ | (4) On ajoute $0=a\,b-a\,b$ à gauche et |
| | on met $b$ en facteur à droite. |
| $a(a+b)-b(a+b)=b(a-b)$ | (5) On effectue deux mises en facteur. |
| $(a+b)\,(a-b)=b(a-b)$ | (6) On met en facteur $a+b$ à gauche. |
| $a+b=b$ | (7) On simplifie. |
| $2=1$ | (8) Et on crie à l'arnaque... |
| | Oui, mais où ? |

2) * Démontrer que quels que soient $a$ et $b$ deux nombres, on a l'égalité $(a+b)\,(a-b)=b\,(a-b)$ si et seulement si $a=b$ ou $a=0$.
3) Voici un autre raisonnement faux :

| | |
|---|---|
| Pour tout $x$ dans $\mathbb{R}$ : $x^2\geq 0$ | (1) Résultat bien connu. |
| Pour tout $x$ dans $\mathbb{R}$ : $\sqrt{x^2}\geq\sqrt{0}$ | (2) On applique la racine carrée des deux côtés. |
| Pour tout $x$ dans $\mathbb{R}$ : $x\geq 0$ | (3) On simplifie l'expression. |
| | Où est l'erreur ? |

4) Démontrer que pour tout $x$ dans $\mathbb{R}$, $x^2+4x+4$ est positif.

**Exercice 4.** Résoudre les équations suivantes :

1) $\frac{4}{3}x+5=\frac{5}{3}x-2$ ;

2) $(x-3)-12 = 3(\frac{7}{2}x+21)$ ;
3) $(x+1)^2 = x+1$ ;
4) $x^3+5x^2-7x = 0$.

**Exercice 5.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = 4x^2 - 12x + 5$.

1) Déterminer la forme canonique et la forme factorisée de $4x^2 - 12x + 5$.
2) Déterminer les antécédents de $-4$ par la fonction $f$.
3) Résoudre $f(x) \geq 5$.
4) Dresser le tableau de signe de la fonction $f$.

**Exercice 6.** On considère l'algorithme suivant :

**Variables :** $a$, $b$ et $m$ sont des nombres
**Initialisation :**
$a$ prend la valeur 1.
$b$ prend la valeur 2.
**Traitement :**
**Tant que** $b-a > 0.1$ **faire**
  $m$ prend la valeur $\frac{a+b}{2}$
  **Si** $m^2 - 2 > 0$ **alors**
    $b$ prend la valeur $m$
  **Sinon**
    $a$ prend la valeur $m$
  **Fin Si**
**Fin Tant que**
**Sorties :**
Afficher $a$
Afficher $b$

1) Faire tourner l'algorithme “à la main” et indiquer ce qu'il affiche en sortie.
2) Expliquer ce que calcule cet algorithme.
3) Modifier cet algorithme afin qu'il donne un encadrement de $\sqrt{3}$ d'amplitude $10^{-3}$.

**Exercice 7** (Kangourou 2011)**.** Deux lettres différentes représentant des chiffres différents non nuls et une même lettre représentant toujours le même chiffre, quelle est la plus petite valeur entière de

$$\frac{K \times A \times N \times G \times O \times U \times R \times O \times U}{K \times O \times A \times L \times A}$$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 5 E) 7

**Exercice 8** (**)**.**

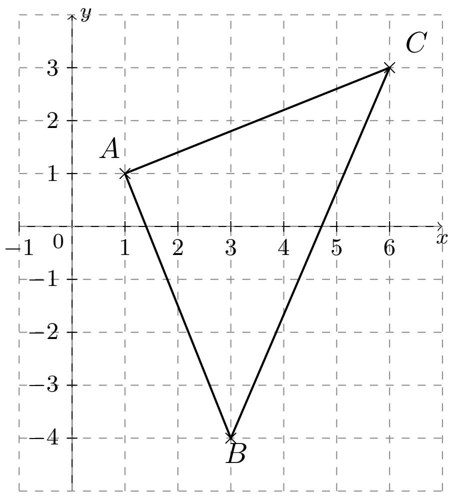
1) Soit $a$ et $b$ deux nombres réels, montrer que $2\,a\,b \leq a^2 + b^2$ et que $4\,a\,b \leq (a+b)^2$ avec égalité si et seulement si $a = b$.
2) En déduire que pour tout réel $x > 0$, on a $x + \frac{1}{x} \geq 2$, avec égalité si et seulement si $x = 1$.
*Indication : Déterminer $a$ et $b$ deux nombres en fonction de $x$ tels que $a\,b = 1$ et permettant d'utiliser la propriété de la question 1.*
3) Montrer que pour tous $x$, $y$ des nombres réels positifs, $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$.
*Indication : Poser $a = \sqrt{x}$ et $b = \sqrt{y}$ et réécrire l'inégalité avec $a$ et $b$.*
4) Soit $x, y$ dans l'intervalle $]-1; 1[$, démontrer que $-1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1$.

