

TP : PROIES ET PRÉDATEURS : LE MODÈLE DE LOTKA-VOLTERRA DE 1925*mardi 12 mai 2015*

**Exercice 1** (Proies et prédateurs : le modèle de Lotka-Volterra). On s'intéresse à l'évolution de la population de truites (les proies) et de brochets (les prédateurs) dans la Meuse.

On note  $T_n$  et  $B_n$  une estimation du nombre de truites et de brochets respectivement dans la Meuse le premier juin de l'année  $2001 + n$  (où  $n$  désigne un nombre entier naturel).

On estime qu'entre une année et la suivante :

- le nombre de truites augmente de 10% mais lors des  $T_n \times B_n$  rencontres possibles entre les deux espèces, seules 0.1% ont effectivement lieu et à chacune d'entre elles la truite est dévorée par le brochet ;
- parmi les  $B_n$  brochets, 5% meurent uniquement à cause de leur sensibilité à la toxicité de la Meuse. Mais le fait de dévorer des truites permet aux brochets de se reproduire. Ainsi le nombre de nouveaux brochets est estimé à 50% du nombre de truites dévorées.

En 2001, dans le secteur étudié, on comptait  $T_0 = 210$  truites et  $B_0 = 50$  brochets.

1. Calculer le nombre de rencontres possibles entre une truite et un brochet.
2. Calculer le nombre de truites dévorées.
3. Justifier que "50% du nombre de truites dévorées" pour la première année correspond à  $0.0005T_0 \times B_0$
4. Justifier que

$$\begin{cases} T_1 &= 1.1T_0 - 0.001T_0 \times B_0 \\ B_1 &= 0.95B_0 + 0.0005T_0 \times B_0 \end{cases}$$

et en déduire le nombre de truites  $T_1$  et de brochets  $B_1$  l'année suivante en 2002.

### 5. Utilisation du tableur :

- a) Reproduire le tableau suivant dans un tableur :

	A	B	C	D
1	Année	$n$	Proies	Prédateurs
2	2001	0	210	50
3	2002	1		

- b) Justifier qu'on peut taper dans la cellule  $C3$  la formule  $= 1,1*C2 - 0,001*C2*D2$  pour obtenir le nombre de truites en 2002.  
Proposer, de même, une formule à entrer dans la cellule  $D3$ .
- c) En utilisant la fonction de recopie vers le bas, compléter le tableau pour obtenir respectivement le nombre de proies (truites) et le nombre de prédateurs (brochets) au cours des 200 années suivant 2001.
- d) Pour avoir une idée de l'évolution de ces deux populations, représenter dans une même fenêtre graphique l'allure du nuage de points de coordonnées  $(T_n; B_n)$ .
- e) Interpréter concrètement cette évolution.
- f) Faire varier les données initiales. L'évolution est-elle fortement influencée par celles-ci ?

### 6. Étude des suites numériques :

a) Justifier que, pour tout entier naturel  $n$  :

$$\begin{cases} T_{n+1} &= 1.1T_n - 0.001 T_n \times B_n \\ B_{n+1} &= 0.95B_n + 0.0005T_n \times B_n \end{cases}$$

b) Quelle est la nature de la suite  $(T_n)$  lorsqu'il n'y a pas de prédateurs ? Quel est son sens de variation et sa limite ?

c) Quelle est la nature de la suite  $(B_n)$  lorsqu'il n'y a pas de proies ? Quel est son sens de variation et sa limite ?

d) Vérifier que, pour tout entier naturel  $n$  :

$$\begin{cases} T_{n+1} - T_n &= T_n (0.1 - 0.001 B_n) \\ B_{n+1} - B_n &= B_n (-0.05 + 0.0005T_n) \end{cases}$$

En supposant qu'il y ait des proies et des prédateurs, quels auraient dû être les nombres de truites et de brochets initialement dans la Meuse pour que ceux-ci soient constants ?