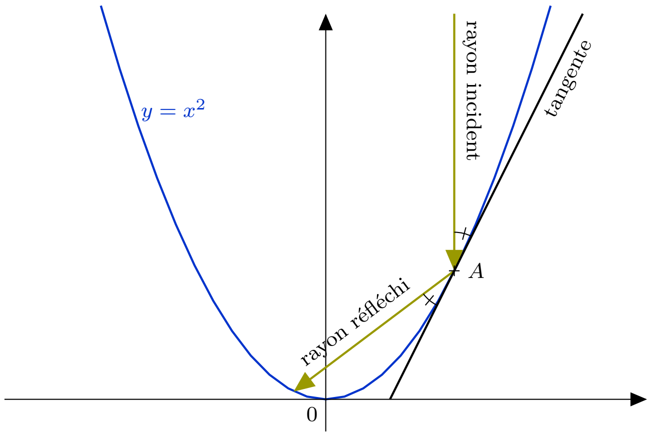
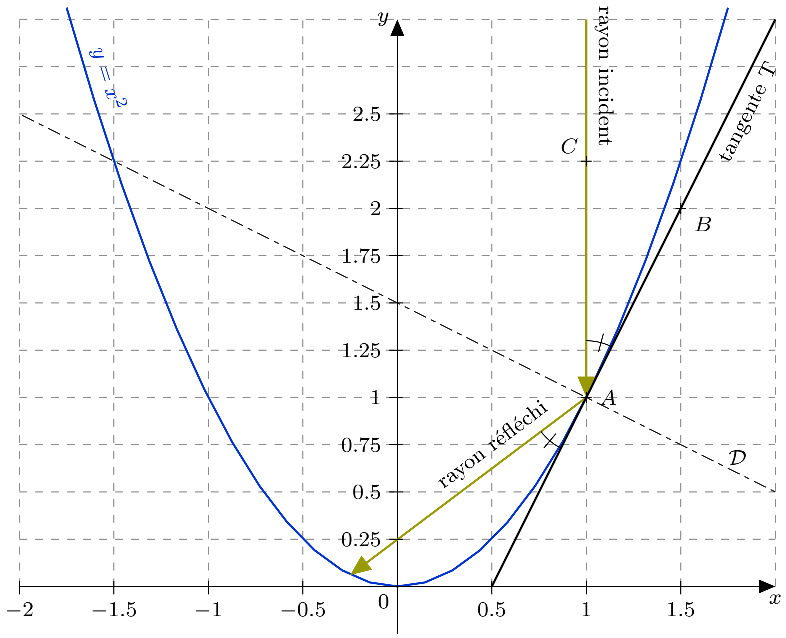
Devoir maison : Four solaire

pour le mardi 2 juin 2015

L'objet de ce travail est d'étudier la trajectoire d'un rayon lumineux venant à la vertical sur la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$. Ci-dessous, un schéma illustrant la configuration.

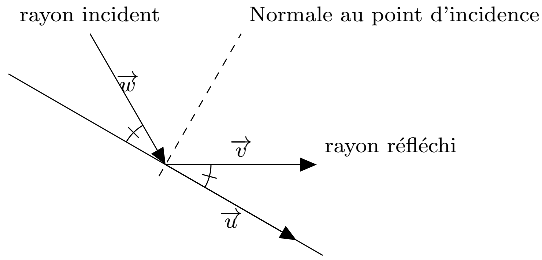


Exercice 1 (Un exemple de rayon)**.** On suppose que le rayon incident est sur la droite d'équation $x = 1$ et on note A le point de coordonnées $(1, 1)$.



1. Déterminer l'équation réduite de la tangente T.
2. Déterminer l'équation réduite de la droite $\mathcal{D}$ perpendiculaire à la tangente T et passant par A.
3. Placer sur la figure le symétrique B' et C' des points $B(1.5,\ 2)$ et $C(1,\ 2.25)$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$.
4. Comparer $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{AB}$.
5. Déterminer une équation de la droite $(C'A)$ contenant le rayon récléchi.

Exercice 2. La loi de reflexion de Snell-Descartes, affirme que l'angle d'incidence d'un rayon lumineux est égal à l'angle de réflexion. La figure suivante illustre cette propriété.



où $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont trois vecteurs unitaires.

1. Justifier que la loi de réflexion équivaut à l'égalité $(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{w},\ \overrightarrow{u})$.
2. En déduire que les trois vecteurs unitaires deux à deux distincts $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ vérifient la relation $(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{w},\ \overrightarrow{u})$ si et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}) = 0$.
3. *Un exemple :* Soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$ dans le plan muni d'un repère orthonormé. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{w}$ tel que $(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{w},\ \overrightarrow{u})$ et reproduire la figure correspondante.

On admet une petite généralisation de la propriété vue dans l'exercice précédent :

Propriété Soient trois vecteurs non nuls et deux à deux distincts $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ et supposons que $||\overrightarrow{v}|| = ||\overrightarrow{w}||$. Les vecteurs vérifient la relation $(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{w},\ \overrightarrow{u})$ si et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}) = 0$.

Exercice 3. On considère donc la fonction polynôme du second degré $f(x) = x^2$.
On se donne a dans l'intervalle $[-2; 2]$ et on pose $A(a;\ f(a))$ appartenant à $\mathcal{P}$.
On note T la tangente à $\mathcal{P}$ passant par A. On pose $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\2a\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-4a\\1-4a^2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}0\\-4a^2-1\end{pmatrix}$.

1. Montrer que l'équation réduite de la tangente T est : $y = 2a(x-a) + a^2$ soit $y = 2ax - a^2$.
2. Montrer que $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de la droite T.
3. À l'aide de la propriété et de l'exercice précédent, montrer que $\overrightarrow{v}$ détermine la direction du rayon réfléchi.
4. Faire la figure avec Geogebra :
   Créer un curseur a allant de -2 à 2 avec un pas de 0.1 et taper les commandes :
   ```
   f(x) = x^2
   A = (a, f(a))
   T = Tangente[A,f]
   M = (a, f(a) + 1)
   N = (-3*a, 1 - 4*a^2 + f(a) )
   DemiDroite[A,M]
   DemiDroite[A,N]
   ```
   Ensuite, faire varier le paramètre a. Qu'observe-t-on ?
5. On pose $F(0,\ 0.25)$. Montrer que $\overrightarrow{FA}$ est colinéaire à $\overrightarrow{v}$. En déduire que quel que soit le rayon incident venant à la vertical sur la parabole, le rayon réfléchi passe par F.
6. Justifier que, dans un four solaire de section parabolique et bien orienté, les rayons lumineux sont concentrés vers le foyer.