# 6 Géométrie

**Exercice 9.** On se place dans le plan muni d'un repère.

1) Soit $d$ la droite d'équation $2x - 5y + 5 = 0$.
   - a) Est-ce que les points $A(0;1)$, $B(5,3)$ et $C(6,2)$ appartiennent à la droite $d$ ?
   - b) Déterminer le point $D$ de la droite $d$ d'abscisse 2.
   - c) Déterminer le point $E$ de la droite $d$ d'ordonnée 3.
   - d) Déterminer un vecteur directeur de la droite $d$.
2) Soit $F(1,2)$ et $B(5,-3)$ deux points.
   - a) Déterminer l'équation de la droite de $(FG)$.
   - b) Déterminer un vecteur directeur de la droite $(FG)$.
   - c) Est-ce que les droites $(FG)$ et $(AB)$ sont parallèles ?
   - d) Déterminer les coordonnées du point d'intersection $M$ des droites $(FG)$ et $(AB)$.

**Exercice 10.** On considère le triangle suivant dans un repère orthonormé.

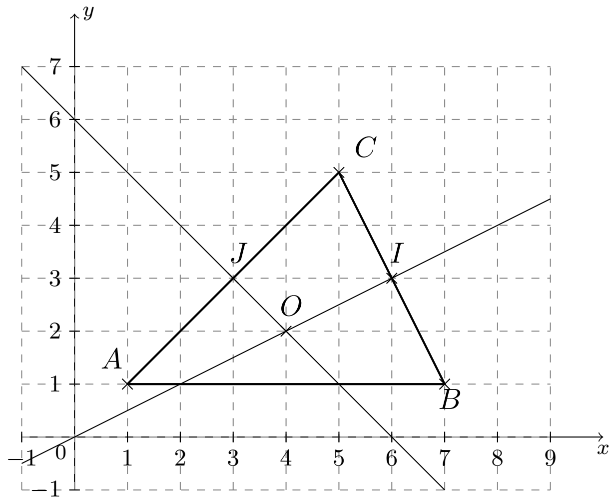



1) Lire les coordonnées des points $A$, $B$ et $C$.
2) Calculer $AB^2$, $AC^2$ et $BC^2$.
3) Démontrer que le triangle $ABC$ est un triangle rectangle en A.
4) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$. Que représente ce vecteur pour la droite $(AB)$ ?
5) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$, vecteur directeur de la droite $(AC)$.
6) Quelle relation y-a-t'il entre les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ?

Pour l'exercice suivant, on admettra la propriété suivante :

> **Propriété :** Dans un repère orthonormé, soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Alors le vecteur $\overrightarrow{v}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ est **orthogonale** au vecteur $\overrightarrow{v}$.

**Exercice 11.** On considère le triangle suivant dans un repère orthonormé.




L'objet de cet exercice est de montrer que les médiatrices du triangle $ABC$ sont concourantes en un point $O$.

1) Déterminer les coordonnées des points $I$, $J$, $K$ milieux de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ respectivement.
2) On considère la droite $d_1$ d'équation $y - 2y = 0$.
    a) Vérifier que la droite $d_1$ passe par le point $I$.
    b) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CB}$ et, à l'aide de la propriété précédente, les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{v_1}$ orthogonal à $\overrightarrow{CB}$.
    c) Montrer que $\overrightarrow{v_1}$ est un vecteur directeur de la droite $d_1$.
    d) En déduire que $d_1$ est la médiatrice du segment $[BC]$.
3) On note $d_2$ la médiatrice du segment $[AC]$.
    a) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ et, à l'aide de la propriété précédente, les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{v_2}$ orthogonal à $\overrightarrow{AC}$.
    b) En déduire une équation cartésienne de la droite $d_2$.
4) Soit $O(x; y)$ le point d'intersection des deux médiatrices $d_1$ et $d_2$. En résolvant un système, montrer que les coordonnées de $O$ sont $(4, 2)$.
5) Soit $d_3$ la médiatrice $d_3$ du segment $[AB]$
    a) Tracer $d_3$ sur la figure précédente.
    b) Déterminer une équation cartésienne de la droite $d_3$.
6) Vérifier que le point $O$ appartient aussi à la droite $d_3$.
7) Conclure.

**Exercice 12.** On considère les trois droites suivantes :

$$\begin{array}{ll} d_1 : & x - 3y + 2 = 0 \\ d_2 : & 3x + y - 14 = 0 \\ d_3 : & 4x - 2y - 2 = 0 \end{array}$$

1) Réprésenter les trois droites.
2) Quelle est la nature du triangle ainsi formé ? Justifier.

# 7 Dérivation

**Exercice 13 (**).** Un automobiliste effectue le trajet aller de Meaux à Strasbourg à la vitesse moyenne de 120km/h, puis, à cause des embouteillages, le trajet retour à la vitesse moyenne de 100 km/h. Quelle est sa vitesse moyenne sur l'aller-retour ?

**Exercice 14.** Déterminer le domaine de dérivabilité et la dérivée des fonctions $f$ suivantes :

1) $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ ;
2) $f(x) = -1.2x^5 + 3x^2 - 4.212x + 123.1456$ ;
3) $f(x) = \frac{3}{1}4x^2 - \frac{2}{1}5x + \frac{5}{2}$ ;
4) $f(x) = 2\sqrt{x} + 3x$ ;
5) $f(x) = \frac{1}{x} - 12$ ;
6) $f(x) = \frac{-2}{x} + 12x$ ;
7) $f(x) = \sqrt{x}(x+1)$ ;
8) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ ;
9) $f(x) = \frac{x^2+x+1}{3x-4}$ ;
10) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$.

**Exercice 15.** Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

| $x$ | 0 | 2 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | -2 | -3 | -2 |
| Nombre dérivé de $f$ en $x$ | -2 | -1 | 0 | 1 |

1) Placer dans un repère les points connus de la courbe représentative de $f$.
2) Tracer les tangentes en ces points.
3) Donner une allure possible de la courbe représentative de la fonction $f$.

**Exercice 16.** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 8x^2 + 5x$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1) Déterminer une équation de la tangente $d_1$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $A$ d'abscisse 5.
2) Déterminer une équation de la tangente $d_2$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $B$ d'abscisse 0.
3) Dans un repère, tracer la courbe $\mathcal{C}_f$, $d_1$ et $d_2$.
4) Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de $d_2$.

**Exercice 17.** Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse ; justifier.

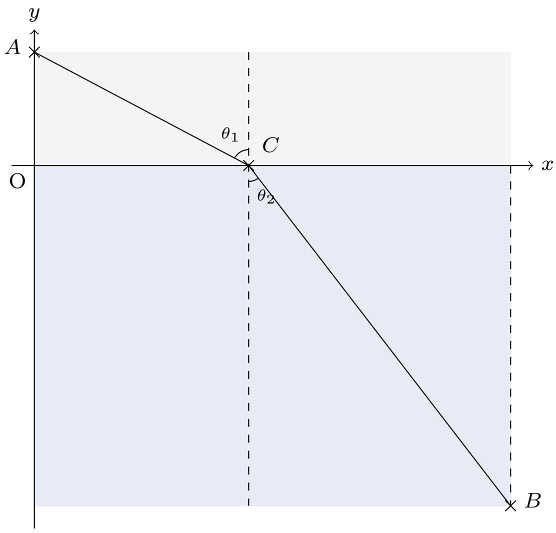
1) Il existe une infinité de fonctions ayant comme fonction dérivée la fonction constante définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5$.
2) Soit $f$ et $g$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)^2(x-2)$ et $g(x) = (x-2)^2(x-1)$. Les fonctions dérivées de ces deux fonctions sont les mêmes.
3) Soit $f$ et $g$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)^2(x-2)$ et $g(x) = (x-2)^2(x-1)$. Il existe un nombre réel $a$ pour lequel les nombres dérivés de $f$ et $g$ en $a$ sont les mêmes.

**Exercice 18.** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + c$$

où $a$, $b$ et $c$ sont des nombres réels quelconques tels que $a \neq 0$.
Démontrer que, dans un repère, la courbe représentative de la fonction $f$ admet deux tangentes horizontales si et seulement si $b$ est non nul.

**Exercice 19.** Un sauveteur situé en un point A d'une plage à 5 mètres de la mer, souhaite porter secours à un vacancier situé en un point B en mer à 15 mètres du bord. La distance entre le sauveteur et le vacancier est de 29 mètres. Le sauveteur court sur la plage avec une vitesse de $6\,m.s^{-1}$ et il nage avec une vitesse de $4\,m.s^{-1}$.




Nous allons déterminer le chemin que doit suivre le sauveteur afin de sauver le vacancier le plus rapidement possible.

1) Quel est l'objectif du sauveteur : minimiser la distance ou minimiser le temps mis pour rejoindre le vacancier ?
2) Justifier que dans le repère orthonormé précédent, les coordonnées du point $A$ sont $(0; 5)$ et celles de $B$ sont $(21; -15)$.
3) Justifier que le trajet optimal est necessairement composé de deux segments, les segments $[AC]$ et $[CB]$.

On note $x$ l'abscisse du point $C$.

4) Calculer le temps mis par le sauveteur pour aller du point $A$ à $C$ en fonction de la distance $AC$, puis en fonction de $x$.
5) De même, calculer le temps mis par le sauveteur pour aller du point $C$ à $B$ en fonction de $x$.
6) En déduire que le temps $T(x)$ mis par le sauveteur pour rejoindre le vacancier en suivant le trajet passant par le point $C$ est égal à

$$T(x) = \frac{\sqrt{25 + x^2}}{6} + \frac{\sqrt{x^2 - 42x + 666}}{4}$$

7) L'objet de cette question est de montrer que pour tout $x$ dans l'intervalle $]0;\,21[$,

$$T'(x) = \frac{x}{6\sqrt{25 + x^2}} + \frac{x - 21}{4\sqrt{x^2 - 42x + 666}}$$

a) On pose $v : ]0; 21[ \to \mathbb{R}$ définie par $v(x) = \sqrt{25 + x^2}$.

i) Soit $a$ dans l'intervalle $]0; 21[$ et $h \neq 0$, calculer le taux d'accroisssement

$$\frac{v(a+h) - v(a)}{h}$$

ii) En déduire que $v'(a) = \frac{a}{\sqrt{25+a^2}}$.

b) On considère $u : ]0; 21[$ définie $u(x) = x^2 - 42x + 666$. On pose $g : ]0; 21[ \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sqrt{u(x)}$.

i) Exprimer $g(x)$ en fonction de $x$.

ii) Rappeler la dérivée de la fonction racine carrée.

iii) On admet [1] que la fonction $g$ est dérivable et que

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

Calculer $g'(x)$.

c) En déduire la dérivée $T'$ de la fonction $T$.

8) En revenant à la figure précédente, justifier que

$$\sin(\theta_1) = \frac{x}{6\sqrt{25 + x^2}} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta_2) = \frac{21 - x}{4\sqrt{x^2 - 42x + 666}}$$

9) En déduire que

$$T'(x) = \frac{\sin(\theta_1)}{6} - \frac{\sin(\theta_2)}{4}$$

On admet qu'il existe un unique nombre $x_0$ dans $]0; 21[$ tel que que $T'(x_0) = 0$.

10) Faire une table des valeurs de $T'(x)$ pour $x$ allant de 0 à 21 avec un pas de 0.1. En déduire une approximation de $x_0$.

11) Conjecturer le tableau de variation de la fonction $T$.

12) Justifier que la trajectoire optimale du sauveteur est telle que

$$\frac{\sin(\theta_1)}{6} = \frac{\sin(\theta_2)}{4}$$

Cette relation est analogue à la loi de Snell-Descarte en physique sur la trajectoire d'un rayon lumineux. Plus précisément, Pierre de Fermat proposa que les rayons lumineux répondent à un principe très général selon lequel le chemin emprunté par la lumière pour se rendre d'un point donné à un autre était celui pour lequel le temps de parcours était minimum. Cette proposition est le *principe de Fermat*. De plus, pour un rayon lumineux circulant d'un milieu à un autre, on vient de voir que les sinus des angles d'incidence et de réfraction divisés par les vitesses dans les deux milieux respectifs doivent être égaux (la loi de Snell-Descarte).

1. Ce résultat sera vu l'année prochaine en Terminale.

# 8 Corrections

**Exercice 20** (exercice 8 page 21)**.** 3) Soit $x$, $y$ dans $]-1;\,1[$. On note que $-1 < x\,y < 1$, ainsi $1+xy > 0$ et montrer qu'on a l'encadrement :$-1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1$ équivaut à montrer que $-1-xy < x+y < 1+xy$. Or, les hypothèses sur $x$ et $y$ entrainent que les nombres $1-x$, $1+x$, $1-y$ et $1+y$ sont strictement positifs. En factorisant deux fois dans l'expression suivante, on a

$$-1-xy-x-y = -1-y-x(y+1) = -(1+x)(y+1) < 0 \qquad \Rightarrow \qquad -1-xy < x+y$$

et de même,

$$1+xy-x-y = 1-y-x(1-y) = (1-x)(1-y) > 0 \qquad \Rightarrow \qquad x+y < 1+xy$$